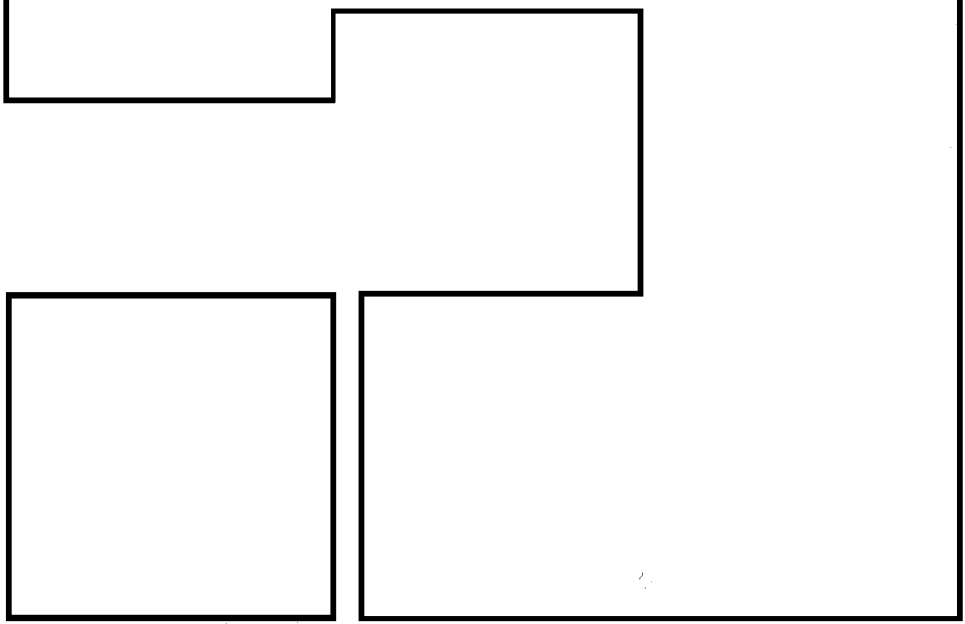
F.D. GÁJOV

PROBLEMAS DE CONTORNO



EDITORIAL
MIR
MOSCÚ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

Ф. Д. ГАХОВ

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«НАУКА»

F. D. GÁJOV

PROBLEMAS DE CONTORNO

EDITORIAL MIR . MOSCÚ

Traducido del ruso por el ingeniero
Medkov K. P.

© Главная редакция физико-математической
литературы издательства «Наука», 1977,
с изменениями.

© Traducción al español, Editorial Mir, 1980.

Impreso en la URSS, 1980

На испанском языке

INDICE

PREFACIO 12

CAPÍTULO I. Integral de tipo de Cauchy 15

§ 1. Definición de la integral de tipo de Cauchy y los ejemplos . . 16
§ 2. Funciones que satisfacen la condición de Hölder 19
2.1. Definición y propiedades (19). 2.2. Funciones de varias variables (22).
§ 3. Valor principal de la integral de tipo de Cauchy 22
3.1. Integral impropia (22). 3.2. Valor principal de la integral singular (23). 3.3. Sobre las funciones multiformes (25). 3.4. Valor principal de la integral curvilínea singular (28). 3.5. Propiedades de la integral singular (31).
§ 4. Valores límites de la integral de tipo de Cauchy. Integrales en el eje real 34
4.1. Lema fundamental (34). 4.2. Fórmulas de Sojotski (37). 4.3. Condición de que una función compleja arbitraria es valor de contorno de la función analítica en un dominio (39). 4.4. Valores límites de las derivadas. Derivadas de los valores límites y derivación de la integral singular (42). 4.5. Fórmulas de Sojotski para los puntos angulares del contorno (44). 4.6. Integrales de tipo de Cauchy en el eje real (45). 4.7. Fórmulas de Cauchy (50).
§ 5. Propiedades de los valores límites de la integral de tipo de Cauchy 53
5.1. Los valores límites satisfacen la condición de Holder (53). 5.2. Ampliación de las suposiciones (56). 5.3. Integral de tipo de Cauchy en las clases L_p (58).
§ 6. Fórmulas de Hilbert para los valores límites de las partes real e imaginaria de la función analítica 59
6.1. Núcleo de Cauchy y núcleo de Schwarz (59). 6.2. Fórmulas de Hilbert (59).
§ 7. Inversión del orden de integración en la integral singular reiterada 61
7.1. El caso en que una integral es ordinaria (61). 7.2. Fórmula de inversión (63). 7.3. Inversión de la integral singular con núcleo de Cauchy para un contorno cerrado (66). . . . . .
§ 8. Comportamiento de la integral de tipo de Cauchy en los extremos del contorno de integración y en los puntos de discontinuidad de la densidad 67
8.1. Caso de la densidad que satisface la condición de Hölder hasta los extremos (67). 8.2. Caso de la discontinuidad de primera especia (68). 8.3. Caso particular de la singularidad de carácter potencial (69). 8.4. Caso general de la singularidad de orden potencial (74). 8.5. Singularidad de tipo logarítmico (75). 8.6. Singularidad de tipo logarítmico potencial (77). 8.7. Integral de tipo de Cauchy en un contorno complejo (78).

§ 9. Valores límites de las integrales generalizadas y de las integrales dobles de tipo de Cauchy 79
9.1. Planteamiento del problema (79). 9.2. Fórmulas análogas a las de Sojotski para la integral de tipo de Cauchy (80). 9.3. Fórmulas de inversión del orden de integración (81). 9.4. Integrales múltiples de tipo de Cauchy (83). 9.5. Integral singular doble. Fórmula de Poincaré—Bertrand (83). 9.6. Fórmulas de Sojotski (85)
§ 10. Integral de tipo de Cauchy y los potenciales 86
§ 11. Notas históricas 88
Problemas al capítulo I 90

CAPÍTULO II. Problema de contorno de Riemann 99

§ 12. Algunos teoremas auxiliares 99
12.1. Principio de continuidad. Prolongación según simetría (99). 12.2. Principio de argumento. Teorema generalizado de Liouville (103).
§ 13. Indice 105
13.1 Definición y propiedades fundamentales (105). 13.2. Cálculo de índice (106). 13.3. Indices parciales de la función de dos variables (109)
§ 14. Problema de Riemann para el dominio simplemente conexo 110
14.1. Planteamiento del problema (110). 14.2. Búsqueda de la función analítica a trozos por el salto dado (110). 14.3. Función canónica (111). 14.4. Resolución del problema homogéneo (113). 14.5. Resolución del problema no homogéneo (114). 14.6. Ejemplos (117). 14.7 Problema de Riemann para un semiplano (122). 14.8. Problema bidimensional sobre el salto (125). 14.9. Planteamiento del problema de Riemann para los dominios bicilíndricos (127). 14.10. Algunos resultados relacionados con el problema de Riemann multidimensional (132).
§ 15. Casos excepcionales del problema de Riemann 134
15.1 Problema homogéneo (134). 15.2. Problema no homogéneo (137). 15.3. Sobre el planteamiento correcto del problema de contorno de Riemann (141)
§ 16. Problema de Riemann para un dominio múltiplimente conexo. Algunos resultados nuevos 143
16.1. Planteamiento del problema (143). 16.2. Resolución del problema (145). 16.3. Algunos otros resultados (148).
§ 17. Problema de contorno de Riemann con traslación 151
17.1 Planteamiento del problema y observaciones generales (151). 17.2. Problema de salto nulo (152). 17.3. Problema de salto dado (155). 17.4. Problema homogéneo de índice cero (157). 17.5. Sobre la reducción del problema con traslación al problema de Riemann ordinario (158).
§ 18. Otros problemas generalizados 161
18.1. Planteamiento del problema (161). 18.2. Problema de contorno de Hilbert con traslación (163). 18.3. Problema de contorno de Carleman (168).
§ 19. Notas históricas 171
Problemas al capítulo II 172

CAPÍTULO III. Ecuaciones integrales singulares con núcleo de Cauchy 177

§ 20. Conceptos fundamentales y designaciones 177
20.1. Ecuación integral singular (177). 20.2. Resultados

principales de la teoría de las ecuaciones integrales de Fredholm (180).

§ 21. Ecuaciones características 182
21.1. Reducción al problema de contorno de Riemann (182). 21.2. Solución de la ecuación característica (184). 21.3. Solución de la ecuación transpuesta a la característica (187). 21.4. Ejemplos (189). 21.5. Ecuaciones singulares completas que se resuelven en forma cerrada (190). 21.6. Ecuación en el eje real. Soluciones que desaparecen en el infinito (196). 21.7. Ecuación en el eje real. Solución en la clase de funciones acotadas en el infinito (198). 21.8. Caso en que $a(\infty) \neq 0$ (199). 21.9. Caso en que $a(\infty) \equiv 0$ (199). 21.10. Ecuación analógica a la característica (201). 21.11. Resolución aproximada (202). 21.12. Comportamiento de la solución en los puntos angulares (203).

§ 22. Regularización de la ecuación completa 205
22.1. Composición de los operadores singulares (205). 22.2. Operador regularizador (208). 22.3. Métodos de regularización (210). 22.4. Relación entre las soluciones de ecuaciones singular y regularizada (212).

§ 23. Propiedades fundamentales de las ecuaciones singulares . . 214
23.1. Algunas propiedades de los operadores transpuestos (214). 23.2. Teoremas fundamentales sobre las ecuaciones integrales singulares (teoremas de Noether) (216). 23.3. Algunos corolarios (220). 23.4. Teoría general de los operadores de Noether (221). 23.5. Ecuaciones integrales singulares con traslación de Carleman (222). 23.6. Ecuaciones integrales singulares con una función incógnita conjugada compleja (227). 23.7. Ecuación bisingular (229).

§ 24. Regularización equivalente. Tercer método de regularización 230
24.1. Planteamiento del problema. Distintas interpretaciones del concepto de regularización equivalente (230). 24.2. Regularización equivalente de un operador (231). 24.3. Regularización equivalente a la izquierda de una ecuación singular. Condición necesaria (232). 24.4. Ecuación conjugada. Otra forma de las condiciones de resolubilidad de la ecuación no homogénea (233).
24.5. Teorema de la regularización equivalente de la ecuación. Resolvente singular. Solución singular (236). 24.6. Regularización mediante la solución de la ecuación característica (método de Carleman—Vekua) (241). 24.7. Ejemplo (245).

§ 25. Casos excepcionales de las ecuaciones integrales singulares . . 250
25.1. Solución de la ecuación característica (250). 25.2. Regularización de la ecuación completa (253). 25.3. Sobre la reducción del caso excepcional de ecuaciones integrales singulares con núcleo de Cauchy a las ecuaciones de tipo normal (255). 25.4. Casos degenerados (259).

§ 26. Notas históricas 266
Problemas al capítulo III 269

CAPÍTULO IV. Problemas de contorno de Hilbert y ecuaciones integrales con núcleo de Hilbert 274

§ 27. Planteamiento del problema de Hilbert y algunas fórmulas auxiliares 274
27.1. Planteamiento del problema de Hilbert (274). 27.2.

Operador de Schwarz para un dominio simplemente conexo (275). 27.3. Determinación de la función analítica, provista de un polo, según los valores de su parte real en el contorno (problema A) (280). 27.4. Problema generalizado A_0 (282).

§ 28. Factor de regularización 285
28.1. Definición del factor de regularización (285). 28.2. Factor de regularización real (286). 28.3. Factor de regularización de módulo constante (288). 28.4. Otras clases del factor de regularización (290).

§ 29. Problema de contorno de Hilbert para el dominio simplemente conexo 291
29.1. Problema homogéneo (291). 29.2. Problema no homogéneo (293). 29.3. Problema para un círculo unitario y un semiplano (294). 29.4. Problema de Hilbert para el dominio exterior (296). 29.5. Ejemplos (299).

§ 30. Conexión de los problemas de contorno de Hilbert y de Riemann 301
30.1. Planteamiento del problema (301). 30.2. Conexión entre las condiciones de contorno (302). 30.3. Sobre el problema de Hilbert para el bicírculo (304).

§ 31. Ecuación integral singular con núcleo de Hilbert 304
31.1. Conexión de la ecuación característica con el problema de contorno de Hilbert (304). 31.2. Solución de la ecuación (306). 31.3. Ecuaciones de coeficientes constantes (309). 31.4. Ecuación completa (309).

§ 32. Problemas de contorno para las funciones poliarmónicas y polianalíticas que se reducen a los problemas de contorno de Hilbert y de Riemann 313
32.1. Representación de las funciones poliarmónicas y polianalíticas en términos de las funciones analíticas (313). 32.2. Planteamiento de los problemas de contorno de Hilbert para las funciones polianalíticas (316). 32.3. Problemas de contorno para el círculo (318). 32.4. Problemas de contorno para los dominios que se aplican sobre un círculo mediante funciones racionales (323). 32.5. Resolución del problema fundamental de la teoría de elasticidad para el dominio limitado por el caracol de Pascal (325). 32.6. Problemas de contorno de Riemann (329).

§ 33. Problema de contorno inverso de las funciones analíticas . . 333
33.1. Planteamiento del problema (333). 33.2. Resolución del problema interior (334). 33.3. Otros métodos de la definición (337). 33.4. Revolución del problema exterior (338). 33.5. Sobre el número de soluciones del problema exterior (340). 33.6. Acerca del problema de Schwarz con la singularidad logarítmica en el contorno (342). 33.7. Puntos singulares del contorno (344). 33.8. Sobre la univalencia de la solución (347). 33.9. Algunos problemas adicionales (350).

§ 34. Notas históricas 352
Problemas al capítulo IV 354

CAPÍTULO V. Diversos problemas de contorno generalizados . . . 358

§ 35. Problema de contorno de tipo del problema de Hilbert con la condición de contorno que contiene derivadas 359
35.1. Planteamiento del problema y diversas formas de la condición de contorno (359). 35.2. Representación de la función analítica mediante una integral de tipo de Cauchy con densi-

dad real (362). 35.3. Integral de tipo de Cauchy cuya densidad es un producto de dada función compleja por cierta función real (365). 35.4. Representación integral de una función analítica cuya m-ésima derivada es representada mediante una integral de tipo de Cauchy (368). 35.5. Reducción del problema de contorno a una ecuación integral de Fredholm (371). 35.6. Cuestiones de resolubilidad del problema de contorno (374). 35.7. Otros métodos de investigación (377).

§ 36. Problema de contorno de tipo del problema de Riemann con una condición de contorno que contiene derivadas 380
36.1. Representación integral para las funciones analíticas a trozos (380). 36.2. Resolución del problema de contorno (383). 36.3. Nuevo método de resolución del problema (386). 36.4. Ecuación diferencial integral singular (389).

§ 37. Problema de contorno de Hilbert para un dominio múltiplemente conexo 390
37.1. Problema de Dirichlet para un dominio múltiplemente conexo (391). 37.2. Operador de Schwarz para un dominio múltiplemente conexo (396). 37.3. Diferentes formas del planteamiento del problema de contorno de Hilbert para un dominio múltiplemente conexo (400). 37.4. Método de factor de regularización en el caso de un dominio múltiplemente conexo (401). 37.5. Sobre la búsqueda del factor de regularización en el caso de un dominio múltiplemente conexo (405). 37.6. Ecuación integral del problema de Hilbert (407). 37.7. Ecuación integral transpuesta y problema de Hilbert transpuesto (408). 37.8. Investigación de las cuestiones de resolubilidad (411). 37.9. Investigación de los casos $\varkappa = 0$ y $\varkappa = m - 1$ (415). 37.10. Conexión con la aplicación sobre un plano dotado de cortes (418). 37.11. Observaciones conclusivas (422). 37.12. Algunos resultados nuevos (423).

§ 38. Problema de contorno inverso para un dominio múltiplemente conexo 424
38.1. Planteamiento del problema (424). 38.2. Resolución del problema interior (425). 38.3. Condiciones de resolubilidad (426).

§ 39. Problema de contorno de tipo del problema de Riemann para un dominio múltiplemente conexo y problemas de contorno con traslación y conjugación 428
39.1. Representación integral (428). 39.2. Problema de contorno y ecuación diferencial integral (431). 39.3. Problema de contorno con conjugación (432). 39.4. Las demás generalizaciones (435).

§ 40. Notas históricas 438
Problemas al capítulo V 439

CAPÍTULO VI. Problemas de contorno y ecuaciones integrales singulares con coeficientes discontinuos y contornos abiertos 444

§ 41. Resolución del problema de Riemann con coeficientes discontinuos por reducción al problema con coeficientes continuos . 445
41.1. Planteamiento del problema y definición de la función por un salto (445). 41.2. Funciones auxiliares fundamentales (447). 41.3. Reducción a un problema con coeficientes continuos. El caso elemental (448). 41.4. Resolución del problema homogéneo (451). 41.5. Resolución del problema no homogéneo (453).

§ 42. Problema de contorno de Riemann para los contornos abiertos 457
42.1. Planteamiento del problema y resolución (457). 42.2. Ejemplo (459). 42.3. Inversión de la integral de tipo de Cauchy (462).
§ 43. Resolución directa del problema de Riemann 465
43.1. Problema para un contorno abierto (465). 43.2. Problema con coeficientes discontinuos (466). 43.3. Ejemplos (467). 43.4. Problema de contorno de Carleman. Continuación (471). 43.5. Observaciones conclusivas (472).
§ 44. Problema de Riemann para un contorno complejo. Casos excepcionales 473
44.1. Planteamiento del problema (473). 44.2. Nuevo método de resolución del problema de Riemann para una curva cerrada (474). 44.3. Caso general (475). 44.4. Caso de coincidencia de los extremos (478). 44.5. Puntos excepcionales en los extremos del contorno (479).
§ 45. Problema de contorno de Hilbert para una función analítica a trozos 481
45.1. Planteamiento del problema (481). 45.2. Búsqueda de la solución (482). 45.3. Investigación de la resolubilidad (484).
§ 46. Problema de contorno de Hilbert con coeficientes discontinuos. 485
46.1. Problema de Hilbert para un semiplano (486). 46.2. Ejemplo (488). 46.3. Problema de contorno mixto de funciones analíticas (491). 46.4. Problema de Dirichlet y sus modificaciones para un plano con aberturas (494).
§ 47. Ecuación característica para los contornos abiertos . . . 500
47.1. Conceptos fundamentales y designaciones (500). 47.2. Resolución de la ecuación característica (501). 47.3. Resolución de la ecuación transpuesta a una característica (507). 47.4. Ejemplos (508). 47.5. Ecuación en el semieje real (509). 47.6. Acerca del método de factorización incompleta (511). 47.7. Ecuación característica en los espacios de Banach (516).
§ 48. Ecuación completa para contornos abiertos y coeficientes discontinuos 517
48.1. Regularización mediante la solución de la ecuación característica (517). 48.2. Investigación de una ecuación regularizada (519). 48.3. Ecuación característica de coeficientes discontinuos en un contorno compuesto (521). 48.4. Regularización de la ecuación singular completa (524). 48.5. Propiedades fundamentales de la ecuación singular (529). 48.6. Teoría de Noether de las ecuaciones singulares con traslación de Carleman en un contorno abierto (530).
§ 49. Problema de contorno de Riemann de índice infinito 530
49.1. Algunos datos de la teoría de funciones (531). 49.2. Problema homogéneo con índice infinito de orden potencial en el caso de una torsión unilateral (533). 49.3. Problema no homogéneo con índice infinito de orden potencial para una torsión unilateral (538). 49.4. Problema con índice infinito de orden logarítmico para una torsión unilateral (539). 49.5. Caso de torsión bilateral (541). 49.6. Problema en un conjunto numerable de contornos (543).
§ 50. Notas históricas 544
Problemas al capítulo VI 546

CAPÍTULO VII. Ecuaciones integrales resolubles en la forma cerrada . 554

§ 51. Ecuaciones con núcleos automorfos de grupo finito 555
51.1. Algunas nociones sobre los grupos finitos de transformaciones lineales fraccionales y las funciones automorfas (556). 51.2. Reducción de una ecuación integral singular completa al problema de contorno (560). 51.3. Resolución del problema de contorno (562). 51.4. Solución de la ecuación integral (565). 51.5. Ejemplo (566). 51.6. Caso en que la función analítica auxiliar no se reduce a cero en el infinito (569). 51.7. Observaciones adicionales (571).

§ 52. Ecuaciones con núcleos automorfos de grupo infinito 572
52.1. Problema de contorno de Riemann (572). 52.2. Ecuación integral singular (575). 52.3. Algunas aplicaciones (576). 52.4. Ecuación integral con función automorfa no básica (582). 52.5. Ejemplo (585).

§ 53. Problemas de contorno en las superficies de Riemann 587
53.1. Algunas nociones sobre las superficies de Riemann (587). 53.2. Problema de contorno de Riemann (590). 53.3. Problema de contorno de Hilbert (591). 53.4. Diversos problemas generalizados (592). 53.5. Principio de pegamiento local conforme (593). 53.6. Simetría respecto de la curva algebraica (594).

§ 54. Ecuaciones integrales con núcleo potencial 595
54.1. Ecuación integral de Abel (596). 54.2. Relación entre la integral singular con núcleo de Cauchy y las integrales con núcleo potencial (597). 54.3. Ecuación de Abel generalizada con coeficientes exteriores (598). 54.4. Ecuación de Abel generalizada con coeficientes interiores (600). 54.5. Caso de coeficientes constantes (601). 54.6. Ecuaciones completas con núcleo potencial (603). 54.7. Ecuaciones con núcleo potencial en una recta infinita (606). 54.8. Algunos otros resultados (607).

§ 55. Ecuaciones integrales con núcleo logarítmico 608
55.1. Ecuación característica con núcleo logarítmico (608). 55.2. Ecuación con una singularidad logarítmica en el segundo miembro (612). 55.3. Ecuación de Carleman generalizada (613). 55.4. Algunos otros tipos de ecuaciones integrales con núcleo logarítmico (616).

§ 56. Notas históricas 619
Problemas al capítulo VII 621
Apéndice I. Indice como invariante homotópico 629
Apéndice II. Operador con núcleo logarítmico polar 631
Apéndice III. Aplicación de los problemas de contorno en la teoría de aproximación de funciones 634
Apéndice IV. Aplicación del problema de contorno de Riemann en la teoría de las colas 641
Literatura 649
Indice alfabético 673

PREFACIO

Al presente libro le sirve de base el curso de conferencias dictadas por el autor a partir de 1947 ante los estudiantes de varias universidades de la URSS. Esta circunstancia no pudo sino dejar huellas en el carácter de la presentación del material. Enfrentando siempre un auditorio vivo cuya asimilación pudo observarse en las conferencias y, a continuación, durante los exámenes, el autor prestaba, naturalmente, gran atención a las cuestiones de claridad y accesibilidad de la exposición. En esto el estilo del libro se diferencia del estilo corrientemente empleado en la literatura monográfica. Muy a menudo se da aquí preferencia a las cuestiones de accesibilidad de lo expuesto sobre las de rigurosidad, generalidad y sucesión irreprochable. En varios casos la exposición comienza no con el planteamiento general del problema sino con la consideración de un caso más simple. Aparte de los razonamientos de conveniencia pedagógica se tuvo en cuenta que podía haber un círculo de lectores cuyas necesidades prácticas no iban fuera de los límites del caso más simple.

Como regla, a la explicación detallada de cualquier problema proceden breves observaciones de carácter sugestivo. Para los casos más importantes se dan párrafos de clausura. Tal metodología lleva a veces a repiticiones que posiblemente pudieran ser evitadas con otro modo de exponer la materia. No obstante, es dudoso que en el último caso no tendríamos pérdidas en la accesibilidad. Deseando aclarar nuestro punto de vista respecto al problema en consideración indiquemos aquí una declaración perteneciente al eminente matemático y gran pedagogo F. Klein[1]), la cual se reduce a lo siguiente: «Siempre hay gente que, asemejándose a los escolásticos medievales, empieza la enseñanza con las ideas más generales defen-

[1]) Klein F., Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Erster band. Berlin. Verlag von Julius Springer, 1924.

diendo este método como si fuera únicamente científico. Entre tanto esta sugerencia tampoco es cierta, pues, enseñar científicamente significa instruir a un ser humano a pensar científicamente y no aturdirlo desde el mismo principio con una sistematización fría aunque tuviera ésta el aspecto científico». En este sentido el autor se esforzó evitar en lo posible toda clase de simbolismo especial sustituyéndolo con locuciones descriptivas. Todo el simbolismo especial reduce las formulaciones y representa grandes comodidades para aquellos que lo han asimilado, es decir, para la gente que siempre está en contacto con las cuestiones de género semejante. Sin embargo, el simbolismo resulta ser un obstáculo, bastante serio con frecuencia, para un gran círculo de lectores que, sin ser especialistas en un dominio dado, sienten deseos de familiarizarse con dicho dominio.

Las teorías que se exponen en el libro se han desarrollado impetuosamente durante las últimas 3-4 décadas. Han surgido ciertos apartados desconocidos anteriormente o, si conocían, se componían de investigaciones incidentales no relacionadas entre sí. Estos últimos no sólo se completaron con nuevos resultados importantes obtenidos, sino que adquirieron en grado considerable un aspecto bien armonioso, próximo a ser finalizado. Han aparecido disciplinas nuevas, importantes en principio, que poseen la perspectiva del desarrollo ulterior, a saber, problemas en las superficies de Riemann, problemas de índice infinito, problemas para las funciones de varias variables, etc.

Se han enriquecido los lazos con los conocimientos prácticos. Además de las aplicaciones ya tradicionales a la mecánica del medio sólido o a ciertos apartados de la física matemática (la electrodinámica, la teoría de correlaciones de varianza, etc.) se han establecido relaciones con nuevas disciplinas aplicadas: la teoría de las colas, la de los juegos y algunos problemas de la economía matemática.

Se hizo más complicado el aparato matemático empleado. Son de amplio uso las teorías de funciones algebraicas y automorfas, de las superficies de Riemann, de las funciones enteras y meromorfas, del análisis funcional, de la topología y otras. Además, ha surgido la interacción inversa: la teoría de problemas de contorno de las funciones analíticas se utiliza fructuosamente en la resolución de problemas de otras disciplinas matemáticas. A título de ejemplo sirven las obras de Yu. A. Kazmín, expuestas brevemente en el anexo III, concernientes a la teoría de aproximaciones de las funciones.

En relación con lo dicho, el curso de conferencias dictadas también fue objeto de serias modificaciones.

En 1977 apareció en la URSS la tercera edición del presente libro que abarca la mayoría de las teorías recién surgidas. La traducción de esta edición se presenta a los lectores de habla española.

El autor abriga la esperanza de que el libro llame la atención de nuevos grupos de lectores e introduzca una corriente más viva

en la teoría que hoy día goza de gran popularidad entre los lectores soviéticos.

He aquí algunas peculiaridades de la terminología empleada.

En lo que se refiere a las funciones analíticas en el libro nunca se utilizan los términos «holomorfismo», «regularidad» sino sólo el término «analicidad».

Se toma de base la analicidad en un punto, es decir, la capacidad, propia a una función, de ser desarrollada en el entorno de un punto en la serie de potencias. Por función analítica en un dominio se entiende una función analítica en todo punto de dicho dominio. Ella puede obtenerse por la prolongación analítica de alguno de sus elementos.

Si se trata de un dominio múltiplemente conexo, la función puede resultar multiforme. La uniformidad se considera como una condición adicional. Si una función analítica admite ciertas singularidades, esta circunstancia cada vez se especifica especialmente y se indica con exactitud cuáles son las singularidades que se admiten.

El autor

CAPITULO I

INTEGRAL DE TIPO DE CAUCHY

Del curso de ecuaciones de la física matemática sabemos bien que los fundamentales problemas de contorno para la ecuación de Laplace —problemas de Dirichlet y de Neumann— se resuelven con la ayuda de así llamados potenciales de capa simple y de capa doble.

Al resolver los problemas de contorno, concernientes a otras ecuaciones diferenciales, se emplea toda una serie de potenciales generalizados. En la resolución de los problemas de contorno de la teoría de funciones analíticas de la variable compleja la integral de tipo de Cauchy y sus diferentes generalizaciones sirven de aparato análogo.

Antes de proceder a la resolución inmediata de los problemas de contorno se deben estudiar previamente las propiedades del aparato matemático que se utiliza para resolverlos.

El presente capítulo es de carácter auxiliar. El material expuesto en él será usado de manera paulatina; por esto, con el fin de pasar más rápido al material básico del libro, recomendamos que el lector estudie este capítulo por partes. Al principio es menester asimilar el contenido de los primeros cinco párrafos, después de lo cual se puede comenzar a estudiar el capítulo II, dedicado al problema de contorno de Riemann. Antes de abordar el capítulo III, en el cual se expone la teoría de las ecuaciones integrales singulares, se debe dominar el párrafo 7 sobre la inversión del orden de integración en las integrales singulares reiteradas. Para poder comprender el capítulo IV, se requerirá el conocimiento del párrafo 6, y para el capítulo V, el párrafo 10. El estudio de los restantes párrafos de este capítulo resulta conveniente sólo después de acabar con lo dicho más arriba.

§ 1. Definición de la integral de tipo de Cauchy y los ejemplos

Sea L un contorno cerrado suave[1]) en el plano de la variable compleja z. Un dominio dispuesto dentro del contorno L, lo llamaremos interior y designaremos D^+, y un dominio complementario a $D^+ + L$, en el que está contenido el punto infinitamente alejado, lo llamaremos dominio exterior y denotaremos con D^-.

Si $f(z)$ es una función, analítica en D^+ y continua en $D^+ + L$, entonces, de acuerdo con la fórmula de Cauchy de la teoría de funciones de la variable compleja, tenemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z}\,d\tau = \begin{cases} f(z), & z \in D^+, \\ 0, & z \in D^-. \end{cases} \tag{1.1}$$

Si, en cambio, $f(z)$ es analítica en el dominio D^- y continua en $D^- + L$, se tiene

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z}\,d\tau = \begin{cases} f(\infty), & z \in D^+, \\ -f(z) + f(\infty), & z \in D^-. \end{cases} \tag{1.2}$$

Por sentido positivo del recorrido a lo largo del contorno L aceptamos, como siempre, aquel sentido, para el cual el dominio D^+ queda a la izquierda.

La fórmula de Cauchy presta la oportunidad de calcular los valores de la función en cualquier punto del dominio, siempre que se conocen sus valores en la frontera de éste; en la forma abreviada esta circunstancia se expresa con las palabras: la fórmula de Cauchy resuelve el problema de contorno para funciones analíticas. La integral en el primer miembro de las fórmulas (1.1) y (1.2) se denomina *integral de Cauchy*.

Ahora, sea L un contorno suave, cerrado o abierto, dispuesto íntegramente en la parte finita del plano; τ es una coordenada compleja de sus puntos y $\varphi(\tau)$, una función continua de los puntos del contorno. En este caso, la integral

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau, \tag{1.3}$$

construida de modo igual que la integral de Cauchy, se llama *integral de tipo de Cauchy*. La función $\varphi(\tau)$ lleva el nombre de *densidad* de la integral, y $\frac{1}{\tau - z}$ es su *núcleo*;

---

[1]) Por *contorno suave* comprendemos, aquí y en lo sucesivo, una línea simple (es decir, sin puntos múltiples) cerrada o abierta, cuya tangente cambia continuamente; además, esta línea no tiene puntos de retroceso.

Es fácil ver que la integral de tipo de Cauchy representa una función analítica en todo el plano de la variable compleja, a excepción de los puntos del propio contorno L. La demostración del hecho de que $\Phi(z)$ es analítica consiste en establecer la posibilidad de derivarla respecto a la variable z (parámetro) bajo el signo de la integral. Esta demostración se ofrece en todos los manuales de la teoría de funciones de la variable compleja.

Realicemos un razonamiento análogo para el caso algo más general que encontraremos en lo ulterior. El hecho de que la integral de tipo de Cauchy es analítica se deducirá de este razonamiento como un caso particular.

TEOREMA. *Sea L un contorno suave (cerrado o abierto), y sea $f(\tau, z)$ una función, continua respecto de la variable $\tau \in L$, analítica con relación a z en cierto dominio D para todos los valores de $\tau \in L$ y acotada mediante una constante M para todo $\tau \in L$ y todo $z \in D$. Entonces, una función representada por la integral curvilínea*

$$F(z) = \int_L f(\tau, z)\, d\tau, \tag{1.4}$$

es la función analítica de la variable z.

DEMOSTRACIÓN. [1]) Elijamos un círculo de radio R con centro en el punto z, limitado por la circunferencia C dispuesta enteramente en D. Representando la función $f(\tau, z)$, analítica respecto a z, por la integral de Cauchy, la expresión (1.4) puede escribirse en la forma

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L d\tau \int_C \frac{f(\tau, t)}{t - z}\, dt.$$

Haciendo uso de la identidad

$$\frac{1}{\Delta z}\left[\frac{1}{t - z - \Delta z} - \frac{1}{t - z}\right] - \frac{1}{(t - z)^2} = \frac{\Delta z}{(t - z)^2 (t - z - \Delta z)},$$

obtenemos la igualdad

$$J = \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \int_L d\tau \int_C \frac{f(\tau, t)\, dt}{(t - z)^2} =$$

$$= \frac{\Delta z}{2\pi i} \int_L d\tau \int_C \frac{f(\tau, t)\, dt}{(t - z)^2 (t - z - \Delta z)}.$$

Sea l la longitud de la curva L. La acotación se encuentra con facilidad

$$|J| = \frac{|\Delta z|}{2\pi} \frac{M}{R^2 (R - |\Delta z|)} 2\pi R l.$$

[1]) Goursat Edouard, Cours D'analyse Mathématique tome II. Paris. Gauthier-Villars. 1936 (punto 352).

Para $|\Delta z|$ suficientemente pequeño, la magnitud $|J|$ se puede hacer menor que cualquier número prefijado $\varepsilon > 0$. Por consiguiente, la función $F(z)$ admite una derivada igual a

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L d\tau \int_C \frac{f(\tau, t)}{(t-z)^2}\, dt. \tag{1.5}$$

Por otra parte, recurriendo otra vez a la fórmula de Cauchy y derivándola, tendremos

$$\frac{\partial f(\tau, z)}{\partial z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\tau, t)\, dt}{(t-z)^2}.$$

De aquí y de (1.5) se desprende

$$F'(z) = \int_L \frac{\partial f(\tau, z)}{\partial z}\, d\tau.$$

De este modo, $F(z)$ es una función analítica respecto a z en todos los puntos del dominio donde $f(\tau, z)$ es analítica. Aquellos valores de z, para los cuales la función $f(\tau, z)$ deja de ser analítica, serán puntos singulares de la función $F(z)$.

Para la integral de tipo de Cauchy con una densidad continua $\varphi(\tau)$, los únicos puntos, donde el integrando deja de ser analítico respecto de z, son los puntos de la línea de integración L. La última es una línea singular para la función $\Phi(z)$ (1.3). Las cuestiones de importancia sobre el comportamiento de la integral de tipo de Cauchy al aproximarse z al contorno L, como también en el propio contorno, serán expuestas más abajo, en los §§ 4 y 5.

Si L es un contorno abierto, $\Phi(z)$ será la función analítica en todo el plano incluida la línea de integración L. Ahora, sea L un contorno cerrado. En este caso $\Phi(z)$ se descompone en dos funciones independientes: $\Phi^+(z)$, definida en el dominio D^+, y $\Phi^-(z)$, definida para los puntos del dominio D^-. Cada una de estas funciones, en general, no es prolongación analítica una de la otra.

La función analítica $\Phi(z)$, definida en dos dominios D^+, D^-, que completan uno al otro hasta un plano entero, mediante dos expresiones independientes $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$, en lo sucesivo se denominará con frecuencia *función analítica a trozos.*

Ha de notarse una propiedad muy importante de la integral de tipo de Cauchy. *Una función* $\Phi(z)$, *representada por la integral de tipo de Cauchy* (1.3), *en el punto infinitamente alejado se reduce a cero.*

Efectivamente, en el entorno del punto infinitamente alejado desarrollemos $\Phi(z)$ en serie de potencias de $\frac{1}{z}$. Puesto que

$$\frac{1}{\tau - z} = -\frac{1}{z} - \frac{\tau}{z^2} - \ldots - \frac{\tau^{n-1}}{z^n} - \ldots,$$

entonces, multiplicando por $\frac{\varphi(\tau)}{2\pi i}$ e integrando término a término, obtendremos

$$\Phi^-(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{z^k},$$

donde

$$c_k = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \tau^{k-1} \varphi(\tau)\, d\tau.$$

En el desarrollo está ausente la potencia nula, de lo que se deduce que la función representada por la integral de tipo de Cauchy satisface necesariamente a la condición

$$\Phi^-(\infty) = 0. \tag{1.6}$$

Más adelante (los pp. 4.2 y 4.6) señalemos que, siendo observadas ciertas restricciones funcionales adicionales, esta condición es también suficiente para que una función analítica a trozos puede ser representada por la integral de tipo de Cauchy.

EJEMPLO. Calcúlese la integral de tipo de Cauchy a lo largo de la circunferencia unitaria $|z| = 1$, cuya densidad $\varphi(\tau)$ es igual a $\frac{2}{\tau(\tau-2)}$, es decir,

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{\tau-2} \frac{d\tau}{\tau-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{\tau-z}.$$

La función $\frac{1}{z-2}$ es analítica en D^+, mientras que $\frac{1}{z}$ es analítica en D^- y se reduce a cero en el infinito. La primera integral, según la fórmula (1.1) es igual a $\frac{1}{z-2}$ para $z \in D^+$, y es nula para $z \in D^-$. La segunda integral, de acuerdo con la fórmula (1.2), es igual a $-\frac{1}{z}$ para $z \in D^-$, y es nula, cuando $z \in D^+$. De aquí

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{z-2}, \qquad \Phi^-(z) = \frac{1}{z}.$$

§ 2. Funciones que satisfacen la condición de Hölder

2.1. Definición y propiedades. Antes de proceder al problema fundamental —al estudio del comportamiento de la integral de tipo de Cauchy en la propia línea de integración— examinemos una cuestión auxiliar sobre las clases de funciones.

Sea $\varphi(t)$ una función tal que el argumento t y la función $\varphi(t)$ pueden ser tanto reales como complejos. La continuidad de una función consiste, como se sabe, en lo que $|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)|$ puede hacerse

tan pequeño como se quiera, cuando $| t_2 - t_1 |$ es suficientemente pequeño, es decir, los incrementos del argumento y de la función tienden a cero simultáneamente.

La cuestión acerca del orden de pequeñez del incremento de la función con relación al del argumento en este caso no se toma en consideración; este orden puede ser cualquiera. No obstante, muchas propiedades de la función, como por ejemplo, su desarrollo en toda clase de series y la rapidez de convergencia de estas series, la representación por medio de unas integrales, etc., están estrechamente ligadas con el orden de pequeñez del módulo de continuidad[1]) de la función. Resulta conveniente, por eso, dividir en clases el amplio conjunto de funciones continuas, en dependencia del orden de pequeñez del módulo de continuidad.

Es de mayor impotancia una clase de las funciones, para las cuales el módulo de continuidad es una función potencial del incremento del argumento. Pasemos a la consideración de esta clase más interesante.

Sea L una curva suave y sea $\varphi(t)$ una función de los puntos de dicha curva. Suele decirse que la *función* $\varphi(t)$ *satisface en la curva la condición de Hölder* (*condición H*), *si para dos puntos cualesquiera de esta curva se verifica*

$$| \varphi(t_2) - \varphi(t_1) | < A | t_2 - t_1 |^{\lambda}, \qquad (2.1)$$

donde A y λ son unos números positivos. A se denomina *constante de Hölder*, λ *es el exponente de Hölder*. Si λ fuera mayor que la unidad, de la condición (2.1) se deduciría que la derivada $\varphi'(t)$ es siempre nula, y la función $\varphi(t)$ sería idénticamente igual a una constante. Por ello, convengamos en considerar que

$$0 < \lambda \leqslant 1.$$

Si es que $\lambda = 1$, la condición de Hölder coincide con la *condición* conocida *de Lipschitz*. (Observemos que en muchos manuales la condición de Hölder se denomina condición de Lipschitz de orden λ).

Si t_1 y t_2 son suficientemente próximos uno al otro y la condición de Hölder se cumple para cierto exponente λ_1, también, obviamente, se cumplirá para todo exponente $\lambda < \lambda_1$. Lo recíproco, en el caso general, no es justo. Así pues, a un λ menor le corresponde una clase de funciones más amplia. La clase de funciones más estrecha será aquella en la que las funciones satisfacen la condición de Lipschitz.

Rigiéndonos por la última propiedad, podemos fácilmente establecer que si las funciones $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ satisfacen la condición de Hölder con los exponentes respectivos λ_1, λ_2, entonces, su suma, producto y también el cociente (a condición de que el denominador

---

[1]) Se llama *módulo de continuidad* de la función $\varphi(t)$ a una función $\omega(\delta) = \sup | \varphi(t_2) - \varphi(t_1) |$, donde los puntos t_1 y t_2 pertenecen a L y $| t_2 - t_1 | < \delta$.

no se reduzca a cero) satisfacen la condición de Hölder con el exponente $\lambda = \text{mín}\ (\lambda_1, \lambda_2)$.

Si $\varphi\ (t)$ es derivable y tiene una derivada finita, ella satisface la condición de Lipschitz. Esto se infiere del teorema sobre un incremento finito. Lo recíproco, en el caso general, no es justo, lo que muestra siquiera el siguiente ejemplo de una función definida en el eje real:

$$\varphi\ (x) = |\ x\ |.$$

La función $\varphi\ (x)$ satisface la condición de Lipschitz, mas en el origen de coordenadas no tiene derivada, puesto que las derivadas derecha e izquierda son, respectivamente, $+1$ y -1.

Para una función compuesta, cuando tiene lugar la superposición de dependencias funcionales con diferentes exponentes de Hölder, la función resultante satisfará la condición de Hölder con el exponente igual al producto de exponentes de Hölder de todos los eslabones de la cadena. Nos enfrentaremos frecuentemente con las funciones analíticas de otras funciones, que satisfacen la condición de Hölder. Las funciones de esta índole satisfacen la condición de Hölder con el mismo exponente. La demostración se obtiene por una comprobación inmediata, tomando en consideración el hecho de que la función analítica satisface la condición de Lipschitz. Si en cierto punto la función se reduce al infinito de orden α, su integral definida satisface en esta punto la condición de Hölder con el exponente $1 - \alpha$. La demostración se infiere de la acotación inmediata de la integral. Indiquemos en adición que si una función periódica satisface la condición de Hölder, esto será la condición suficiente para que la función pueda ser desarrollada en una serie de Fourier uniformemente convergente.

He aquí dos ejemplos.

1. La función $\varphi\ (x) = \sqrt{x}$ satisface la condición H con el exponente $\lambda = 1/2$ en cualquier intervalo del eje real; si el intervalo no contiene el origen de coordenadas, esta función es analítica en él y, por lo tanto, satisface la condición de Lipschitz.

2. Supóngase que la función $\varphi\ (x) = \dfrac{1}{\ln x}$ para $0 < x \leqslant \dfrac{1}{2}$, y $\varphi\ (0) = 0$. Es fácil ver que esta función es continua en todo el intervalo cerrado (segmento) $0 \leqslant x \leqslant 1/2$. Pero, como $\lim\limits_{x \to 0} x^{\lambda} \ln x = 0$ para todo $\lambda > 0$, entonces, cualesquiera que sean A y λ, se puede indicar tal valor de x que $|\ \varphi\ (x) - \varphi\ (0)\ | = \left| \dfrac{1}{\ln x} \right| > Ax^{\lambda}$. Por consiguiente, en el segmento considerado la función $\varphi\ (x)$ no satisface la condición de Hölder.

En lo sucesivo habremos de considerar los casos en que la condición de Hölder se cumple en todo punto del contorno, a excepción de unos puntos prefijados. Esta circunstancia la entenderemos en el

sentido de que la condición de Hölder se cumple en cualquier parte cerrada del contorno que no abarca los puntos mencionados. En el mismo sentido se entiende el cumplimiento de esta condición en el contorno abierto, si de puntos excepcionales sirven los extremos del último. En el segundo de los ejemplos citados la función $\varphi(x)$ satisface la condición de Hölder en el intervalo semiabierto $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$, y no la satisface en el segmento $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$.

2.2. Funciones de varias variables. El concepto de condición de Hölder puede ser extendido a las funciones de cualquier número de variables. Para concretar, consideraremos el caso de una función de dos variables. Se dice que la *función* $\varphi(t, \tau)$ *satisface la condición de Hölder, si para cualesquiera pares de valores* t_1, t_2; τ_1, τ_2, *pertenecientes a los conjuntos dados*, se verifica

$$|\varphi(t_2, \tau_2) - \varphi(t_1, \tau_1)| < A\,|t_2 - t_1|^{\mu} + B\,|\tau_2 - \tau_1|^{\nu},$$

donde A, B, μ, ν son todas *constantes positivas*; $\mu \leqslant 1$, $\nu \leqslant 1$.

Si λ es el menor de los números μ, ν, puede encontrarse una constante C tal que se verifique la desigualdad

$$|\varphi(t_2, \tau_2) - \varphi(t_1, \tau_1)| < C\,[\,|t_2 - t_1|^{\lambda} + |\tau_2 - \tau_1|^{\lambda}].$$

Es evidente que si $\varphi(t, \tau)$ satisface la condición de Hölder en la totalidad de las variables t, τ, entonces ella satisface la condición de Hölder según la variable t uniformemente respecto de τ y según τ uniformemente respecto de t.

§ 3. Valor principal de la integral de tipo de Cauchy

3.1. Integral impropia. Examinemos la integral definida de una función real. Como límite de una suma, por definición original, ella tiene sentido sólo para las funciones acotadas. Si el integrando se reduce al infinito en cierto punto c del segmento de integración $a \leqslant c \leqslant b$, entonces a la integral de tal función se la asigna el sentido por medio del segundo paso al límite. A saber, se recorta el entorno del punto c, se efectúa la integración en la parte restante y después se pasa al límite, cuando la longitud del intervalo recortado tiende a cero. Sea c un punto interior del intervalo. El límite

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \left[\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx \right],$$

si existe, se denomina *integral impropia* de la función no acotada $f(x)$ en el intervalo (a, b).

El carácter esencial de esta definición se expresa en lo que el entorno recortado se escoge de una manera plenamente arbitraria,

observándose sólo la condición de que sus dimensiones tienden a cero. Por consiguiente, ε_1 y ε_2 tienden a cero según una ley cualquiera, independientemente uno del otro.

En el curso del análisis matemático se demuestra que la integral impropia existe, siempre que el orden del infinito de $f(x)$ es inferior a la unidad, es decir,

$$|f(x)| < \frac{M}{|x-c|^{\alpha}} \quad (\alpha < 1).$$

Si $f(x)$ se reduce al infinito de primer orden o de orden superior, la integral impropia no existe o, como suele decirse, *diverge*.

3.2. Valor principal de la integral singular. Examinemos una integral

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c} \quad (a < c < b).$$

Calculándola como la integral impropia, obtenemos

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c} = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \left[\int_a^{c-\varepsilon_1} \frac{dx}{c-x} + \int_{c+\varepsilon_2}^b \frac{dx}{x-c} \right] =$$

$$= \ln \frac{b-c}{c-a} + \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (3.1)$$

El límite de la última expresión depende, evidentemente, de cómo ε_1 y ε_2 tienden a cero. Por consiguiente, la integral entendida como impropia no existe. La llaman *integral singular*. No obstante, se le puede asignar cierto sentido, al establecer una interdependencia entre ε_1 y ε_2. Suponiendo que el intervalo recortado se dispone simétricamente con relación al punto c, es decir,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon, \quad (3.2)$$

llegamos al concepto de valor principal de la integral singular según Cauchy.

DEFINICIÓN. El *valor principal según Cauchy* de una integral singular

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c} \quad (a < c < b)$$

se denomina el

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-c} \right].$$

Teniendo en cuenta la fórmula (3.1) y la condición (3.2), tendremos

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c} = \ln \frac{b-c}{c-a}. \tag{3.3}$$

Consideraremos, ahora, una integral más general

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c}\,dx,$$

donde $\varphi(x)$ es una función que en el intervalo (a, b) satisface la condición de Hölder. Esta integral, al igual que la considerada más arriba, la entenderemos en el sentido del valor principal, el cual se determinará de modo siguiente:

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)\,dx}{x-c} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} \frac{\varphi(x)\,dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{\varphi(x)\,dx}{x-c} \right).$$

Al escribir la identidad

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)\,dx}{x-c} = \int_a^b \frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c}\,dx + \varphi(c) \int_a^b \frac{dx}{x-c},$$

advertimos que la primera integral en el miembro derecho converge por ser impropia, puesto que, en virtud de la condición de Hölder,

$$\left| \frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c} \right| < \frac{A}{|x-c|^{1-\lambda}},$$

mientras que la segunda integral coincide con la (3.3).

De este modo obtenemos: una *integral singular* $\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c}\,dx$, *donde* $\varphi(x)$ *satisface la condición de Hölder, existe en el sentido del valor principal según Cauchy y es igual a*

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c}\,dx = \int_a^b \frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c}\,dx + \varphi(c) \ln \frac{b-c}{c-a}.$$

Para denotar la integral singular algunos autores emplean símbolos especiales, por ejemplo $\int'$ ó v. p. $\int$ (valeur principale). Sin embargo, para ello no hay necesidad alguna, dado que, por una parte, si la integral $\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c}\,dx$ existe como ordinaria o como impropia,

existe también en el sentido del valor principal, con la particularidad de que sus valores son coincidentes, y, por otra parte, una integral singular la entenderemos siempre en el sentido del valor principal. Es por eso que una integral singular la designaremos con el signo habitual de integral.

Hemos de notar que el concepto de valor principal es aplicable, en ciertos casos, también para las singularidades del integrando de orden superior al primero (véanse los problemas 2, 3 al final del capítulo).

3.3. Sobre las funciones multiformes (multívocas). En lo sucesivo nos enfrentaremos a menudo con dos funciones analíticas multiformes elementales: la potencial y la logarítmica. El empleo de estas funciones representa unas dificultades considerables para los estudiantes primerizos y a él se le dedica una atención insuficiente en los cursos difundidos de la teoría de funciones, por lo cual resulta conveniente exponer aquí lo principal que necesitaremos más adelante.

Al prefijarse un número complejo $z = \rho e^{i\theta}$, el módulo ρ se define unívocamente, mientras que el argumento θ, salvo un sumando múltiplo de 2π. La última circunstancia no conduce a la multiformidad de la representación del número, puesto que el argumento figura en dicha representación siendo introducido por medio de la función $e^{i\theta}$, cuyo período es 2π. Pero, si la función analítica es tal que el argumento (ángulo) se introduce en su expresión por medio de una función no periódica, la primera resultará ser multiforme. De las funciones elementales a este género de funciones pertenecen la función logarítmica y la potencial de exponente no entero. Consideremoslas paralelamente:

$$\ln(z - z_0) = \ln|z - z_0| + i \arg(z - z_0) = \ln\rho + i\Theta,$$

$$(z - z_0)^{\gamma} = \rho^{\gamma} e^{i\gamma\theta} =$$

$$= \rho^{\alpha}[\cos(\beta \ln\rho) + i \operatorname{sen}(\beta \ln\rho)]\, e^{i\gamma\theta} e^{i2\pi k\gamma} \quad (\gamma = \alpha + i\beta). \quad (3.4)$$

En todos los razonamientos, por logaritmo del módulo de un número complejo siempre se entiende su valor real, de acuerdo con la definición habitual aceptada en el curso del análisis matemático. La representación general del argumento Θ tiene la forma

$$\Theta = \theta + 2k\pi,$$

donde k puede tomar cualesquiera valores enteros ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) y θ es el valor mínimo del argumento en magnitud absoluta (fig. 1).

A cada valor elegido de k le corresponderá una cierta rama de la función multiforme. La función logarítmica tiene el número infinito de ramas; la función potencial lo tiene también siempre que el exponente es irracional o complejo. Si el exponente es racional,

$\gamma = \frac{p}{q}$, la función potencial tendrá q ramas. Las ramas logarítmicas difieren una de la otra en un sumando de tipo $2m\pi i$, mientras que las ramas de la función potencial se diferencian en el factor $e^{2m\gamma\pi i}$ (m es un número entero). Para prefijar una función multiforme, es necesario, evidentemente, indicar la rama elegida. No obstante, a diferencia de las funciones de variable real, lo último resulta insuficiente para la definición completa de una función multiforme de variable compleja. Para las últimas existe en el plano unos puntos que poseen la propiedad siguiente: cuando la variable compleja, cambiando a lo largo del contorno cerrado que rodea el punto dado, vuelve al valor de partida, la rama elegida de la función no queda inalterable, sino que pasa a cierta otra rama. Los puntos de este género se denominan *puntos de ramificación* de una función multiforme. Para las funciones en consideración los puntos de ramificación serán z_0 y un punto del infinito. Si la variable compleja recorre el contorno, que rodea el punto z_0, (en la fig. 1 está punteado), en el sentido positivo (negativo), entonces el argumento Θ varía en 2π (en -2π).

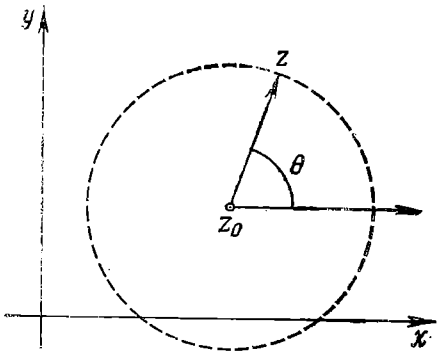


Fig. 1

En este caso el logaritmo recibe un sumando $2\pi i$ ($-2\pi i$), y la función potencial, un factor $e^{2\gamma\pi i}$ ($e^{-2\gamma\pi i}$). Por consiguiente, la rama, correspondiente al valor elegido $k = n$, pasa en la rama vecina que corresponde al valor $k = n + 1$ ($k = n - 1$). La investigación en el punto infinitamente alejado se efectúa, como siempre, mediante la sustitución $z = \frac{1}{\zeta}$ y la investigación posterior en el punto $\zeta = 0$.

Conservar la rama elegida de la función se logra sólo en el caso en que se hacen imposibles los recorridos alrededor de los puntos de ramificación. Lo último se consigue trazando en el plano los cortes que unen los puntos de ramificación. En los casos considerados de las funciones logarítmica y potencial el corte debe trazarse a lo largo de cierta línea que parte del punto z_0 y se aleja hacia el infinito. Para el objetivo indicado —para la fijación de la rama elejida— no tiene importancia la forma del corte. Sin embargo, si, además, debemos tomar en consideración algunas otras circunstancias, la forma del corte, a veces, resulta ser prefijada de antemano. Siempre que no haya otras consideraciones especiales, el corte se elige el

más sencillo, a saber, rectilíneo (se prefiere que sea paralelo al eje Ox o radial). Una función multiforme puede considerarse plenamente definida, si está elegida su rama y está dado el corte.

Las fronteras de variación del argumento Θ se determinan por la posición del corte. Si, por ejemplo, el corte pasa por un rayo que forma con el eje Ox un ángulo θ_0, entonces para la rama principal[1]) ($k = 0$) se verifica $\theta_0 \leqslant \Theta \leqslant \theta_0 + 2\pi$. En particular, para el corte, orientado por el semieje positivo Ox, tenemos $0 \leqslant \Theta \leqslant 2\pi$; por el semieje negativo, $-\pi \leqslant \Theta \leqslant \pi$. Si el corte es culvilíneo, las fronteras de variación del argumento serán funciones de un punto. El valor inicial del argumento corresponde al margen izquierdo del corte (mitando desde el punto z_0); el valor final, al margen derecho. Los valores del argumento en los márgenes izquierdo y derecho del corte los designemos, respectivamente, con Θ^+ y Θ^-. Entonces,

$$\Theta^- - \Theta^+ = 2\pi.$$

El corte para la rama elegida será una línea de discontinuidad. En los márgenes del corte se realizan las siguientes correlaciones (fig. 2).

$$\ln(z^- - z_0) = \ln(z^+ - z_0) + 2\pi i, \quad (z^- - z_0)^\nu = e^{i2\pi\nu}(z^+ - z_0)^\nu.$$

La propiedad de discontinuidad de las ramas de funciones multiformes en los márgenes del corte es de amplio uso en la resolución de los problemas de contorno con condiciones de frontera discontinuas. El logaritmo se emplea cuando una función discontinua figura en la condición de contorno a título de un sumando; la función potencial, a título de un factor (véase los pp. 41.2, 41.3).

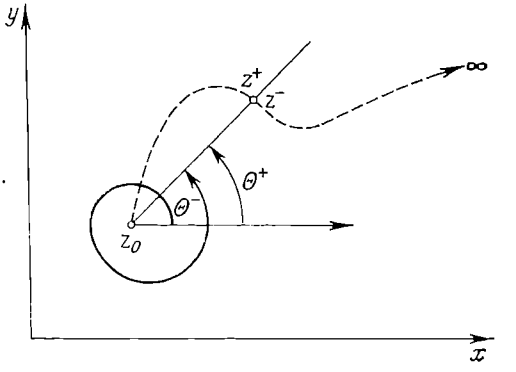


Fig. 2

De este modo, toda rama de una función multiforme en el plano cortado de una manera correspondiente será uniforme y discontinua. La continuidad puede ser mantenida sólo en el caso en que el argumento de la función multiforme se considera variable en el plano de muchas hojas, esto es, en la superficie de Riemann cuyo número de hojas es igual al número de ramas de la función multiforme y cuyas

[1]) Si, por hipótesis, los márgenes del corte se excluyen del plano, los signos de igualdad se desechan.

hojas se juntan en los márgenes de los cortes de una manera tal, que el paso de una hoja a la otra corresponda rigurosamente al cambio de ramas al recorrer los puntos de ramificación. Consideraremos esta cuestión también en el p. 53.1.

3.4. Valor principal de la integral curvilínea singular. Sea L un contorno suave, y sean τ, t las coordenadas complejas de sus puntos. Examinemos una integral curvilínea singular

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau.$$

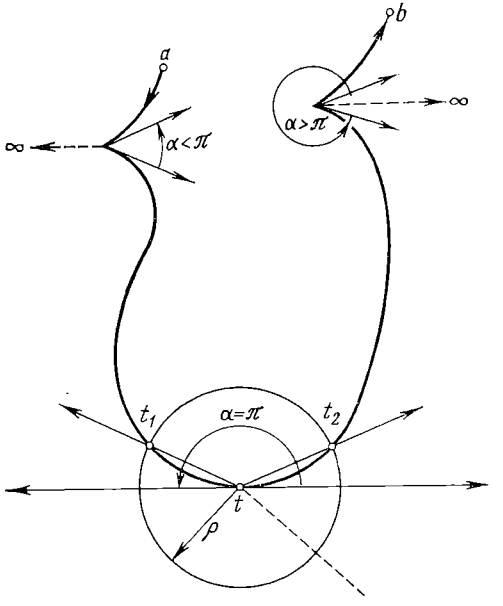


Fig. 3

Si σ, s son las longitudes de los arcos medidos a partir del punto inicial de integración hasta los puntos τ, t, y si $\tau = \tau(\sigma)$ es la ecuación del contorno en forma compleja, entonces, sustituyendo en la integral $\tau = \tau(\sigma)$, $t = t(s)$, $d\tau = \tau'(\sigma)\, d\sigma$, la llevaríamos a las dos integrales singulares reales, como lo haremos en el § 10. Después de esto se podría hacer uso completo de los resultados del p. 3.2 sin recurrir a las nuevas consideraciones. No obstante, como en lo sucesivo deberemos siempre resolver problemas directamente en variables complejas, sin pasar a las variables reales, parece conveniente investigar aparte la integral singular como una función de la variable compleja.

Tomando por centro el punto t del contorno, tracemos una circunferencia de radio ρ, y sean t_1, t_2 los puntos de intersección de esta circunferencia con la curva (fig. 3). Consideremos que el radio es tan pequeño que la circunferencia no tenga otros puntos de intersección con la curva L, salvo t_1, t_2. Designemos con l una parte del contorno L recortada por la circunferencia y calculemos la integral a lo largo del arco restante

$$\int_{L-l} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau.$$

DEFINICIÓN. El límite de la integral $\int\limits_{L-l} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau$, para $\rho \to 0$, lleva el nombre de *valor principal* de la integral singular

$$\int\limits_{L} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau.$$

Comencemos a considerar la cuestión sobre la existencia de la integral singular con el caso más sencillo $\int\limits_{L} \frac{d\tau}{\tau-t}$. El integrando admite una función primitiva $\ln(\tau - t)$, y por eso, la investigación puede efectuarse igual que en el punto 3.2. La única dificultad es que la función primitiva es multiforme. Convengamos en que $\ln(\tau - t)$ es un valor de contorno de la función analítica $\ln(z - t)$, uniforme en el plano cortado a lo largo de cierta curva que une los puntos de ramificación t y ∞. Para concretar, convengamos también en que el corte pasa a la derecha de la curva (véase la fig. 3). En este caso

$$\int\limits_{L-l} \frac{d\tau}{\tau-t} = \ln(\tau-t)\Big|_a^{t_1} + \ln(\tau-t)\Big|_{t_2}^{b} = \ln\frac{b-t}{a-t} + \ln\frac{t_1-t}{t_2-t},$$

donde a y b son los puntos inicial y final del contorno L. Pero,

$$\ln\frac{t_1-t}{t_2-t} = \ln\left|\frac{t_1-t}{t_2-t}\right| + i\ [\arg(t_1-t) - \arg(t_2-t)].$$

Por definición, $|t_2 - t| = |t_1 - t|$. Por consiguiente, el primer sumando se reduce a cero. Elegido el corte de manera mencionada, la expresión entre corchetes es igual a aquél de dos ángulos formados por los vectores $\overrightarrow{tt_1}$, $\overrightarrow{tt_2}$, que se dispone a la izquierda de la curva (fig. 3). Designemos con α $(0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi)$ el valor límite de este ángulo para $\rho \to 0$. Es evidente que α es un ángulo medido en el sentido contrahorario, partiendo del vector tangente derecho[1]) hacia el izquierdo. En particular, $\alpha = \pi$ en todos los puntos de suavidad. En los puntos angulares $\alpha \neq \pi$, y $\alpha = 0$ ó $\alpha = 2\pi$ en el caso de un punto de retroceso. De este modo,

$$\lim_{\rho\to 0} \ln\frac{t_1-t}{t_2-t} = i\alpha,$$

y, entonces,

$$\int\limits_{L} \frac{d\tau}{\tau-t} = \ln\frac{b-t}{a-t} + i\alpha. \tag{3.5}$$

[1]) Por vector tangente derecho se entiende la posición límite de la secante, orientada del punto t en la dirección del recorrido positivo.

Si t es un punto de suavidad, la última integral puede representarse en la forma

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau - t} = \ln \frac{b-t}{t-a} \tag{3.6}$$

(eligiendo la rama de la función logarítmica $\ln z$ de un modo tal, que sea $\ln(-1) = \pi i$).

Si el contorno L está cerrado, entonces, haciendo $a = b$, advertimos que el primer término del miembro derecho en la fórmula (3.5) se reduce a cero y la integral adquiere la siguiente forma más simple

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau - t} = i\pi, \tag{3.7}$$

si t es un punto de suavidad, y

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau - t} = i\alpha, \tag{3.7'}$$

si t es un punto angular.

Consideraremos, ahora, una integral singular

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau,$$

en la cual $\varphi(\tau)$ satisface la condición de Hölder.

Representándola en la forma

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t}\, d\tau + \varphi(t) \int_L \frac{d\tau}{\tau - t} \tag{3.8}$$

y razonando igual que en el p. 3.3, llegamos a que la *integral singular* $\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau$ *para la función* $\varphi(\tau)$, *la cual satisface la condición de Hölder, existe en sentido del valor principal según Cauchy.*

En todos los puntos de suavidad esta integral puede ser representada mediante dos expresiones:

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t}\, d\tau + \varphi(t) \left[\ln \frac{b-t}{a-t} + \pi i \right], \tag{3.9}$$

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t}\, d\tau + \varphi(t) \ln \frac{b-t}{t-a}. \tag{3.10}$$

En particular, para un contorno cerrado, suponiendo en (3.9) $a = b$, obtenemos

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t}\, d\tau + i\pi\varphi(t). \tag{3.11}$$

En lo sucesivo, al hablar de una integral singular, siempre se tendrá en cuenta su valor principal.

3.5. Propiedades de la integral singular. Es sumamente evidente que la integral singular posee las propiedades ordinarias de una integral cualquiera: la integral de una suma es igual a la suma de las integrales; un factor constante se puede sacar fuera del signo de la integral. Antes de pasar a la deducción de las propiedades menos triviales —las reglas para cambiar la variable y para la integración por partes— haremos una observación importante.

Al introducir el concepto de valor principal se subrayaba como circunstancia más esencial que el entorno se recorta simétricamente respecto al punto de investigación. Mas, si sometemos la definición de valor principal al examen más preciso, resultará que no hay necesidad en la simetría rigurosa. En efecto, en el p. 3.2 lo esencial consiste no en el requisito de que sea $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, sino en la condición $\lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} =$

1. Del mismo modo, en el p. 3.4 tiene la importancia no el hecho de que t_1, t_2 se disponen en una misma circunferencia ($| t_2 - t | = | t_1 - t |$), sino la condición

$$\lim_{\substack{t_1 \to t \\ t_2 \to t}} \left| \frac{t_2 - t}{t_1 - t} \right| = 1. \tag{3.12}$$

Así pues, si desechamos la condición de simetría y sólo conservamos la condición (3.12), la integral singular, definida desde este punto de vista más general, coincidirá con su valor principal introducido antes.

Teorema (regla de cambio de la variable). *Si la función* $\tau = \alpha(\zeta)$ *tiene primera derivada continua* $\alpha'(\zeta)$, *que no se reduce a cero en ningún punto, y transforma biunívocamente el contorno* L *en el contorno* L', *mientras que* $\varphi(x)$ *satisface la condición de Hölder, entonces*

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = \int_{L'} \frac{\varphi[\alpha(\zeta)]\, \alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta) - \alpha(\xi)}\, d\zeta, \tag{3.13}$$

donde

$$t = \alpha(\xi).$$

Demostración. La integral del miembro derecho en (3.13) existe en el sentido del valor principal. Mediante una circunferencia sufi-

cientemente pequeña con centro en el punto ξ recortemos del contorno L' un arco l'. Sean ξ_1 y ξ_2 los extremos de este arco, y sean t_1 y t_2 unos puntos del contorno L que les corresponden. En este caso

$$\int_{L'} \frac{\varphi[\alpha(\zeta)]\,\alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta)-\alpha(\xi)}\,d\zeta = \lim_{\xi_1,\,\xi_2\to\xi} \int_{L'-l'} \frac{\varphi[\alpha(\zeta)]\,\alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta)-\alpha(\xi)}\,d\zeta.$$

Al realizar la sustitución $\zeta = \beta(\tau)$, donde $\beta(\tau)$ es una función inversa para $\alpha(\zeta)$ (por hipótesis del teorema, la función inversa existe y es uniforme), nos convencemos de que el segundo miembro de la igualdad coincide con

$$\lim_{t_1,\,t_2\to t} \int_{L-l} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau.$$

Los puntos t_1 y t_2 en L ya no son simétricos respecto al punto t, no obstante satisfacen la condición (3.12), lo que vamos a demostrar ahora mismo.

Desarrollando la función $\alpha(\zeta)$, en el punto ξ, en serie de Taylor y limitándonos a los dos primeros términos, obtenemos

$$t_2 = \alpha(\xi_2) = t + [\alpha'(\xi) + \varepsilon_2(\xi_2, \xi)](\xi_2 - \xi),$$
$$t_1 = \alpha(\xi_1) = t + [\alpha'(\xi) + \varepsilon_1(\xi_1, \xi)](\xi_1 - \xi),$$

donde, en virtud de la continuidad supuesta de $\alpha'(\zeta)$, ε_1 y ε_2 tienden a cero cuando $\xi_1,\ \xi_2 \to \xi$.

Entonces

$$\left|\frac{t_2-t}{t_1-t}\right| = \left|\frac{\alpha'(\xi)+\varepsilon_2}{\alpha'(\xi)+\varepsilon_1}\right| \left|\frac{\xi_2-\xi}{\xi_1-\xi}\right|$$

y, por consiguiente,

$$\lim_{t_1,\,t_2\to t}\left|\frac{t_2-t}{t_1-t}\right| = \lim_{\xi_1,\,\xi_2\to\xi}\left|\frac{\xi_2-\xi}{\xi_1-\xi}\right| = 1.$$

Teniendo presente la observación hecha al principio del punto, el teorema queda demostrado.

La condición de que la transformación sea biunívoca es esencial, aunque no hay necesidad de subrayarla, pues es esencial también para toda integral ordinaria.

Teorema (de la integración por partes). *Si* $\varphi(\tau)$ *es una función continuamente derivable, y el punto* t *no coincide con los extremos del contorno suave* L (a y b), *será lícita la siguiente fórmula de integración por partes*:

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau = i\pi\varphi(t) + \varphi(b)\ln(b-t) - \varphi(a)\ln(a-t) - \int_L \varphi'(\tau)\ln(\tau-t)\,d\tau. \qquad (3.14)$$

Recordemos que la rama unívoca de la función primitiva $\ln(\tau - t)$ es distinguida, conforme al p. 3.4, mediante un corte, que une el punto t con el punto infinitamente alejado, a la derecha de L. Si este corte lo haremos a la izquierda de L, tendremos que poner el signo menos en el primer término del miembro derecho en la fórmula (3.14).

En la demostración [1]) partimos de la integral en el miembro derecho

$$\int_L \varphi'(\tau) \ln(\tau - t)\, d\tau.$$

La última tiene sentido como una integral impropia. Para definirla se puede cortar un entorno del punto t de una manera cualquiera. Hagámoslo igual que al definir el valor principal

$$\int_L \varphi'(\tau) \ln(\tau - t)\, d\tau = \lim_{\rho \to 0} \left[\int_a^{t_1} \varphi'(\tau) \ln(\tau - t)\, d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{t_2}^{b} \varphi'(\tau) \ln(\tau - t)\, d\tau \right].$$

Integrando por partes las integrales ordinarias encerradas entre corchetes, tendremos

$$\int_a^{t_1} \varphi'(\tau) \ln(\tau - t)\, d\tau + \int_{t_2}^{b} \varphi'(\tau) \ln(\tau - t)\, d\tau =$$

$$= \varphi(b) \ln(b - t) - \varphi(a) \ln(a - t) + \varphi(t_1) \ln(t_1 - t) -$$

$$- \varphi(t_2) \ln(t_2 - t) - \int_a^{t_1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau - \int_{t_2}^{b} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau.$$

Pasando al límite para $\rho \to 0$, encontramos que los dos primeros términos quedan invariables; los dos últimos darán en suma la integral

$$- \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau,$$

entendida como un valor principal. Para hallar el límite de los demás sumandos, haremos una transformación siguiente:

$$\varphi(t_1) \ln(t_1 - t) - \varphi(t_2) \ln(t_2 - t) = \varphi(t) [\ln(t_1 - t) -$$

$$- \ln(t_2 - t)] + [\varphi(t_1 - \varphi(t)] \ln(t_1 - t) -$$

$$- [\varphi(t_2) - \varphi(t)] \ln(t_2 - t).$$

[1]) Aquí nos adherimos, en lo fundamental, al artículo [15].

La función $\varphi(t)$, siendo continuamente derivable, satisface la condición de Lipschitz. De aquí, en virtud de que $\lim_{x\to 0} x \ln x = 0$, obtenemos que los límites de dos últimos sumandos en la expresión antecedente serán nulos. El límite de $\ln(t_1 - t) - \ln(t_2 - t)$ ya se ha considerado en el p. 3.4. Será igual a $i\pi$. El teorema queda demostrado.

Si L es un contorno cerrado ($a = b$), la fórmula (3.14) se hace más simple:

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = i\pi\varphi(t) - \int_L \varphi'(\tau) \ln(\tau - t)\, d\tau. \qquad (3.15)$$

§ 4. Valores límites de la integral de tipo de Cauchy. Integrales en el eje real

4.1. Lema fundamental. Según lo indicado anteriormente, para una función analítica, definida por la integral de tipo de Cauchy, el propio contorno de integración es una línea singular. Procedamos a examinar un problema de mayor importancia, es decir, a la investigación del comportamiento de la integral de tipo de Cauchy en el propio contorno de integración. El resultado principal, que se obtendrá a continuación, consiste en lo que una integral de tipo de Cauchy, cuya densidad satisface la condición de Hölder, se porta igual que un potencial de capa doble de densidad continua, es decir, tiene valores límites continuos al aproximarse al contorno por todo su lado, con la particularidad de que estos valores límites son distintos, de suerte que atravesando el contorno ocurre un salto.

LEMA FUNDAMENTAL. *Si la densidad* $\varphi(\tau)$ *satisface la condición de Hölder y el punto* t *no coincide con los extremos del contorno suave* L, *la función*

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - z}\, d\tau$$

se porta, al pasar por el punto $z = t$ *del contorno, como una función continua, es decir, tiene un valor límite determinado, cuando* z *se aproxima a* t *desde cualquier lado del contorno y por una vía cualquiera:*

$$\lim_{z\to t} \psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t}\, d\tau = \psi(t).$$

DEMOSTRACIÓN. Acotemos la diferencia

$$\psi(z) - \psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{z - t}{\tau - z} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t}\, d\tau.$$

Admitamos primeramente que la aproximación de z hacia t ocurre por una trayectoria que no es tangente a L, es decir, un ángulo no obtuso formado por el segmento zt y una tangente correspondiente a L en t, no es inferior a cierto ángulo agudo $\omega_0 > 0$. Dividamos la integral a ser acotada en dos sumandos: I_1, en el trayecto L_δ del contorno L, dispuesto dentro de un círculo de radio δ con centro

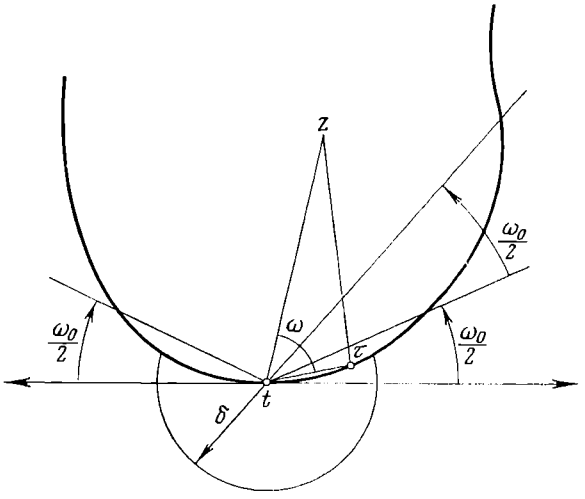


Fig. 4

en el punto t, y I_2, en la parte restante $L - L_\delta$ (fig. 4). Elijamos δ tan pequeño que el ángulo agudo entre el vector $t\tau$, donde $\tau \in L_\delta$, y uno de los vectores tangentes en el punto t sea menor que $\omega_0/2$. Aplicando al triángulo $zt\tau$ el teorema de los senos, obtenemos

$$\left|\frac{z-t}{\tau-z}\right| = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\omega} \leqslant \frac{1}{\operatorname{sen}\dfrac{\omega_0}{2}} = K, \tag{4.1}$$

donde K es un número positivo.

De acuerdo con la condición de Hölder se tiene

$$\left|\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}\right| < A|\tau-t|^{\lambda-1} = Ar^{\lambda-1}, \tag{4.2}$$

donde $r = |\tau - t|$.

Luego, hagamos uso de la propiedad siguiente de la suavidad del contorno L: para un contorno suave la razón $\frac{ds}{dr}$, donde s representa

la longitud del arco de contorno y r, la longitud de su cuerda, es una magnitud acotada[1]), es decir,

$$\left|\frac{ds}{dr}\right| \leqslant m,$$

donde m es una constante positiva. Por consiguiente,

$$|\, d\tau \,| = |\, ds \,| \leqslant m \,|\, dr \,|. \tag{4.3}$$

La desigualdad (4.3) se usará frecuentemente en lo sucesivo.

Recurriendo, ahora, a las acotaciones (4.1) — (4.3), resulta

$$|I_1| \leqslant \int_{L_\delta} \left|\frac{|z-t|}{|\tau-z|}\right| \left|\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}\right| |d\tau| <$$

$$< KAm \int_{L_\delta} r^{\lambda-1}|dr| = 2KAm \int_0^\delta r^{\lambda-1}\, dr = \frac{2KAm\delta^\lambda}{\lambda}.$$

Al elegir arbitrariamente $\varepsilon > 0$, se puede tomar tal δ que sea $|\, I_1 \,| < \varepsilon/2$.

Ahora, elegido δ, pasemos a la acotación de la integral I_2. En el trayecto del contorno $L - L_\delta$ se tiene $\tau \neq t$, por lo cual la integral I_2 en el punto t es una función continua de z. Debido a la continuidad, para $|\, z - t \,|$ lo suficientemente pequeños se verificará la desigualdad

$$|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

uniformemente según t, cuando z tiende a t de una manera indicada. Por esta razón

$$|\, \psi(z) - \psi(t) \,| \leqslant |\, I_1 \,| + |\, I_2 \,| < \varepsilon.$$

Nos queda todavía deshacerse de la condición de que z tienda a t por una trayectoria no tangente al contorno.

Hemos de observar previamente que la acotación de la diferencia $|\, \psi(z) - \psi(t) \,|$ fue efectuada independientemente de t, y, por lo tanto, $\psi(z)$ tiende a su límite uniformemente. De aquí se infiere que el valor límite de la función $\psi(z)$ en el contorno L, es decir, la función $\psi(t)$, es continuo. En efecto, si t, t_1 son dos puntos del contorno L; entonces

$$|\, \psi(t) - \psi(t_1) \,| \leqslant |\, \psi(t) - \psi(z) \,| + |\, \psi(z) - \psi(t_1) \,|.$$

Puesto que $\psi(z)$ tiende a su límite uniformemente, los dos sumandos en el segundo miembro de la desigualdad pueden ser hechos tan pequeños como se quiera, siempre que los puntos t_1, t_1 y z están suficientemente próximos uno al otro.

Supongamos, ahora, que z tiende a t a lo largo de cierta curva γ, tangente a L. Elijamos en la curva γ un punto z, suficientemente

[1]) La demostración de esta tesis, no del todo evidente, está omitida aquí. Se puede encontrarla en el libro [16].

próximo a t, y tracemos por él una curva γ_1 de modo tal que ésta corte el contorno L en cierto punto t_1, suficientemente próximo a t, y no sea tangente al contorno L. La línea γ_1 siempre se puede elegirla de tal manera que las longitudes de las cuerdas zt y zt_1 sean simultáneamente tan pequeñas como se quiera (fig. 5).

Aplicando primero la afirmación demostrada anteriormente sobre la existencia de un límite por una trayectoria no tangente y, después, la propiedad de continuidad de los valores límites, llegamos a que

$$|\psi(z) - \psi(t_1)|$$

y

$$|\psi(t) - \psi(t_1)|$$

son tan pequeños como se quiera, y de aquí también

$$|\psi(z) - \psi(t)| \leqslant |\psi(z) - \psi(t_1)| + |\psi(t) - \psi(t_1)|$$

será tan pequeño como se quiera. Con ello se establece la existencia del límite por una vía cualquiera.

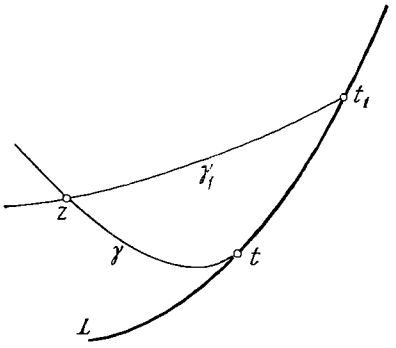


Fig. 5

Ha de notarse que la existencia del límite de la función $\psi(z)$ es una propiedad local, es decir, su validez en el punto dado t se desprende de las propiedades que posee la densidad $\varphi(\tau)$ en el entorno del punto dado. Efectivamente, en el proceso de demostración acotábamos directamente la integral calculada en el arco (tan pequeño como se quiera) del contorno que rodeaba el punto t, para lo cual se utilizaba la condición de Hölder. Para que la función $\psi(z)$ sea continua en el punto t, no se requiere que $\varphi(\tau)$ satisfaga la condición de Hölder también en la parte restante del contorno; ella puede ser simplemente continua en esta parte e, incluso, tener discontinuidades, siendo observadas las condiciones de integrabilidad.

4.2. Fórmulas de Sojotski. Ahora ya estamos en condiciones de considerar el problema fundamental sobre la existencia de valores límites de la integral de tipo de Cauchy en el contorno de integración y, además, relacionarlos con una integral singular.

Sea

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\, d\tau, \tag{4.4}$$

donde $\varphi(\tau)$ satisface la condición de Hölder.

Convengamos en considerar el contorno L cerrado y suave. En el caso de que el contorno resulte ser abierto, lo complementaremos con alguna curva hasta que sea cerrado, haciendo en esta curva complementaria $\varphi(\tau) = 0$.

Con el objeto de explorar los valores límites de $\Phi(z)$ en cierto punto t del contorno, tomemos la función estudiada en el p. 4.1

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-z}\,d\tau. \tag{4.5}$$

Designemos con $\Phi^+(t)$, $\psi^+(t)$ los valores límites de las funciones analíticas $\Phi(z)$, $\psi(z)$, cuando el punto z va aproximándose desde el interior de L al punto t del contorno, y con $\Phi^-(t)$, $\psi^-(t)$, cuando dicha aproximación se efectúa de afuera. (Para un contorno abierto esto corresponde a los valores límites a la izquierda y a la derecha.) Para subrayar el sentido en que se pasa al límite, anotaremos, respectivamente, $z\to t^+$ ó $z\to t^-$. Los valores de las funciones correspondientes en el punto t del contorno, los designaremos simplemente $\Phi(t)$, $\psi(t)$, con la particularidad de que $\Phi(t)$ significará una integral singular $\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau$, entendida en sentido del valor principal.

Partiendo de las igualdades

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau-z}=\begin{cases} 2\pi i, & z\in D^+,\\ 0, & z\in D^-,\\ \pi i, & z\in L,\end{cases} \tag{4.6}$$

tendremos

$$\psi^+(t)=\lim_{z\to t^+}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau-\frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau-z}\right]=\Phi^+(t)-\varphi(t),$$

$$\psi^-(t)=\lim_{z\to t^-}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau-\frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau-z}\right]=\Phi^-(t),$$

$$\psi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau-\frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau-t}=\Phi(t)-\frac{1}{2}\varphi(t).$$

Como, según el lema fundamental, la función $\psi(t)$ es continua, los segundos miembros de las igualdades escritas son coincidentes, es decir,

$$\Phi^+(t)-\varphi(t)=\Phi^-(t)=\Phi(t)-\frac{1}{2}\varphi(t). \tag{4.7}$$

De aquí obtenemos en definitiva

$$\begin{aligned}\Phi^+(t)&=\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau,\\ \Phi^-(t)&=-\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau,\end{aligned} \tag{4.8}$$

con la particularidad de que la integral singular $\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau$ se entiende en sentido del valor principal.

Las fórmulas (4.8) se deben a Yu. V. Sojotski [24][1]), un matemático ruso, quien fue primero en deducirlas en 1873. Las llamaremos *fórmulas de Sojotski*. Serán fórmulas principales para toda la exposición a seguir.

Enunciemos el resultado obtenido.

TEOREMA. *Sea L un contorno suave (cerrado o no cerrado) y sea* $\varphi(\tau)$ *una función de los puntos del contorno que* satisface la condición de Hölder. En este caso, la integral de tipo de Cauchy

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\, d\tau$$

tiene valores límites $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ *en todos los puntos del contorno L no coincidentes con sus extremos, al aproximarse al contorno de la izquierda o de la derecha por una vía cualquiera, y estos valores límites se expresan mediante la densidad* $\varphi(t)$ *de la integral y la integral singular* $\Phi(t)$ *según las fórmulas de Sojotski* (4.8).

Al restar y sumar las fórmulas (4.8), obtendremos un par de fórmulas equivalentes

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t), \tag{4.9}$$

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau, \tag{4.10}$$

que serán de uso frecuente en lo ulterior.

En el § 1 se ha mostrado que la condición

$$\Phi^-(\infty) = 0$$

es necesaria para que una función analítica a trozos pueda ser representada por la integral de tipo de Cauchy. Es fácil demostrar que es también suficiente. Efectivamente, sean $\Phi^{\pm}(t)$ los valores de contorno de una función analítica a trozos, que satisfacen la condición de Hölder. Entonces, expresando la densidad de la integral de tipo de Cauchy en la forma $\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t)$, en virtud de las fórmulas de Cauchy (1.1), (1.2), tendremos, al tener en cuenta (1.6):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi^+(\tau) - \Phi^-(\tau)}{\tau - z}\, d\tau = \begin{cases} \Phi^+(z), & z \in D^+, \\ \Phi^-(z), & z \in D^-. \end{cases}$$

4.3. Condición de que una función compleja arbitraria es valor de contorno de la función analítica en un dominio. Sea dada en el

[1]) Véanse las obras entre corchetes en el apartado A de la bibliografía.

contorno cerrado y suave L una función compleja continua $\varphi(t)$ de los puntos del contorno, y sea $t = t(s) = t_1(s) + it_2(s)$ la ecuación del contorno en forma compleja, donde $t(s)$ es una función del arco s que se mide a partir de algún punto del contorno.

Sustituyendo en la expresión para la función $\varphi(t)$ la coordenada compleja, separamos las partes real e imaginaria:

$$\varphi(t) = \varphi[t(s)] = \varphi_1(s) + i\varphi_2(s).$$

Es fácil mostrar que a la pregunta de si existe en el dominio D^+ (D^-) tal función analítica para la cual la función compleja prefijada $\varphi(t)$ sea su valor límite en el contorno, se debe dar, en el caso general, una respuesta negativa. En efecto, según los valores de la parte real $\varphi_1(s)$ puede construirse una función $u(x, y)$, armónica en el dominio D^+ (o D^-), cuyos valores límites en el contorno coinciden con la función dada $\varphi_1(s)$ (problema de Dirichlet). Según la función $u(x, y)$ podemos determinar, salvo un sumando constante arbitrario, una función armónica $v(x, y)$ que es conjugada de $u(x, y)$. De este modo obtendremos una función analítica $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, para la cual $\varphi_1(s)$ constituye el valor de contorno de la parte real. Si, ahora, tomamos el valor límite de la parte imaginaria $v(x, y)$, éste, en el caso general, no coincidirá con la función dada $\varphi_2(s)$, y, por lo tanto, la función compleja dada $\varphi(t)$ no será valor límite de la función analítica en el dominio D^+ (ó D^-). Según indican los razonamientos, sólo los valores de una componente, sea real o imaginaria, pueden darse de una manera arbitraria; la segunda componente se determinará, en este caso, salvo un sumando constante.

Así pues, la función compleja dada será el valor límite de una función analítica sólo satisfaciendo ciertas correlaciones. Pasemos a la deducción de estas correlaciones.

Vamos a considerar en lo sucesivo que $\varphi(t)$ satisface la condición de Hölder.

Examinemos una integral de tipo de Cauchy de densidad $\varphi(t)$

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\, d\tau.$$

Si $z \in D^+$ y $\varphi(t)$ es el valor de contorno de una función analítica en D^+, se tiene

$$\Phi^+(z) = \varphi(z);$$

si $z \in D^-$ y $\varphi(t)$ es el valor de contorno de una función analítica en D^-, entonces, de acuerdo con la fórmula de Cauchy para un dominio infinito,

$$\Phi^-(z) = -\varphi(z) + \varphi(\infty).$$

Pasando, ahora, a los valores límites en el contorno L y haciendo uso de las fórmulas de Sojotski (4.8), obtenemos

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau,$$

si $\varphi(z)$ es analítica en D^+, y

$$-\varphi(t) + \varphi(\infty) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau,$$

si $\varphi(z)$ es analítica en D^-. De aquí

$$-\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = 0, \tag{4.11}$$

$$\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau - \Gamma = 0 \quad (\Gamma = \varphi(\infty)). \tag{4.12}$$

Con estos razonamientos se establece la necesidad de las condiciones (4.11) y (4.12) para que la función $\varphi(t)$ sea el valor de contorno de una función analítica en los dominios D^+ y D^-, respectivamente. No es difícil señalar que estas condiciones son también suficientes.

Efectivamente, supóngase, por ejemplo, que $\varphi(t)$ satisface la condición (4.11). Para una integral de tipo de Cauchy

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau$$

esto implica, de acuerdo con las fórmulas de Sojotski, que $\Phi^-(t) = 0$. Pero, en este caso, de la fórmula (4.9) se tiene

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \Phi^+(t).$$

Enunciemos el resultado obtenido.

TEOREMA. *Supóngase que en el contorno cerrado y suave L está definida una función compleja $\varphi(t)$ que satisface la condición de Hölder. Para que esta función sea el valor de contorno de una función analítica en el dominio interior D^+, es necesario y suficiente que se cumpla la condición* (4.11); *para que $\varphi(t)$ sea el valor de contorno de una función analítica en el dominio exterior D^- que en el infinito se reduce a un número prefijado Γ, es necesario y suficiente que se cumpla la condición* (4.12).

Se puede plantear un problema más general: obténgase la condición de que una función compleja definida en el contorno sea el valor de contorno de una función, analítica en el dominio, a excepción de algunos puntos, en los cuales ella posee singularidades prefijadas. Para la exposición ulterior es de interés el caso en que $\varphi(t)$ repre-

senta el valor de contorno de una función analítica en el dominio D^-, a excepción de un punto infinitamente alejado, donde ella tiene el polo de n-ésimo orden con la parte principal prefijada:

$$\gamma(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n.$$

Razonando igual que en el caso antecedente, es fácil mostrar que la condición tendrá la misma forma que tiene (4.12), con la única diferencia de que la constante Γ se sustituya por la expresión para $\gamma(t)$, es decir,

$$\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau - \gamma(t) = 0. \tag{4.13}$$

A veces, las igualdades (4.11) y (4.12) se denominan condiciones de prolongación (extensión) analítica de una función compleja, dada en el contorno, a un dominio. Sin embargo, el término «prolongación analítica» se aplica con frecuencia no sólo a las funciones, analíticas en todos los puntos del dominio, sino a unas funciones que en ciertos puntos de este dominio tienen singularidades. Para las funciones de este género las condiciones (4.11) y (4.12) se deben reemplazar por las condiciones más complejas (véase el problema 12 al final del capítulo).

Las fórmulas (4.11) y (4.12) pueden emplearse para calcular integrales singulares en el caso de que la densidad de la integral es el valor de contorno de una función analítica (véase el problema 10).

4.4. Valores límites de las derivadas. Derivadas de los valores límites y derivación de la integral singular.

1°. Sea $\varphi(t)$ una función de los puntos del contorno cerrado L, cuya m-ésima derivada satisface la condición de Hölder.

Señalemos que la derivada de m-ésimo orden de la función $\Phi(z)$, definida por la integral de tipo de Cauchy

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau,$$

tiene valores límites en el contorno y que estos últimos satisfacen las correlaciones análogas a las fórmulas de Sojotski (4.8):

$$\Phi^{(m)+}(t) = \frac{1}{2}\varphi^{(m)}(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi^{(m)}(\tau)}{\tau - t}\,d\tau, \tag{4.14}$$

$$\Phi^{(m)-}(t) = -\frac{1}{2}\varphi^{(m)}(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi^{(m)}(\tau)}{\tau - t}\,d\tau. \tag{4.15}$$

La derivada de m-ésimo orden de la integral de tipo de Cauchy, como se deduce de (1.3), tendrá por expresión

$$\Phi^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - z)^{m+1}}\,d\tau.$$

Integremos por partes la integral en el segundo miembro m veces. Dado que el contorno está cerrado, la parte integrada cada vez va a reducirse a cero. Por esta razón

$$\Phi^{(m)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi^{(m)}(\tau)}{\tau - z}\, d\tau.$$

Aplicando a la obtenida integral de tipo de Cauchy las fórmulas de Sojotski (4.8), llegamos a las fórmulas (4.14) y (4.15).

2°. Mostremos, ahora, que en las fórmulas (4.14) y (4.15) las operaciones de derivación y de paso al límite en el contorno son conmutables, es decir, que los valores límites en el contorno de las derivadas de la integral de tipo de Cauchy coinciden con las derivadas de sus valores límites:

$$[\Phi^{\pm}(t)]^{(m)} = [\Phi^{(m)}(t)]^{\pm},$$

siempre que la densidad $\varphi^{(m)}(t)$ satisface la condición de Hölder.

Limitémonos al caso de la primera derivada.

Señalemos primero que

$$\Phi'(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi'(\tau)}{\tau - t}\, d\tau. \tag{4.16}$$

Según la fórmula (3.15) tenemos

$$\Phi'(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\varphi(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi'(\tau)\ln(\tau - t)\, d\tau\right].$$

Derivemos el sumando integral (haciendo uso de las designaciones del p. 4.1), entonces

$$\frac{d}{dt}\int_L \varphi'(\tau)\ln(\tau - t)\, d\tau = \lim_{\delta\to 0}\frac{d}{dt}\int_{L-L_\delta} \varphi'(\tau)\ln(\tau - t)\, d\tau =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\left[-\int_{L-L_\delta}\frac{\varphi'(\tau)}{\tau - t}\, d\tau + \varphi'(t_2)\ln(\tau - t_2) - \varphi'(t_1)\ln(\tau - t_1)\right] =$$

$$= -\int_L \frac{\varphi'(\tau)}{\tau - t}\, d\tau + \lim_{\delta\to 0}[\varphi'(t_2) - \varphi'(t_1)]\ln(\tau - t_2) +$$

$$+ \lim_{\delta\to 0}\varphi'(t_1)[\ln(\tau - t_2) - \ln(\tau - t_1)]. \tag{4.17}$$

Como $\varphi'(t)$ satisface la condición de Hölder, el primero de los límites que han quedado es nulo, y el segundo, calculado antes en

los pp. 3.4 y 3.5, es igual a $\pi i \varphi'(t)$. Por esto, de (4.17) obtenemos

$$\Phi'(t) = \frac{1}{2}\varphi'(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi'(\tau)}{\tau - t}\,d\tau - \frac{1}{2}\varphi'(t),$$

lo que demuestra (4.16).

Las igualdades $[\Phi'(t)]^{\pm} = [\Phi^{\pm}(t)]'$ se obtienen ahora de (4.16) por aplicación inmediata de las fórmulas de Sojotski.

En (4.17) no hemos fundado las posibilidades de invertir la derivación y el paso al límite. La demostración plenamente argumentada se puede encontrar en la obra 4)* de Yu. M. Krikunov,[1] la que seguíamos, en lo principal, demostrando la fórmula (4.16). Diremos también que la fórmula (4.16) se cita sin demostración en el artículo 1)* de R.S. Isajánov. Estos autores han obtenido también la fórmula para el caso de un contorno abierto.

4.5. Fórmulas de Sojotski para los puntos angulares del contorno. En las investigaciones del p. 4.1 la propiedad del contorno, que, de hecho, fue empleada, puede enunciarse así: la razón del arco pequeño del contorno a su cuerda es una magnitud acotada. No obstante, esta propiedad es justa no sólo para los contornos cuya tangente cambia de manera continua, sino también para aquellos que tienen puntos angulares. De este modo, todos los razonamientos del p. 4.1. siguen siendo válidos para el caso en que el punto investigado es un punto angular del contorno.

En este caso, en lugar del valor de la integral (4.6) para $z \in L$, se debe emplear la integral (3.7'):

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau - t} = i\alpha,$$

donde α es el ángulo formado por los vectores tangentes derecho e izquierdo a L en el punto angular t.

Las igualdades (4.7) toman la forma

$$\Phi^+(t) - \varphi(t) = \Phi^-(t) = \Phi(t) - \frac{\alpha}{2\pi}\varphi(t),$$

de donde obtenemos las expresiones para $\Phi^+(t)$ y $\Phi^-(t)$:

$$\Phi^+(t) = \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau, \tag{4.18}$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{\alpha}{2\pi}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau. \tag{4.19}$$

El resultado obtenido se puede enunciar de modo siguiente.

---

[1]) Véanse las obras con un asterisco en el apartado B de la bibliografía.

TEOREMA. *Si la integral de tipo de Cauchy se calcula en el contorno que tiene un número finito de puntos angulares, entonces existen los valores límites de la integral, con la particularidad de que para los puntos no angulares quedan en vigor las fórmulas ordinarias de Sojotski (4.8), y para los puntos angulares se verifican las fórmulas* (4.18) y (4.19).

La demostración realizada no puede ser directamente extendida a los puntos de retroceso. Sin embargo, recurriendo a ciertos razonamientos adicionales, podemos mostrar que las fórmulas (4.18) y (4.19) quedan lícitas también para este caso. Sólo debe ponerse en ellas $\alpha = 0$ ó $\alpha = 2\pi$, según sea la dirección de la punta: a la derecha o a la izquierda respecto del contorno. La demostración se puede hallar en [16].

4.6. Integrales de tipo de Cauchy en el eje real. Sea $\varphi(\tau)$ una función compleja de la variable real τ, la cual satisface la condición de Hölder para todas las τ finitas y todas las $\varphi(\infty)$ que tienden a un límite determinado, cuando $\tau \to \pm\infty$. Exijamos que para τ grandes se verifique la desigualdad

$$|\varphi(\tau) - \varphi(\infty)| < \frac{A}{|\tau|^{\mu}} \quad (\mu > 0,\ A > 0). \tag{4.20}$$

Examinemos una integral de tipo de Cauchy

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\, d\tau, \tag{4.21}$$

considerando que z no se dispone en el eje real.

Si $\varphi(\infty) \neq 0$, la integral impropia (4.21) será divergente, es decir, la expresión

$$\int_{N'}^{N''} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\, d\tau$$

no tenderá al límite, cuando N' y N'' tienden, respectivamente, a $-\infty$ y a $+\infty$, independientemente uno de otro. En efecto,

$$\int_{N'}^{N''} \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau - z} = \int_{N'}^{N''} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(\infty)}{\tau - z}\, d\tau + \varphi(\infty) \int_{N'}^{N''} \frac{d\tau}{\tau - z}. \tag{4.22}$$

En la primera integral del segundo miembro el integrando, en virtud de (4.20), tiene, para $|\tau|$ grandes, el orden $|\tau|^{-1-\mu}$, de suerte que la integral correspondiente de límites infinitos será convergente, conforme al conocido indicio de convergencia de las integrales impropias.

La segunda integral se calcula con facilidad:

$$\int_{N'}^{N''} \frac{d\tau}{\tau - z} = \ln(N'' - z) - \ln(N' - z) = \ln \frac{|N'' - z|}{|N' - z|} \pm i\alpha.$$

Aquí, α es el ángulo formado por las rectas que unen el punto z con los puntos N' y N''; el segundo término se toma con el signo más, si z se ubica en el semiplano superior, y con el signo menos, al disponerse z en el semiplano inferior (recomendamos que el lector haga un dibujo).

Si N' y N'' tienden (independientemente uno del otro) a $-\infty$ y a $+\infty$, respectivamente, entonces α tiende a π, mas $\ln\left|\frac{N''-z}{N'-z}\right|$ no tiende a ningún límite, de lo cual se deduce que tampoco tiende al límite el primer miembro de la igualdad (4.22).

Vamos a considerar ahora que los límites de integración N' y N'' tienden al infinito simétricamente, es decir, $-N' = N'' = N$. En este caso

$$\lim_{N\to\infty} \ln \frac{|N-z|}{|-N-z|} = \ln 1 = 0,$$

y obtenemos

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-z} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)-\varphi(\infty)}{\tau-z}\,d\tau \pm \pi i\varphi(\infty),$$

donde el signo se elige de una manera indicada arriba.

La expresión en el primer miembro se denomina *valor principal* de la integral (4.21), calculada entre los límites infinitos. En lo sucesivo, por integrales de límites infinitos siempre se comprenderán sus valores principales. Si la integral correspondiente existe como impropia, entonces, obviamente, el valor principal coincidirá con su valor, considerándose la integral como impropia.

Así pues, hemos establecido la existencia del valor principal de la integral (4.21), con la particularidad de que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)-\varphi(\infty)}{\tau-z}\,d\tau \pm \frac{1}{2}\varphi(\infty), \qquad (4.23)$$

donde en el segundo miembro se tiene una integral en el sentido común. Si $\varphi(\infty) = 0$, la integral (4.21) será convergente.

Puesto que la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-z)^2}$$

converge absolutamente para cualquier z, no ubicado en el eje real, podemos derivar la integral (4.21) respecto del parámetro z, y, por consiguiente, $\Phi(z)$ será función analítica en los semiplanos superior

e inferior. Estas funciones se designarán con $\Phi^+(z)$ y $\Phi^-(z)$, respectivamente.

Supongamos, ahora, que $\operatorname{Im} z = 0$, es decir, el punto $z = t$ está dispuesto en la línea de integración. En este caso por integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\, d\tau \tag{4.24}$$

se comprenderá su valor principal, definido del modo siguiente

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\, d\tau = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \left\{ \int_{-N}^{t-\varepsilon} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau + \int_{t+\varepsilon}^{N} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau \right\}.$$

En particular,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau - t} = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \left\{ \int_{-N}^{t-\varepsilon} \frac{d\tau}{\tau - t} + \int_{t+\varepsilon}^{N} \frac{d\tau}{\tau - t} \right\} = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \ln \frac{-\varepsilon(N-t)}{(-N-t)\varepsilon} = 0.$$

Haciendo uso de esta igualdad, podemos escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau - t} = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \varepsilon\to\infty}} \left\{ \int_{-N}^{t-\varepsilon} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(\infty)}{\tau - t}\, d\tau + \int_{t+\varepsilon}^{N} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(\infty)}{\tau - t}\, d\tau \right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left\{ \int_{-\infty}^{t-\varepsilon} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(\infty)}{\tau - t}\, d\tau + \int_{t+\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(\infty)}{\tau - t}\, d\tau \right\},$$

observando que ambas últimas integrales convergen en el sentido común. Para demostrar la existencia del límite para $\varepsilon \to 0$, se puede repetir los razonamientos del p. 3.4. La circunstancia de que en el caso dado la longitud del contorno de integración es infinita no tiene mucha importancia, pues podemos volver al caso de un contorno finito, aplicando la siguiente transformación

$$\int_{-\infty}^{t-\varepsilon} + \int_{t+\varepsilon}^{\infty} = \left(\int_{-\infty}^{t-A} + \int_{t+A}^{\infty} \right) + \int_{t-A}^{t-\varepsilon} + \int_{t+\varepsilon}^{t+A}.$$

Las integrales entre paréntesis no dependen de ε, mientras que el límite de la suma de otras dos integrales existe, según lo establecido en el p. 3.3. De modo que, si $\varphi(\tau)$ satisface las condiciones enunciadas más arriba, el valor principal de la integral (4.24) existe.

Repitiendo los razonamientos del p. 4.2, se puede demostrar la validez de las fórmulas de Sojotski para una recta infinita

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau,$$
$$\Phi^-(t) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau. \tag{4.25}$$

Aquí, $\Phi^+(t)$ y $\Phi^-(t)$ son límites de $\Phi(z)$, cuando z tiende a t, del semiplano superior (inferior), respectivamente.

Estudiemos, además, el comportamiento de la función $\Phi(z)$ en el entorno del punto infinitamente alejado, el cual representa ahora un punto de frontera. Con este fin efectuemos el cambio de la variable

$$z = -\frac{1}{\zeta}.$$

Cuando el punto $z = \tau$ recorre el eje real en el sentido positivo, el punto $\sigma = -1/\tau$, que le corresponde, también recorre el eje real en el mismo sentido.

Realizando en la integral (4.21) el cambio de variables e introduciendo las designaciones

$$\Phi(z) = \Phi\left(-\frac{1}{\zeta}\right) = \Phi^*(\zeta),$$
$$\varphi(\tau) = \varphi\left(-\frac{1}{\sigma}\right) = \varphi^*(\sigma),$$

obtenemos

$$\Phi^*(\zeta) = \frac{\zeta}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi^*(\sigma)\,d\sigma}{\sigma(\sigma - \zeta)} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi^*(\sigma)\,d\sigma}{\sigma - \zeta} - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi^*(\sigma)\,d\sigma}{\sigma}; \tag{4.26}$$

todas las integrales anteriores se entienden en el sentido de valores principales. La segunda integral del miembro derecho en (4.26) es una magnitud constante y, por esto, el estudio de la función $\Phi(z)$ cerca del punto $z = \infty$ se reduce al estudio de la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi^*(\sigma)\,d\sigma}{\sigma - \zeta}$$

cerca del punto $\zeta = 0$, es decir, a un problema que ya conocemos. Supongamos que la función $\varphi^*(\sigma)$ satisface la condición de Hölder en el entorno del punto $\sigma = 0$, es decir,

$$|\varphi^*(\sigma_2) - \varphi^*(\sigma_1)| \leqslant B\,|\sigma_2 - \sigma_1|^{\mu} \quad (0 < \mu \leqslant 1).$$

Para la función $\varphi(\tau)$ tenemos en este caso

$$|\varphi(\tau_2) - \varphi(\tau_1)| \leqslant B\left|\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}\right|^{\mu} \quad (0 < \mu \leqslant 1). \qquad (4.27)$$

Es fácil advertir que de la última desigualdad se desprende la condición (4.20).

Si z se va al infinito por una vía cualquiera, quedándose en el semiplano superior o inferior, entonces $\zeta \to 0$, quedándose también en el semiplano superior o inferior. Por esta razón, aplicando a la primera integral del segundo miembro en (4.26) la primera de las fórmulas (4.25), obtenemos

$$\Phi^+(\infty) = \Phi^{*+}(0) =$$

$$= \frac{1}{2}\varphi^*(0) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi^*(\sigma)\,d\sigma}{\sigma} - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi^*(\sigma)\,d\sigma}{\sigma} = \frac{1}{2}\varphi(\infty).$$

Razonando análogamente para Φ^-, obtenemos

$$\Phi^+(\infty) = \frac{1}{2}\varphi(\infty), \quad \Phi^-(\infty) = -\frac{1}{2}\varphi(\infty). \qquad (4.28)$$

De aquí y de (4.25) proviene

$$\Phi^+(\infty) + \Phi^-(\infty) = 0, \qquad (4.29)$$

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = 0. \qquad (4.30)$$

Hemos mostrado que una función, representada por la integral de tipo de Cauchy en el eje real, satisface necesariamente la condición (4.29). En el p. 4.7 probaremos que esta condición es también suficiente para que una función, analítica a trozos en los semiplanos superior e inferior, sea representada por una integral en el eje real.

La investigación semejante se puede efectuar para una integral de tipo de Cauchy calculada a lo largo de una curva suave arbitraria que se va al infinito.

Observemos que mediante el cambio de variables

$$\zeta = \frac{z - i}{z + i}, \quad \sigma = \frac{\tau - i}{\tau + i}$$

podríamos reducir el estudio de la integral de tipo de Cauchy, calculada en el eje real, al estudio de una integral calculada en una circunferencia unitaria del plano ζ.

En particular, de aquí se puede obtener, sin que se hagan unas investigaciones adicionales, que si la densidad de la integral satisface la condición de Hölder, la misma condición la satisfacen los valores límites de la integral.

4.7. Fórmulas de Cauchy.

TEOREMA. *Si una función analítica en el semiplano superior es continua en el semiplano cerrado y satisface en el entorno del punto infinitamente alejado la condición* (4.20), *entonces*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau=\begin{cases}\varphi(z)-\dfrac{\varphi(\infty)}{2}, & \operatorname{Im} z>0,\\ -\dfrac{\varphi(\infty)}{2}, & \operatorname{Im} z<0.\end{cases}\tag{4.31}$$

DEMOSTRACIÓN. Construyamos en el semiplano superior un semicírculo limitado por una circunferencia C_R de radio R con centro en el origen y por el segmento $[-R, R]$. Elijamos R tan grande que el punto se disponga dentro del semicírculo.

En virtud del teorema de Cauchy y de la fórmula de Cauchy (1.1.)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{[-R,\,R]+C_R}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(\infty)}{\tau-z}\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(\infty)}{\tau-z}\,d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(\infty)}{\tau-z}\,d\tau=$$

$$=\begin{cases}\varphi(z)-\varphi(\infty), & \operatorname{Im} z>0,\\ 0 & \operatorname{Im} z<0.\end{cases}\tag{4.32}$$

Conforme a (4.20), al crecer R, el integrando tiende a cero de orden $1/R^{1+\mu}$, y la longitud del contorno aumenta proporcionalmente a R, por lo cual, la integral en C_R tiende a cero. Pasando al límite para $R\to\infty$, obtenemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(\infty)}{\tau-z}\,d\tau=\begin{cases}\varphi(z)-\varphi(\infty), & \operatorname{Im} z>0,\\ 0, & \operatorname{Im} z<0.\end{cases}\tag{4.33}$$

De aquí, a base de la fórmula (4.23) llegamos a (4.31).

Del modo igual se demuestra la fórmula

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(\infty)}{\tau-z}\,d\tau=\begin{cases}\dfrac{\varphi(\infty)}{2}, & \operatorname{Im} z>0,\\ -\varphi(z)+\dfrac{\varphi(\infty)}{2}, & \operatorname{Im} z<0,\end{cases}\tag{4.34}$$

si $\varphi(\tau)$ satisface las condiciones análogas en el semiplano inferior. Se puede mostrar que para la validez de las fórmulas (4.31) y (4.34),

es suficiente que la condición (4.20) para $|\tau|$ grandes se satisfaga no en todo el entorno del punto infinitamente alejado, sino sólo en el eje real.

Hemos probado más arriba que una función analítica a trozos, representada por la integral de tipo de Cauchy (4.21), satisface necesariamente la igualdad (4.29). Señalemos que esta condición es también suficiente para que una función analítica a trozos sea representada por tal integral. En efecto, sea, ahora, $\Phi(z)$, definida en los semiplanos superior e inferior, una función analítica a trozos, y sean $\Phi^+(\tau)$, $\Phi^-(\tau)$ sus valores límites que en el eje real satisfacen las condiciones (4.29) y (4.20).

Al hacer $\varphi(\tau) = \Phi^+(\tau) - \Phi^-(\tau)$, de (4.31) y (4.34) obtenemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau = \begin{cases} \Phi^+(z), & \operatorname{Im} z > 0, \\ \Phi^-(z), & \operatorname{Im} z < 0, \end{cases}$$

es decir,

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau.$$

De este modo, el cumplimiento de la condición (4.29) es necesario y suficiente para que una función analítica a trozos de la clase que se considera sea representada por la integral de tipo de Cauchy. Esta condición sustituye aquí la otra, obtenida antes, para un contorno finito

$$\Phi^-(\infty) = 0. \tag{1.6}$$

Una investigación semejante puede realizarse para la integral de tipo de Cauchy que se calcula a lo largo de una curva suave arbitraria que se va al infinito. En este caso quedan en vigor todos los resultados obtenidos hasta ahora.

Si las ramas de la curva se van al infinto siguiendo diferentes direcciones asintóticas, el punto infinitamente alejado es angular. (Los pormenores de la investigación de este caso se ponen de manifiesto en la obra de A. S. Motkin 1)*).

Al comparar los pares de fórmulas (1.1), (4.31) y (1.2), (4.34), advertimos que las fórmulas de Cauchy para un contorno finito y un contorno que se extiende al infinito coinciden sólo cuando $\varphi(\infty) = 0$.

Consideremos, además, una integral algo más compleja que utilizaremos en lo ulterior,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{(z - z_0)\,\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau - z_0)(\tau - z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z_0}\,d\tau, \tag{4.35}$$

donde $z_0 \in D^-$, L es un contorno cerrado suave arbitrario, finito o extensible al infinto; $\varphi(\tau)$ satisface en L la condición de Hölder. De las fórmulas (1.1) y (4.31) se sigue

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{(z-z_0)\,\varphi(\tau)}{(\tau-z_0)(\tau-z)}\,d\tau = \begin{cases} \varphi(z), & z \in D^+, \\ 0, & z \in D^-, \end{cases} \tag{4.36}$$

si $\varphi(\tau)$ es el valor de contorno de la función analítica en D^+. Si, en cambio, $\varphi(\tau)$ es analítica en D^-, continua en $D^- + L$, y satisface en L la condición de H, entonces de (1.2) y (4.34) se deduce

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{(z-z_0)\,\varphi(\tau)}{(\tau-z_0)(\tau-z)}\,d\tau = \begin{cases} \varphi(z_0), & z \in D^+, \\ -\varphi(z)+\varphi(z_0) & z \in D^-. \end{cases} \tag{4.37}$$

Así pues, la condición de que $\varphi(\infty)$ se sustituya por $\varphi(z_0)$, para la integral (4.35) las fórmulas de Cauchy tienen la misma forma que las fórmulas de Cauchy (1.1), (1.2) para un contorno finito.

Señalemos una modificación más de la integral de tipo de Cauchy la cual nos será útil cuando la densidad integral se exprese por una función creciente en el infinito. Separemos del núcleo de Cauchy $\frac{1}{\tau-z}$ un cierto segmento de términos iniciales de su desarrollo en el entorno del origen de coordenadas, y, en lugar del núcleo de Cauchy, hagamos uso del resto

$$\frac{1}{\tau-z} - \left[\frac{1}{\tau} + \frac{z}{\tau^2} + \ldots + \frac{z^{q-1}}{\tau^q}\right] = \frac{z^q}{\tau^q}\,\frac{1}{\tau-z}.$$

Entonces, la integral

$$\Phi(z) = \frac{z^q}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau^q(\tau-z)} \tag{4.38}$$

tiene sentido (como valor principal) incluso en el caso en que la densidad de la integral $\varphi(\tau)$ en el infinito crece como $|\tau|^q$ (de modo que $\varphi(\tau)\,\tau^{-q}$ satisface la condición de Hölder en el infinito), a condición de que $\varphi(\tau)$ se reduce, para $\tau = 0$, a cero de orden q. Al mismo tiempo esta integral conserva las propiedades principales de la integral de tipo de Cauchy. Lo fundamental es que para ella resultan justos los análogos de las fórmulas de Sojotski, y la fórmula para el salto tiene la misma forma que para la integral de tipo de Cauchy.

§ 5. Propiedades de los valores límites de la integral de tipo de Cauchy

5.1. Los valores límites satisfacen la condición de Hölder. En el p. 4.1 se ha establecido que los valores límites de la integral de tipo de Cauchy, esto es, las funciones $\Phi^+(t)$ y $\Phi^-(t)$, son continuos en el contorno L. No obstante, resulta que estas funciones poseen una propiedad más profunda que la continuidad, a saber, ellas mismas satisfacen la condición de Hölder.

Esto se afirma en el teorema que sigue.

TEOREMA. *Si L es un contorno cerrado suave y $\varphi(t)$ satisface en L la condición de Hölder con exponente λ, entonces los valores límites de la integral de tipo de Cauchy $\Phi^+(t)$ y $\Phi^-(t)$ también satisfacen esta condición, y, además, con el mismo exponente, si $\lambda < 1$, y con un exponente que se diferencia de λ en una magnitud tan pequeña como se quiera, si $\lambda = 1$.*

De la igualdad (3.11) se ve que es suficiente demostrar el teorema enunciado para la función

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t}\, d\tau.$$

Con este fin acotemos

$$|\psi(t_2) - \psi(t_1)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_L \left\{ \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t_2)}{\tau - t_2} - \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t_1)}{\tau - t_1} \right\} d\tau \right|. \quad (5.1)$$

para dos puntos arbitrarios t_1 y t_2, lo suficientemente próximos uno al otro. Tomando el punto t_1 por centro, describamos una circunferencia de radio δ de tal modo que corte L en dos puntos que se designarán con a y b. Denotaremos con l la parte del contorno L, dispuesta dentro de esta circunferencia. Sea t_2 un punto fijado arbitrario del arco l, distinto de los puntos a y b. Pongamos $\delta = k\,|\,t_2 - t_1\,|$. Es evidente que $k > 1$.

Designemos con $s = s(t, \tau)$ la longitud del arco menor de dos arcos del contorno L cuyos extremos son t y τ.

De las propiedades (4.3) de la suavidad del contorno L se desprende que para cualesquiera dos puntos t_1 y t_2 se puede escribir

$$s(t_1, t_2) \leqslant m\,|\,t_2 - t_1\,|, \quad (5.2)$$

donde m es una constante positiva.

La integral (5.1), que es de interés para nosotros, la representemos de la forma siguiente:

$$\psi(t_2)-\psi(t_1)=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_2)}{\tau-t_2}\,d\tau-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_1)}{\tau-t_1}\,d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l}\left\{\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_2)}{\tau-t_2}-\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_1)}{\tau-t_1}\right\}d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_2)}{\tau-t_2}\,d\tau-\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_1)}{\tau-t_1}\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l}\frac{\varphi(t_1)-\varphi(t_2)}{\tau-t_1}\,d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l}\frac{[\varphi(\tau)-\varphi(t_2)](t_2-t_1)}{(\tau-t_1)(\tau-t_2)}\,d\tau=$$

$$=I_1+I_2+I_3+I_4.$$

Razonando igual que en el p. 4.1, obtendremos la acotación de la integral

$$|I_2|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_l\left|\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_1)}{\tau-t_1}\right||d\tau|<\frac{Am}{2\pi}\int_l r^{\lambda-1}|dr|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{Am}{\pi}\int_0^{\delta} r^{\lambda-1}\,dr=A_1|t_2-t_1|^{\lambda}.$$

Aquí, y también en lo sucesivo, todos los coeficientes numéricos son ciertas constantes positivas.

Análogamente,

$$|I_1|\leqslant A_2|t_2-t_1|^{\lambda},$$

La integral I_3 se acotará así:

$$|I_3|=\frac{|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|}{2\pi}\left|\int_{L-l}\frac{d\tau}{\tau-t_1}\right|\leqslant\frac{A|t_2-t_1|^{\lambda}}{2\pi}\left|\int_{L-l}\frac{d\tau}{\tau-t_1}\right|.$$

La última integral se calcula de manera inmediata, a saber:

$$\int_{L-l}\frac{d\tau}{\tau-t_1}=\ln\frac{a-t_1}{b-t_1}.$$

Por consiguiente, está acotada en L para t_1 cualquiera. Por esto, la acotación será

$$|I_3|\leqslant A_3|t_2-t_1|^{\lambda}.$$

Pasemos a la acotación de la integral más compleja I_4. Empleando la condición de Hölder y la desigualdad (4.3) obtendremos

$$|I_4| \leqslant A \frac{|t_2-t_1|}{2\pi} \int_{L-l} \frac{|d\tau|}{|\tau-t_1|\,|\tau-t_2|^{1-\lambda}} \leqslant$$

$$\leqslant A' |t_2-t_1| \int_{L-l} |\tau-t_1|^{\lambda-2} \left|\frac{\tau-t_1}{\tau-t_2}\right|^{1-\lambda} |d\tau|.$$

Y como

$$|\tau - t_1| \geqslant \delta = k\,|t_2 - t_1|,$$

entonces

$$k\,|\tau - t_2| \geqslant k\,[\,|\tau - t_1| - |t_1 - t_2|\,] \geqslant (k-1)\,|\tau - t_1|$$

y, por lo tanto,

$$|I_4| \leqslant A'' \left(\frac{k}{k-1}\right)^{1-\lambda} |t_1-t_2| \int_R^{\delta} r^{\lambda-2}\,dr,$$

donde

$$R = \max_{\tau \in L-l} |\tau - t_1|.$$

Si es que $\lambda < 1$, entonces, al calcular la última integral, encontramos

$$|I_4| \leqslant A_4\,|t_2 - t_1|^{\lambda}.$$

Si $\lambda = 1$, de la misma manera encontramos la acotación

$$|I_4| \leqslant A_4'\,|t_2 - t_1|\,|\ln t_2 - t_1|.$$

Al tomar en consideración que $|\ln x|$ crece, cuando $x \to 0$, menos rápido que cualquier potencia negativa $|x|^{-\varepsilon}$ ($\varepsilon < 0$), resulta

$$|I_4| \leqslant A_4''\,|t_2 - t_1|^{1-\varepsilon}.$$

Al cotejar las acotaciones para I_1, I_2, I_3 y I_4, y al observar que para $\lambda = 1$ el exponente λ en las acotaciones de I_1, I_2, I_3 puede ser sustituido por $1 - \varepsilon$, nos convencemos de que la afirmación del teorema es justa.

La demostración se ha efectuado para un contorno cerrado. No obstante, de la observación hecha en el p. 4.2 sobre el paso del contorno abierto al cerrado se infiere, evidentemente, que el teorema queda en vigor también para un contorno abierto, excluidos los extremos de éste.

De la demostración del teorema sobre las propiedades de los valores límites de la integral de tipo de Cauchy se deduce directa-

mente la siguiente propiedad de la integral en el sentido de valor principal de Cauchy:

Si $\varphi(t)$ *en el contorno cerrado y suave* L *satisface la condición de Hölder con exponente* λ, *entonces*

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau - t}$$

también satisface esta misma condición y, además, con el mismo exponente, si $\lambda < 1$, *y con el exponente* $1 - \varepsilon$ (*donde* ε *es un número positivo tan pequeño como se quiera*), *si* $\lambda = 1$.

Esta afirmación, al igual que el teorema antecedente, se generaliza con facilidad (véase [16], pág. 57) para el caso en que la densidad de la integral $\varphi(\tau, \zeta)$ depende de cierto parámetro ζ, con la particularidad de que respecto de ζ la densidad también satisface la condición de Hölder. En particular, puede resultar que $\zeta = t$.

5.2. Amplicación de las suposiciones. Como ya se ha indicado, las suposiciones fundamentales, a base de las cuales se deducían las propiedades de los valores límites de la integral de tipo de Cauchy (§§ 4,5) —la suavidad del contorno y la condición de Hölder para la densidad— son sólo suficientes, pero no necesarias.

En el p. 4.5 se ha efectuado, por ejemplo, una generalización de las fórmulas de Sojotski para el caso de un contorno que tiene un número finito de puntos angulares. Señalemos brevemente otras generalizaciones posibles.

Las condiciones impuestas sobre el contorno y la densidad pueden ser ampliadas en dos direcciones: 1) en aquella, para la cual se conserva la propiedad, de tender uniformemente al límite en todos los puntos del contorno, al aproximarse por una vía cualquiera, y, como consecuencia, el mantenimiento de la condición de que los valores límites sean funciones continuas en el contorno, y 2) en la dirección, para la cual los valores límites existen sólo en casi todo punto (a excepción del conjunto de puntos del contorno de medida nula) y únicamente por unas vías que no sean tangentes al contorno.

Consideraremos al principio las generalizaciones del primer tipo, quedándonos en este caso dentro del cuadro de la definición clásica de integral de Riemann. El problema, como acabamos de ver, se reduce a la investigación de la integral

$$\int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t}\, dt.$$

Sea $s(t_1, t_2)$ la longitud del arco del contorno L comprendido entre los puntos t_1 y t_2, y designemos con $r(t_1, t_2) = |t_1 - t_2|$ la longitud de la cuerda de dicho arco.

Si nos adherimos a la condición de que la razón de la longitud del arco a la cuerda sea una magnitud acotada (la clase de curvas que satisfacen esta condición incorpora las curvas suaves a trozos), entonces, para que la expresión $\frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t}$ sea integrable, es suficiente exigir (como se ha hecho antes) que la función $\varphi(t)$ satisfaga la condición de Hölder.

La condición de integrabilidad se cumplirá también si sobre la función $\varphi(t)$ se imponen unas restricciones más débiles: por ejemplo, se exige que se verifique la desigualdad

$$|\varphi(\tau) - \varphi(t)| < \frac{A}{|\ln|\tau - t||^p} \quad (p > 1)$$

o una condición más general aún

$$|\varphi(\tau)-\varphi(t)|<$$

$$<\frac{A}{|\ln|\tau-t||\,|\ln|\ln|\tau-t|||\ldots|\ln_k|\ln\ldots|\ln|\tau-t||\ldots||^p} \quad (p>1).$$

Las magnitudes en los segundos miembros de las últimas desigualdades tienden a cero, cuando $|\tau-t|\to 0$, de una manera más lenta que $|\tau-t|^\lambda$, por lo que la clase de funciones, que satisfacen las últimas condiciones, incorpora la clase de las funciones que satisfacen la condición de Hölder. Entre las condiciones de integrabilidad la más general es la de Dini

$$\int_0^a \frac{\omega(s)}{s}\,ds<+\infty \quad (0<a<+\infty),$$

donde $\omega(s)$ es el módulo de continuidad de la función $\varphi(t)$ (véase la nota de referencia en el p. 4.1).

Si ampliamos la clase de contornos en consideración, nos veremos obligados a hacer más estrecha la clase de funciones admisibles $\varphi(t)$. De confirmación ilustrativa de esta tesis sirve el siguiente teorema [1]).

1) *Si el contorno, que representa en sí una curva rectificable de Jordan, y la densidad de una integral de tipo de Cauchy satisfacen las condiciones*

$$s(t_1, t_2)<C\,|t_1-t_2|^\alpha \quad (0<\alpha\leqslant 1),$$

$$|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|<A\,|t_1-t_2|^\beta \quad (1-\alpha<\beta\leqslant 1),$$

entonces la integral de tipo de Cauchy tiene valores límites continuos en todos los puntos del contorno, a excepción, quizás, de sus extremos.

2) *Si el contorno L es una curva rectificable de Jordan y si la densidad* $\varphi(t)$ *satisface la condición de Lipschitz*

$$|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|<A\,|t_1-t_2|,$$

la integral de tipo de Cauchy tiene en el contorno L valores límites continuos, a excepción, quizás, de sus extremos.

Las generalizaciones de segundo tipo, relacionadas con la consideración de las integrales de Lebesgue y de Stieltjes y aún más generales, actualmente representan, en lo esencial, un interés teórico y hasta ahora han sido poco usadas para las aplicaciones prácticas.

Sin entrar en detalles enunciaremos un resultado más general que se debe a I. I. Priválov [2]).

TEOREMA. Sea L una curva rectificable cerrada de Jordan cuya longitud es l; θ sea el ángulo formado por la dirección positiva del eje Ox y una tangente a L, y $F(s)$ sea una función compleja del arco s de variación limitada en el segmento $[0, l]$. En este caso la integral de tipo de Cauchy — Stieltjes

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^l \frac{e^{i\theta(\sigma)}\,dF(\sigma)}{\tau(\sigma)-z}$$

[1]) Véase, por ejemplo, [18], pág. 197.
[2]) Véase [18], cap. III.

tiene valores límites finitos por todas las vías no tangentes en casi todo punto del contorno L y estos valores satisfacen las correlaciones

$$\Phi^{\pm}(t) = \pm \frac{1}{2} F'(s) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{i\theta(\sigma)} dF(\sigma)}{\tau(\sigma) - t},$$

donde la integral en el segundo miembro está definida como singular.

En particular, si $F(s)$ es absolutamente continua, la integral de tipo de Cauchy-Stieltjes se transforma en la integral de tipo de Cauchy — Lebesgue $\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau$, donde $\varphi(t) = \varphi[t(s)] = F'(s)$ en casi todo punto de L, en tanto que las fórmulas antecedentes se transforman en las ordinarias de Sojotski (4.8).

5.3. Integral de tipo de Cauchy en las clases L_p. Desde el punto de vista de ser aplicadas a los problemas de contorno, el mayor interés representan aquí las obras de B. V. Jvedelidze [30], referentes a la teoría de la integral de tipo de Cauchy cuya densidad pertenece a la clase L_p, $p > 1$ (integrables en la potencia p según Lebesgue). Enunciaremos dos resultados fundamentales que serán usados en lo sucesivo (p. 16.3).

1. Si $\varphi(t) \in L_p$, la integral singular

$$S\varphi = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

también pertenece a la misma clase L_p. Los valores límites de la integral de tipo de Cauchy a lo largo de todas las vías no tangentes existen en casi todo punto y para ellos se verifican las fórmulas de Sojotski (4.8).

2. El operador singular S en la norma del espacio L_p ($p > 1$) es un operador acotado, es decir

$$\| S\varphi \|_{L_p} = \left(\int_L \left| \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \right|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant M_p \left(\int_L |\varphi(\tau)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} = M_p \| \varphi \|_{L_p},$$

donde M_p es una constante no dependiente de φ. Se considera que el contorno L es la curva de Liapunov (el ángulo $\alpha(s)$, formado por la tangente al contorno y el eje Ox, satisface la condición del Hölder).

La demostración está basada en el empleo del resultado correspondiente de Riesz para la integral con núcleo de Hilbert y la investigación de la integral

$$\int_L \varphi'(\tau) \left[\frac{d\tau}{\tau - t} - \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma \right],$$

en la cual, con las suposiciones admitidas respecto al contorno, el integrando tendrá una singularidad de orden inferior a la unidad.

§ 6. Fórmulas de Hilbert para los valores límites de las partes real e imaginaria de la función analítica.

6.1. Núcleo de Cauchy y núcleo de Schwarz. Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una función analítica en un círculo unitario. Designaremos con s y σ las longitudes de los arcos de la circunferencia medidos a partir del punto de su intersección con la dirección positiva del eje Ox.

Supongamos, además, que la función continua $u(s)$ es un valor límite de la parte real de la función $f(z)$ en el contorno del círculo.

En este caso, como se sabe (véase el final del p. 27.2), la fórmula de Schwarz

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\sigma) \frac{e^{i\sigma} + z}{e^{i\sigma} - z} d\sigma + iv_0$$

presta la oportunidad de expresar la función $f(z)$, analítica en el círculo $|z| < 1$, en términos de los valores de su parte real en la circunferencia, salvo el sumando imaginario constante iv_0. Haciendo en (6.1) $z = 0$, y empleando el teorema de la media, encontrams que

$$v_0 = v(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\sigma)\, d\sigma. \tag{6.2}$$

La expresión $\frac{e^{i\sigma} + z}{e^{i\sigma} - z}$ se denomina *núcleo de Schwarz*. El núcleo de Schwarz y el de Cauchy están enlazados mediante una correlación sencilla. Al designar con τ la coordenada compleja del punto de la circunferencia ($\tau = e^{i\sigma}$), obtenemos

$$\frac{e^{i\sigma} + z}{e^{i\sigma} - z} d\sigma = \left(-1 + \frac{2e^{i\sigma}}{e^{i\sigma} - z} \right) d\sigma = \frac{2}{i} \frac{d\tau}{\tau - z} - d\sigma. \tag{6.3}$$

De aquí se deduce que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\sigma) \frac{e^{i\sigma} + z}{e^{i\sigma} - z} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2u(\sigma)}{\tau - z} d\tau - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\sigma)\, d\sigma. \tag{6.4}$$

La última fórmula que establece la relación entre la integral de Schwarz y la integral de tipo de Cauchy con densidad real calculada en el contorno del círculo unitario, se utilizará en el punto que sigue.

6.2. Fórmulas de Hilbert. Obtendremos las correlaciones que ligan valores límites en el contorno de las partes real e imaginaria de una función analítica en el círculo unitario.

En las fórmulas (6.1) y (6.4) pasemos al límite cuando z tiende al punto de la circunferencia unitaria $t = e^{is}$, y hagamos uso de la fórmula de Sojotski (4.8). Se tiene

$$u(s) + iv(s) = \frac{1}{2} 2u(s) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2u(\sigma)}{\tau - t} d\tau - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\sigma)\, d\sigma + iv_0.$$

Al reducir y reunir ambas integrales del segundo miembro, tenemos

$$v(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} u(\sigma) \frac{e^{i\sigma} + e^{is}}{e^{i\sigma} - e^{is}} d\sigma + v_0. \tag{6.5}$$

Multiplicando el numerador y el denominador en el núcleo de la integral por $e^{-i\frac{\sigma+s}{2}}$, obtendremos

$$\frac{e^{i\sigma} + e^{is}}{e^{i\sigma} - e^{is}} = \frac{e^{i\frac{\sigma-s}{2}} + e^{-i\frac{\sigma-s}{2}}}{e^{i\frac{\sigma-s}{2}} - e^{-i\frac{\sigma-s}{2}}} = \frac{1}{i} \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2}.$$

Por consiguiente,

$$v(s) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma + v_0. \tag{6.6}$$

Esta fórmula ofrece la expresión del valor de contorno de la parte imaginaria de una función analítica en términos de la parte real.

Con el objeto de expresar $u(s)$ en términos de $v(s)$, observemos que para la función

$$-if(z) = v - iu$$

v sirve de parte real, mientras que u es la parte imaginaria. Aplicando la fórmula (6.6) a la última función, obtenemos

$$u(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma + u_0 \quad (u_0 = u(0, 0)). \tag{6.7}$$

Las fórmulas simétricas (6.6) y (6.7) llevan el nombre de *fórmulas de inversión de Hilbert*, mientras que la expresión $\operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2}$ se denomina *núcleo de Hilbert*.

Cuando $\sigma = s$, el núcleo se convierte en el infinito de primer orden, de suerte que las integrales que figuran en la fórmula de Hil-

bert son singulares y deben entenderse en el sentido del valor principal. Las fórmulas de inversión (6.6) y (6.7) se pueden interpretar como solución de la ecuación integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma = c(s)$$

(véase el p. 31.3).

No vamos a analizar aquí la cuestión bastante compleja acerca de las condiciones menos restrictivas a las cuales deben ser sometidas las funciones $u(s)$ y $v(s)$ para que las fórmulas (6.6) y (6.7) tengan lugar. Nos limitaremos a una afirmación obvia de que para esto es suficiente que dichas fórmulas satisfagan la condición de Hölder.

De suplemento al párrafo presente sirven los problemas **14**, **16**, **23**, **25**, **29** al final del capítulo.

§ 7. Inversión del orden de integración en la integral singular reiterada

7.1. El caso en que una integral es ordinaria. Antes de proceder a la investigación del problema sobre la inversión del orden de integración en las integrales singulares reiteradas, consideremos previamente un caso más simple, cuando en la integral reiterada una integral es singular y la otra, ordinaria.

Examinemos una integral reiterada

$$I = \int_L \omega(\tau, z)\,d\tau \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1-\tau}\,d\tau_1 \tag{7.1}$$

y una integral que se obtuvo después de invertir el orden de integración

$$I' = \int_L d\tau_1 \int_L \frac{\omega(\tau, z)\,\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1-\tau}\,d\tau. \tag{7.2}$$

LEMA. *Supóngase que la función* $\varphi(\tau, \tau_1)$ *satisface la condición de Hölder según ambas variables, y* $\omega(\tau, z)$ *satisface la condición de Hölder según* τ *para todo valor fijado de* z *del conjunto considerado; sea* L *un contorno suave.*

En este caso la integral (7.1) *admite la inversión del orden de integración*[1]), *es decir,*

$$\int_L \omega(\tau, z)\,d\tau \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1-\tau}\,d\tau_1 = \int_L d\tau_1 \int_L \frac{\omega(\tau, z)\,\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1-\tau}\,d\tau. \tag{7.3}$$

Para demostrar, dividamos el contorno de integración en la integral I según la variable τ_1 en dos partes: el arco l, recortado de L

[1]) El resultado es válido también para las suposiciones más débiles respecto de $\varphi(\tau, \tau_1)$.

por una circunferencia de radio δ, que tiene $\tau_1 = \tau$ por su centro, y el arco $L - l$. Para la integral I' hagamos lo mismo, al elegir el centro de la circunferencia en el punto $\tau = \tau_1$.

Designemos

$$I = I_0 + I_\delta,$$

donde

$$I_0 = \int_L \omega(\tau, z)\, d\tau \int_{L-l} \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1 - \tau}\, d\tau_1$$

y

$$I_\delta = \int_L \omega(\tau, z)\, d\tau \int_l \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1 - \tau}\, d\tau_1.$$

De un modo análogo dividamos también la integral I':

$$I' = I'_0 + I'_\delta.$$

En las integrales reiteradas I_0, I'_0 todas las integrales son ordinarias y admiten la inversión del orden de integración [1]), es decir,

$$I_0 = I'_0.$$

Por esta razón

$$|I - I'| = |I_\delta - I'_\delta| \leqslant |I_\delta| + |I'_\delta|.$$

Acotemos dos últimas integrales.

En la integral interior de la integral reiterada

$$I_\delta = \int_L \omega(\tau, z)\, d\tau \int_l \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1 - \tau}\, d\tau_1$$

realicemos una transformación habitual

$$\int_l \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1 - \tau} d\tau_1 = \int_l \frac{\varphi(\tau, \tau_1) - \varphi(\tau, \tau)}{\tau_1 - \tau}\, d\tau_1 + \varphi(\tau, \tau) \int_l \frac{d\tau_1}{\tau_1 - \tau}.$$

La primera integral en el segundo miembro ya se ha considerado en el p. 4.1. Para δ suficientemente pequeño, su módulo puede hacerse inferior al número positivo $\varepsilon/4M$, donde

$$M = \text{máx} \left| \int_L \omega(\tau, z)\, d\tau \right|.$$

---

[1]) La igualdad se hará especialmente ilustrativa, si determinamos la posición de los puntos τ y τ_1 del contorno L por las abscisas de arco s y s_1 ($0 \leqslant s \leqslant l$, $0 \leqslant s_1 \leqslant l$, donde l, es la longitud del contorno L) y las consideramos como coordenadas rectangulares del punto en un plano auxiliar Oss_1. En este caso el dominio de integración en ambas integrales I_0 y I'_0 será un cuadrado de lado l, del cual será excluida una banda estrecha a lo largo de la diagonal.

A continuación, designando con τ', τ'' los extremos del arco l y empleando la fórmula (3.6), obtenemos

$$\int_l \frac{d\tau}{\tau_1-\tau} = \ln \frac{\tau''-\tau}{\tau-\tau'} = i\,[\arg(\tau''-\tau) - \arg(\tau-\tau')] = i\alpha,$$

donde α es el ángulo formado por las secantes (fig. 6).

Cuando δ es suficientemente pequeño, debido a la suavidad de la curva, este ángulo puede ser hecho tan pequeño como se quiera. Por consiguiente, se puede conseguir la acotación

$$\left|\varphi(\tau,\ \tau)\int_l \frac{d\tau_1}{\tau_1-\tau}\right| < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

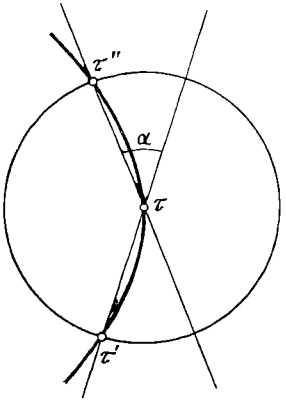


Fig. 6

Entonces

$$|I_\delta| < 2\frac{\varepsilon}{4M}\left|\int_L \omega(\tau,\ z)\,d\tau\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Con los razonamientos análogos se puede conseguir la acotación

$$|I'_\delta| < \frac{\varepsilon}{2},$$

de donde

$$|I - I'| < \varepsilon.$$

Pero, por otra parte, la diferencia $I - I'$ no depende, evidentemente, de la magnitud δ, razón por la cual

$$I - I' = 0,$$

lo que se trataba de demostrar.

7.2. Fórmula de inversión. Examinemos un par de integrales singulares reiteradas, que difieren en orden de integración:

$$I(t) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau-t}\,\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\ \tau_1)}{\tau_1-\tau}\,d\tau_1, \tag{7.4}$$

$$I_1(t) = \frac{1}{\pi i}\int_L d\tau_1\,\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\ \tau_1)}{(\tau-t)(\tau_1-\tau)}\,d\tau. \tag{7.5}$$

Las dos integrales tienen sentido. En efecto, la primera de ellas

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\chi(\tau)\,d\tau}{\tau-t},$$

donde

$$\chi(\tau) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\ \tau_1)}{\tau_1-\tau}\,d\tau_1$$

existe en sentido del valor principal de Cauchy, puesto que, en virtud del p. 5.1, la densidad $\chi(\tau)$ satisface la condición de Hölder. En la segunda integral realicemos las siguientes transformaciones.

Descompongamos la función $\frac{1}{(\tau-t)(\tau_1-\tau)}$ en fracciones simples:

$$\frac{1}{(\tau-t)(\tau_1-\tau)} = \frac{1}{\tau_1-t}\left[\frac{1}{\tau-t} - \frac{1}{\tau-\tau_1}\right]. \tag{7.6}$$

Entonces, introduciendo la designación

$$\omega(\zeta, \tau_1) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau-\zeta}\, d\tau,$$

tendremos

$$I_1 = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\omega(t, \tau_1) - \omega(\tau_1, \tau_1)}{\tau_1 - t}\, d\tau_1.$$

Conforme al teorema del p. 5.1, $\omega(\zeta, \tau_1)$ satisface la condición de Hölder, por consiguiente, la integral I_1 existe como impropia.

El razonamiento realizado es lícito para todos los puntos t, que no sean los extremos del contorno. Para los últimos se debería realizar una investigación adicional. Pero, en esta materia no nos detenemos aquí.

Aunque las integrales I y I_1 se diferencian sólo en orden de integración, ellas no son iguales, lo que demuestra la siguiente fórmula de inversión de Poincaré—Bertrand:

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau-t}\,\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1-\tau}\, d\tau_1 =$$

$$= \varphi(t, t) + \frac{1}{\pi i}\int_L d\tau_1 \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{(\tau-t)(\tau_1-\tau)}\, d\tau. \tag{7.7}$$

Para la demostración formemos las funciones $I(z)$, $I_1(z)$, sustituyendo la variable t en las integrales $I(t)$, $I_1(t)$ por la variable z que varía en todo el plano:

$$I(z) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau-z}\,\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1-\tau}\, d\tau_1, \tag{7.8}$$

$$I_1(z) = \frac{1}{\pi i}\int_L d\tau_1 \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{(\tau-z)(\tau_1-\tau)}\, d\tau. \tag{7.9}$$

A base del lema anterior, para todo z, que no está dispuesto en L, se puede invertir el orden de integración. Por esto,

$$I(z) = I_1(z).$$

Designando del modo aceptado los valores límites de estas funciones, tendremos

$$I^+(t) = I_1^+(t), \quad I^-(t) = I_1^-(t).$$

Pero, según la fórmula (4.10)

$$I(t) = \frac{1}{2}[I^+(t) + I^-(t)],$$

o, haciendo uso de las igualdades anteriores,

$$I(t) = \frac{1}{2}[I_1^+(t) + I_1^-(t)]. \tag{7.10}$$

Al aprovechar la descomposición (7.6), representemos $I_1(z)$ en la forma

$$I_1(z) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{d\tau_1}{\tau_1 - z}\,\frac{1}{\pi i}\left[\int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau - z}\,d\tau - \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau - \tau_1}\,d\tau\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\psi(z, \tau_1)}{\tau_1 - z}\,d\tau_1.$$

La última expresión muestra, que $I_1(z)$ es una integral de tipo de Cauchy con la densidad

$$\psi(z, \tau_1) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau - z}\,d\tau - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau - \tau_1}\,d\tau,$$

dependiente del parámetro z.

Rigiéndonos por las fórmulas de Sojotski (4.7), (4.8), calculemos los valores de $I_1^+(t)$ y $I_1^-(t)$, tomando en consideración que a título del valor de la densidad $\psi(z, t)$ en el punto t se debe tomar $\lim_{z \to t} \psi(z, t)$, que es igual a $\psi^+(t, t)$ cuando $z \to t$, quedándose a la izquierda de L, y a $\psi^-(t, t)$ para $z \to t$ a la derecha de L[1]).

De este modo

$$I_1^+(t) = \psi^+(t, t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\psi^+(t, \tau_1)}{\tau_1 - t}\,d\tau_1,$$

$$I_1^-(t) = -\psi^-(t, t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\psi^+(t, \tau_1)}{\tau_1 - t}\,d\tau_1,$$

[1]) Aquí no argumentamos la posibilidad de aplicar las fórmulas de Sojotski para el caso en que la densidad de la integral de tipo de Cauchy depende de z (véase [16], pág. 128).

de donde

$$\frac{1}{2}[I_1^+(t)+I_1^-(t)]=\frac{1}{2}[\psi^+(t,\ t)-\psi^-(t,\ t)]+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\psi^+(t,\ \tau_1)+\psi^-(t,\ \tau_1)}{\tau_1-t}\,d\tau_1. \qquad (7.11)$$

Pero, de acuerdo con las fórmulas (4.9) y (4.10)

$$\frac{1}{2}[\psi^+(t,\ t)-\psi^-(t,\ t)]=\varphi(t,\ t),$$

$$\frac{1}{2}[\psi^+(t,\ \tau_1)+\psi^-(t,\ \tau_1)]=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\ \tau_1)}{\tau-t}\,d\tau-\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\ \tau_1)}{\tau-\tau_1}\,d\tau=$$
$$=\frac{t-\tau_1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\ \tau_1)}{(\tau-t)(\tau-\tau_1)}\,d\tau.$$

Sustituyendo las últimas expresiones en la fórmula (7.11) y recurriendo a (7.10), obtenemos la fórmula requerida (7.7).

La fórmula de inversión puede escribirse también en la siguiente forma

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau-t}\int_L \frac{\varphi(\tau,\ \tau_1)}{\tau_1-\tau}\,d\tau_1=-\pi^2\varphi(t,\ t)+$$
$$+\int_L d\tau_1\int_L \frac{\varphi(\tau,\ \tau_1)}{(\tau-t)(\tau_1-\tau)}\,d\tau. \qquad (7.7')$$

La demostración citada aquí se debe a N. I. Musjelishvili [16]. Existe también otra deducción de la fórmula de inversión (véanse los problemas 27, 28 al final del capítulo).

7.3. Inversión de la integral singular con núcleo de Cauchy para un contorno cerrado. Veamos cómo se aplica la fórmula de inversión (7.7) a la deducción de la fórmula de inversión de la integral singular con núcleo de Cauchy para un contorno cerrado.

Sea dada una integral singular

$$\psi(t)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau. \qquad (7.12)$$

Planteemos el problema: expresar la densidad $\varphi(t)$ en términos del valor de la propia integral, es decir, en términos de la función $\psi(t)$. Sustituyendo en ambos miembros la variable t por τ_1, multipliquemos por $\frac{1}{\pi i}\frac{d\tau_1}{\tau_1-t}$, integremos a lo largo del contorno L e inver-

tamos según la fórmula (7.7), el orden de integración. Obtendremos

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\psi(\tau_1)}{\tau_1 - t}\,d\tau_1 = \varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \varphi(\tau)\,d\tau \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{d\tau_1}{(\tau_1 - t)(\tau - \tau_1)}.$$

Pero

$$\int\limits_L \frac{d\tau_1}{(\tau_1 - t)(\tau - \tau_1)} = \frac{1}{\tau - t}\left[\int\limits_L \frac{d\tau_1}{\tau_1 - t} - \int\limits_L \frac{d\tau_1}{\tau_1 - \tau}\right] = \frac{1}{\tau - t}(i\pi - i\pi) = 0.$$

De este modo tenemos

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\psi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau. \tag{7.13}$$

La última fórmula es precisamente la fórmula de inversión de una integral singular; es recíproca a la fórmula (7.12).

Si designamos con S el operador de integración singular $\left(S\varphi = \frac{1}{\pi i} \times \right.$ $\left. \times \int\limits_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - t}\right)$ y con I, el operador unitario ($I\varphi \equiv \varphi$), las correlaciones (7.12) y (7.13) en forma operadora se expresarán así

$$S^2 = I.$$

Observemos que las fórmulas (7.12) y (7.13) son afines a las de inversión de Hilbert (6.6) y (6.7). Las últimas se deducen sin dificultad alguna de las fórmulas de inversión (7.12) y (7.13) de la integral singular de Cauchy, aprovechando la relación que existe entre los núcleos de Cauchy y de Hilbert (véase § 6), y se pueden considerar como fórmulas de inversión de una integral singular con núcleo de Hilbert cgt $\frac{\sigma - s}{2}$ (véase el p. 6.2).

§ 8. Comportamiento de la integral de tipo de Cauchy en los extremos del contorno de integración y en los puntos de discontinuidad de la densidad

8.1. Caso de la densidad que satisface la condición de Hölder hasta los extremos. Al investigar en el § 5 el comportamiento de los valores límites de la integral de tipo de Cauchy en el contorno, los extremos del contorno siempre se excluían de la consideración. El hecho de que el extremo es un punto excepcional se ve siquiera de lo que él no puede ser encerrado dentro del intervalo bilateral y, por lo tanto, no se puede definir la integral singular como su valoré principal. Pasemos al estudio del comportamiento de la integral de tipo de Cauchy en los extremos del contorno.

Sea L un contorno abierto, cuyos extremos son a y b, y supongamos que $\varphi(t)$ satisface la condición de Hölder en toda la curva incluyendo los extremos.

Consideremos una integral de tipo de Cauchy

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau.$$

Procediendo igual que en el p. 3.4, representemos $\Phi(z)$ así:

$$\Phi(z) = \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \int_L \frac{d\tau}{\tau - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - z} d\tau =$$

$$= \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \ln \frac{b - z}{a - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - z} d\tau,$$

donde t es punto cualquiera del contorno L.

Para $z = t$ la última integral existe como impropia. Por esto, representa una función que es acotada y tiende a un límite determinado, al aproximarse el punto z a cualquier punto del contorno, incluyendo sus extremos (véase el p. 4.1). La singularidad principal para $\Phi(z)$ en los extremos la proporciona el primer término.

Haciendo sucesivamente en la última expresión $t = a$, $t = b$ obtenemos

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= -\frac{\varphi(a)}{2\pi i} \ln(z - a) + \Phi_1(z), \\ \Phi(z) &= \frac{\varphi(b)}{2\pi i} \ln(z - b) + \Phi_2(z), \end{aligned} \tag{8.1}$$

donde $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$ son funciones acotadas en los entornos de los extremos correspondientes y que tienden a los límites determinados cuando z tiende, respectivamente, hacia a o b.

Así pues, en los extremos del contorno la integral de tipo de Cauchy tiene singularidades de carácter logarítmico que son plenamente determinadas por los valores $\varphi(a)$ y $\varphi(b)$.

8.2. Caso de la discontinuidad de primera especie. Examinemos, ahora, una cuestión parecida acerca del comportamiento de una integral de tipo de Cauchy en los puntos, donde la densidad tiene discontinuidad de primera especie. Sea c el punto de discontinuidad. Convengamos en que los puntos precedentes al punto c, desplazándose a lo largo del contorno en el sentido positivo, constituyen el entorno izquierdo del punto c. y los puntos que siguen después del punto c, el entorno derecho. Los límites de $\varphi(t)$ a la derecha y la izquiera los designaremos, como siempre, con $\varphi(c \pm 0)$.

Dividamos la integral en el contorno ab en dos integrales de los tramos ac y cb:

$$\int_{ab} = \int_{ac} + \int_{cb}.$$

En este caso, c será, respectivamente, el extremo derecho e izquierdo de los contornos parciales, con la particularidad de que en la primera integral se debe considerar $\varphi(c) = \varphi(c - 0)$, y en la segunda, $\varphi(c) = \varphi(c + 0)$.

Aplicando las fórmulas (8.1), obtendremos la representación

$$\Phi(z) = \frac{\varphi(c-0) - \varphi(c+0)}{2\pi i} \ln(z-c) + \Phi_0(z), \tag{8.2}$$

donde $\Phi_0(z)$ posee en el entorno del punto c las mismas propiedades que las funciones $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$ en las fórmulas (8.1). Las fórmulas (8.1) y (8.2) serán esencialmente usadas en lo sucesivo.

8.3. Caso particular de la singularidad de carácter potencial. Antes de pasar a la investigación general del comportamiento de una integral de tipo de Cauchy en los puntos, donde la densidad se convierte en el infinito de orden potencial, examinemos una integral de tipo de Cauchy de forma particular

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{d\tau}{(\tau - t_0)^{\gamma}(\tau - z)}$$

$$(\gamma = \alpha + i\beta, \quad 0 \leqslant \alpha < 1) \tag{8.3}$$

donde t_0 es un punto determinado del contorno.

En la consideración de esta integral surgen ciertas dificultades específicas que provienen del hecho de que tanto el integrando como la propia integral son multiformes. Se debe observar con atención, por medio de qué corte en el plano de la variable compleja se destinguen las ramas unívocas de las funciones en consideración. Los problemas de este género ya se consideraban en los pp. 3.4, 3.5 y los trataremos aún en el cap. VI.

Investigaremos la integral $\Omega(z)$ para diferentes posiciones del punto t_0.

1°. EL PUNTO t_0 COINCIDE CON EL EXTREMO IZQUIERDO ($t_0 = a$). Tomaremos una función multiforme $(t - a)^{-\gamma}$ por valor de contorno de la función analítica $(z - a)^{-\gamma}$. Esta última se considerará como una función uniforme en el plano cortado a lo largo de una cierta línea que une los puntos de ramificación a y ∞. Convengamos en efectuar el corte por el contorno L. Elijamos a la izquierda del corte una rama cualquiera de esta función y, tomándola por el valor de

$(t-a)^{-\nu}$ en el contorno de integración, la aceptamos a título de la densidad de la integral (8.3); de este modo, por definición,

$$(t-a)^{-\nu} = [(t-a)^{-\nu}]^+.$$

Su valor por el lado derecho del contorno lo obtendremos efectuando el recorrido cerca del punto a en el sentido positivo (fig. 7), teniendo presente que en este caso la función potencial $(t-a)^{-\nu}$ adquiere un factor $e^{-2\pi i\nu}$.

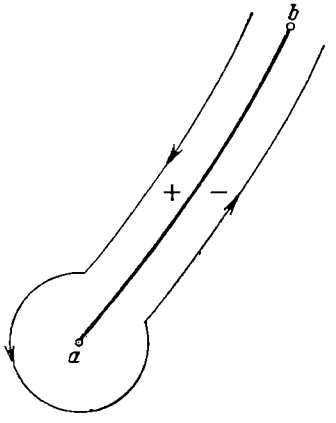


Fig. 7

Para un punto arbitrario t del contorno tendremos

$$[(t-a)^{-\nu}]^+ - [(t-a)^{-\nu}]^- = \\ = (1-e^{-2\pi i\nu})\,(t-a)^{-\nu}. \quad (8.4)$$

Probemos que en el entorno del punto $z = a$ la función $\Omega(z)$ tendrá la siguiente representación:

$$\Omega(z) = \frac{e^{i\pi\nu}}{2i \operatorname{sen} \nu\pi}(z-a)^{-\nu} + \Omega_0(z), \quad (8.5)$$

donde $\Omega_0(z)$ es una función analítica en el entorno del punto a.

Para demostrar, indiquemos, ante todo, que de acuerdo con la fórmula de Sojotski

$$\Omega^+(t) - \Omega^-(t) = (t-a)^{-\nu}. \quad (8.6)$$

Hagamos

$$\omega(z) = \frac{(z-a)^{-\nu}}{1-e^{-2\pi i\nu}} = \frac{e^{i\nu\pi}}{2i \operatorname{sen} \nu\pi}(z-a)^{-\nu}$$

y examinemos la función $\Omega(z) - \omega(z)$.

Al tomar en consideración (8.5) y (8.6), tendremos

$$[\Omega(t)]_a^+ - \omega(t)]^+ = [\Omega(t) - \omega(t)]^-. \quad (8.7)$$

Mostremos, ahora, que la función $\Omega(z) - \omega(z)$ satisface cerca del punto a la desigualdad

$$|\Omega(z) - \omega(z)| \leqslant \frac{\text{const}}{|z-a|^{\nu}} \quad (8.8)$$

donde ν es un número real que satisface las condiciones $0 \leqslant \alpha \leqslant \nu < 1$.

Al designar $z - a = \rho e^{i\theta}$, encontramos que

$$(z-a)^{-\nu} = e^{-\nu \ln (z-a)} = \rho^{-\alpha} e^{\beta\theta} e^{-i(\beta \ln \rho + \alpha\theta)} = \frac{h(z)}{|z-a|^{\alpha}}.$$

La función $h(z)$ está acotada para $z \to a$, y, por lo tanto,

$$|\omega(z)| \leqslant \frac{C_1}{|z-a|^{\alpha}} \quad (0 \leqslant \alpha < 1).$$

Pasemos a la acotación de $|\Omega(z)|$. Suponiendo $|\tau - a| = r$, y $0 \leqslant \alpha \leqslant \nu < 1$, tendremos

$$\Omega(z) = \frac{1}{\rho^{\nu}} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{(\rho^{\nu} - r^{\nu}) h(\tau)}{r^{\alpha}(\tau - z)} d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{r^{\nu-\alpha} h(\tau)}{\tau - z} d\tau \right] = \frac{1}{\rho^{\nu}} (I_1 + I_2).$$

Vamos a convencernos de que las integrales I_1 y I_2 están acotadas. Teniendo en cuenta las desigualdades[1])

$$|\rho - r| = ||z - a| - |\tau - a|| \leqslant |z - \tau|,$$

$$|\rho^{\nu} - r^{\nu}| \leqslant |\rho - r|^{\nu} \leqslant |z - \tau|^{\nu}$$

y el hecho de que $h(\tau)$ está acotada, obtenemos

$$|I_1| \leqslant C_2 \int_{ab} \frac{dr}{r^{\alpha} |r - \rho|^{1-\nu}}.$$

La última integral existe como impropia para todo ρ, y, por consiguiente, está acotada. La acotación de la integral I_2 proviene del hecho de que la función $r^{\nu-\alpha} h(\tau)$ satisface la condición de Hölder con el exponente $\nu - \alpha$ De este modo

$$|\Omega(z)| \leqslant \frac{1}{\rho^{\nu}} (|I_1| + |I_2|) \leqslant \frac{C_3}{|z-a|^{\nu}} \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant \nu < 1).$$

Ha de notarse que la igualdad (8.5), que se demuestra en adelante, presta la acotación exacta ($\nu = \alpha$). No obstante, para obtenerla, tendremos que utilizar la acotación aproximada que acabamos de deducir.

La desigualdad (8.8) se infiere de las acotaciones para $|\omega(z)|$ y $|\Omega(z)|$.

La igualdad (8.7) muestra que las funciones $[\Omega(z) - \omega(z)]^+$ y $[\Omega(z) - \omega(z)]^-$ son analíticamente prolongables a través del

[1]) La desigualdad $|\rho^{\nu} - r^{\nu}| \leqslant |\rho - r|^{\nu}$ se obtiene hallando el máximo de la función $f(x) = (1 - x^{\nu})(1 - x)^{-\nu}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, donde $x = \frac{\rho}{r} \left(x = \frac{r}{\rho} \right)$, siempre que $r > \rho$ $(r < \rho)$.

contorno ab y forman, por consiguiente, una única función analítica $\Omega(z) - \omega(z)$ para todo el plano. Esta función sólo puede tener una singularidad aislada en el punto a. En virtud de la acotación (8.8), el punto a representa una singularidad eliminable[1]). Por lo tanto, $\Omega(z) - \omega(z)$ es analítica en el entorno del punto a, lo que conduce a la representación (8.5).

Para obtener el valor de $\Omega(z)$ en el contorno, otra vez empleamos la fórmula de Sojotski (4.10):

$$\Omega(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{d\tau}{(\tau - a)^{\gamma}(\tau - t)} = \frac{1}{2}[\Omega^+(t) + \Omega^-(t)]$$

y obtenemos

$$\Omega(t) = \frac{1}{2i}(t-a)^{-\gamma} \operatorname{ctg} \gamma\pi + \Omega_0(t), \tag{8.9}$$

donde $\Omega_0(t)$ es una función analítica en el entorno del punto a.

2°. EL PUNTO t_0 COINCIDE CON EL EXTREMO DERECHO ($t_0 = b$). En este caso, a la condición de que para la función $(z-b)^{-\gamma}$ el corte, que une el punto b con ∞, pase a través del contorno L, obtendremos, empleando unos razonamientos análogos:

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= -\frac{e^{-i\gamma\pi}}{2i \operatorname{sen} \gamma\pi}(z-b)^{-\gamma} + \Omega_1(z), \\ \Omega(t) &= -\frac{1}{2i}(t-b)^{-\gamma} \operatorname{ctg} \gamma\pi + \Omega_1(t). \end{aligned} \tag{8.10}$$

Observemos, en particular, que si $\gamma = 1/2$ y, por tanto, $\operatorname{ctg} \gamma\pi = 0$, las fórmulas (8.9) y (8.10) nos dan

$$\Omega(t) = \Omega_i(t) \quad (i = 0, 1),$$

es decir, la integral singular (8.3) es una función acotada cerca de los extremos.

3°. EL PUNTO t_0 ES UN PUNTO INTERIOR DEL CONTORNO ($t_0 = c$).

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{d\tau}{(\tau - c)^{\gamma}(\tau - z)}.$$

Consideraremos que el corte para la función $(z-c)^{-\gamma}$, a partir del punto c hasta ∞, pasa por el tramo cb del contorno (fig. 8).

Dividiendo la integral en dos

$$\int_{ab} = \int_{ac} + \int_{cb},$$

[1]) Véase, por ejemplo, el teorema 2.1 del cap. II del libro de M. A. Evgráfov, Funciones analíticas (М. А. Евграфов, Аналитические функции, «Наука», 1968).

reducimos la investigación al caso en que el punto de ramificación c coincide con los extremos del contorno de integración. La segunda integral puede calcularse inmediatamente por las fórmulas (8.5) y (8.9). Para el cálculo de la primera integral se necesitarán unas consideraciones adicionales, debidas al hecho de que, a diferencia de 1°, el contorno ac no es una línea del corte. Por esta razón, la función $(z-c)^{-\nu}$ varía continuamente, al pasar a través del contorno ac:

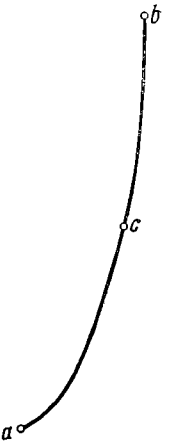


Fig. 8

$$[(t-c)^{-\nu}]^+ = [(t-c)^{-\nu}]^- \text{ en } ac. \quad (8.11)$$

Por otra parte, en virtud de la fórmula de Sojotski,

$$\Omega^+(t) - \Omega^-(t) = (t-c)^{-\nu} \text{ en } L. \quad (8.12)$$

De las últimas fórmulas se puede concluir:

1. En la representación de la función $\Omega(z)$ en el entorno del punto c participa la función $(z-c)^{-\nu}$.

2. Por distintos lados del contorno $\Omega(z)$ se representa mediante diferentes expresiones analíticas.

Buscaremos la representación del primer sumando de la función $\Omega(z)$ en el entorno del punto c en la forma siguiente: $\int_{ac} =$ $= A(z-c)^{-\nu} + \Omega_2(z)$ por el lado izquierdo del contorno, $\int_{ac} =$ $= B(z-c)^{-\nu} + \Omega_2(z)$ por el lado derecho del contorno, donde A y B son coeficientes indefinidos, y $\Omega_2(z)$ es una función analítica en el entorno del punto c. De las fórmulas (8.11) y (8.12) se deduce

$$A - B = 1. \quad (8.13)$$

Para obtener la segunda correlación que liga A y B, observemos que para la integral $\int_{ac} \frac{d\tau}{(\tau-c)^{\nu}(\tau-t)}$ es lícita la segunda de las fórmulas (8.10), independientemente de la manera de elegir la rama de la función $(z-c)^{-\nu}$. Empleando de nuevo la fórmula (4.10) obtenemos

$$A + B = -\frac{1}{i}\operatorname{ctg}\nu\pi. \quad (8.14)$$

De (8.13) y (8.14) tenemos

$$A = -\frac{e^{-\nu\pi i}}{2i \operatorname{sen}\nu\pi}, \qquad B = -\frac{e^{\nu\pi i}}{2i \operatorname{sen}\nu\pi}.$$

Por consiguiente, $\Omega(z)$ tiene en el entorno del punto c tal representación:

$$\Omega(z) = (z-c)^{-\nu} + \Omega_3(z) \text{ a la izquierda de } L, \tag{8.15}$$

$$\Omega(z) = \Omega_4(z) \text{ a la derecha de } L, \tag{8.16}$$

$$\Omega(t) = \frac{1}{2}(t-c)^{-\nu} + \Omega_5(t) \text{ en } L. \tag{8.16'}$$

Todas las $\Omega_i(z)$ son funciones analíticas en el entorno del punto c.

8.4. Caso general de la singularidad de orden potencial. Sea $\varphi^*(\tau)$ una función que satisface la condición de Hölder en el arco cerrado ab con el exponente λ.

Consideremos la integral

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{ab} \frac{\varphi^*(\tau)}{(\tau-c)^{\gamma}(\tau-z)}\,d\tau \quad (\gamma = \alpha + i\beta,\ 0 \leqslant \alpha < 1) \tag{8.17}$$

y la escribamos en la forma siguiente:

$$\Phi(z) = \frac{\varphi^*(c)}{2\pi i}\int_{ab} \frac{d\tau}{(\tau-c)^{\gamma}(\tau-z)} + \frac{1}{2\pi i}\int_{ab} \frac{\varphi^*(\tau)-\varphi^*(c)}{(\tau-c)}\,\frac{d\tau}{\tau-z}. \tag{8.18}$$

El primer sumando es una integral investigada en el p. 8.3. Procedamos a la investigación del comportamiento de la segunda integral, cuando $z \to c$. La función

$$(t-c)^{i\beta} = e^{i\beta[\ln|t-c|+i\theta]} = e^{-\beta\theta}[\cos(\beta \ln|t-c|) + i \operatorname{sen}(\beta \ln|t-c|)]$$

será discontinua en el punto c, pero acotada. Teniendo esto en cuenta, se puede mostrar (en lo que no nos detenemos) que la función $(t-c)^{\alpha+i\beta}$, para $\alpha > 0$, satisface la condición de Hölder con el exponente α.

Entonces

$$\left|\frac{\varphi^*(t)-\varphi^*(c)}{(t-c)^{\gamma}}\right| < A\,|t-c|^{\lambda-\alpha}. \tag{8.19}$$

Si $\alpha = 0$, tiene lugar la acotación

$$\left|\frac{\varphi^*(t)-\varphi^*(c)}{(t-c)^{i\beta}}\right| < A\,|t-c|^{\lambda-\varepsilon} \tag{8.19'}$$

donde ε es un número positivo tan pequeño como se quiera.

De las últimas acotaciones se infiere:

1. Si $\alpha < \lambda$ (incluido el caso de que $\alpha = 0$), el integrando de la segunda integral en la fórmula (8.18) satisface, en virtud de (8.19), la condición de Hölder y, por tanto, la propia integral representa la función $\Phi_0(z)$ que es acotada y tiende a un límite determinado, cuando $z \to c$.

2. Si $\alpha \geqslant \lambda$, entonces $\Phi_0(z)$ representa una función que no está acotada en el entorno del punto c, pero tiene el orden del infinito inferior a α.

La demostración completa de las afirmaciones citadas está relacionada con cálculos voluminosos que no damos aquí. Una exposición detallada el lector la puede sacar de la obra [16].

Sin entrar en pormenores, consideremos el caso en que la función $\varphi^*(t)$ tiene en el punto c una discontinuidad de primera especie. Al dividir el contor-

no L en dos tramos, ac y cb, $\varphi^*(t)$ satisfará la condición de Hölder en cada uno de los arcos cerrados.

Efectuemos una partición de la integral (8.17) en dos integrales de los tramos ac, cb. A cada una de las integrales obtenidas apliquemos la transformación que conduce a la forma (8.18). A las integrales

$$\frac{\varphi^*(c-0)}{2\pi i}\int_{ac}\frac{d\tau}{(\tau-c)^{\gamma}(\tau-z)},$$

$$\frac{\varphi^*(c+0)}{2\pi i}\int_{cb}\frac{d\tau}{(\tau-c)^{\gamma}(\tau-z)}$$

apliquemos los razonamientos del p. 8.3, y al examinar las integrales restantes, hagamos uso de las propiedades 1 y 2, citadas anteriormente.

En definitiva obtenemos que la función $\Phi(z)$ tiene cerca del punto c la siguiente representación

$$\left.\begin{aligned}\Phi(z)&=\frac{e^{\gamma\pi i}\varphi^*(c+0)-e^{-\gamma\pi i}\varphi^*(c-0)}{2i\,\operatorname{sen}\gamma\pi}(z-c)^{-\gamma}+\Phi_0(z)\\ &\qquad\text{a la izquierda de } L,\\ \Phi(z)&=\frac{e^{\gamma\pi i}\varphi^*(c+0)-e^{\gamma\pi i}\varphi^*(c-0)}{2i\,\operatorname{sen}\gamma\pi}(z-c)^{-\gamma}+\Phi_0(z)\\ &\qquad\text{a la derecha de } L,\end{aligned}\right\}\qquad(8.20)$$

con la particularidad de que cerca del punto c $\Phi_0(z)$ admite la acotación

$$|\Phi_0(z)|<\frac{c}{|z-c|^{\alpha_0}}\qquad(\alpha_0<\alpha).\qquad(8.21)$$

En particular, si el exponente de Hölder $\lambda>\alpha$, entonces $\Phi_0(z)$ es acotada.

Para el valor de la integral (8.17) en el contorno tendremos las representaciones siguientes

$$\Phi(t)=\left[\frac{e^{\gamma\pi i}}{2i\,\operatorname{sen}\gamma\pi}\varphi^*(c+0)-\frac{\operatorname{ctg}\gamma\pi}{2i}\varphi^*(c-0)\right](t-c)^{-\gamma}+$$
$$+\Phi^*(t)\text{ en }ac,\qquad(8.22)$$

$$\Phi(t)=\left[\frac{\operatorname{ctg}\gamma\pi}{2i}\varphi^*(c+0)-\frac{e^{-\gamma\pi i}}{2i\,\operatorname{sen}\gamma\pi}\varphi^*(c-0)\right](t-c)^{-\gamma}+$$
$$+\Phi^*(t)\text{ en }cb,\qquad(8.23)$$

donde $\Phi^*(t)$ admite la acotación (8.21).

8.5. Singularidad de tipo logarítmico. Consideremos una integral de tipo de Cauchy

$$\Omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{\ln^{p-1}(\tau-a)}{\tau-z}\,d\tau,\qquad(8.24)$$

donde p es un número entero positivo.

Con el fin de separar la parte principal de la descomposición $\Omega(z)$ cerca del punto a, introduzcamos las funciones $\omega_p(z, a)$ mediante las siguientes correlaciones recurrentes:

$$\omega_1(z, a) = -\frac{1}{2\pi i}\ln(z-a),$$

$$\omega_2(z, a) = -\frac{1}{4\pi i}\ln^2(z-a) + \frac{1}{2}\ln(z-a),$$

. . . . . (8.25)

$$\omega_p(z, a) = -\frac{1}{2p\pi i}\ln^p(z-a) - \sum_{k=1}^{p-1} C_{p-1}^k \frac{(2\pi i)^k}{k+1}\omega_{p-k}(z, a) \quad (p > 1)$$

donde C_{p-1}^k son coeficientes binomiales.

Convengamos en considerar que el contorno ab coincide con la línea de corte para la función $\omega_1(z, a)$, de modo que

$$\omega_1^+(t, a) - \omega_1^-(t, a) = 1.$$

Con cálculos inmediatos se puede mostrar que las funciones $\omega_p(z, a)$ satisfacen las correlaciones

$$\omega_p^+(t, a) - \omega_p^-(t, a) = \ln^{p-1}(t, a) \tag{8.26}$$

para p cualquiera.

Basándonos en estas correlaciones, así como en las fórmulas de Sojotski para $\Omega(z)$, y razonando igual que en el p. 8.3, obtenemos

$$\Omega(z) = \omega_p(z, a) + \Omega_0(z), \tag{8.27}$$

donde $\Omega_0(z)$ es una función analítica en el punto a.

Para los puntos del contorno dispuestos cerca del punto a tenemos

$$\Omega(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{ab} \frac{\ln^{p-1}(\tau-a)}{\tau-t}\,d\tau = \frac{1}{2}[\omega_p^+(t, a) + \omega_p^-(t, a)] + \Omega_0(t). \tag{8.28}$$

Demos en conclusión unas cuantas fórmulas más generales. Sea

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{ab} \frac{\varphi^*(\tau)\ln^{p-1}(\tau-a)}{\tau-z}\,d\tau, \tag{8.29}$$

donde $\varphi^*(\tau)$ es una función que satisface la condición de Hölder.

En este caso, cerca del punto a es válida la representación

$$\Phi(z) = \varphi^*(a)\,\omega_p(z, a) + \Phi_0(z), \tag{8.30}$$

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}\varphi^*(a)[\omega_p^+(t, a) + \omega_p^-(t, a)] + \Phi_0(t). \tag{8.31}$$

Si en la expresión para la densidad de la integral (8.29) sustituimos a por b, la representación $\Phi(z)$en el entorno del punto b tendrá la forma (8.30) y (8.31),

donde $\varphi^*(a)$ y las funciones $\omega_p(z, a)$ serán sustituidas o por $\varphi^*(b)$ y ω^*, respectivamente:

$$\omega_1^*(z, b) = \frac{1}{2\pi i} \ln(z-b),$$

$$\omega_2^*(z, b) = \frac{1}{4\pi i} \ln^2(z-b) + \frac{1}{2} \ln(z-b), \tag{8.32}$$

. . . . . .

$$\omega_p^*(z, b) = \frac{1}{2p\pi i} \ln^p(z-b) - \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k C_{p-1}^k \frac{(2\pi i)^k}{k+1} \omega_{p-k}^*(z, b).$$

Las fórmulas para los puntos, dispuestos dentro del contorno ab, resultan ser bastante complicadas y no las damos aquí.

8.6. **Singularidad de tipo logarítmico potencial.** Generalizando los resultados obtenidos en los pp. 8.4 y 8.5, consideremos una integral

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{\varphi^*(\tau) \ln^p(\tau-a)}{(\tau-a)^\gamma (\tau-z)} d\tau. \tag{8.33}$$

Introduzcamos las funciones

$$S_0(z, a) = \frac{e^{\gamma\pi i}}{2i \operatorname{sen} \gamma\pi} (z-a)^{-\gamma},$$

$$S_p(z, a) = \frac{e^{\gamma\pi i}}{2i \operatorname{sen} \gamma\pi} \frac{\ln^p(z-a)}{(z-a)^\gamma} + \frac{e^{-\gamma\pi i}}{2i \operatorname{sen} \gamma\pi} \sum_{k=1}^{p} C_p^k (2\pi i)^k S_{p-k}(z, a)$$

$$(p = 1, 2, \ldots). \tag{8.34}$$

No es difícil mostrar que las funciones $S_p(z, a)$ satisfacen las condiciones

$$S_p^+(t, a) - S_p^-(t, a) = \frac{\ln^p(t-a)}{(t-a)^\gamma} \quad (p = 0, 1, 2, \ldots)$$

de donde se deducirá que en el entorno del punto a la función $\Phi(z)$ tiene la representación

$$\Phi(z) = \varphi^*(a) S_p(z, a) + \Phi^*(z), \tag{8.35}$$

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} \varphi^*(a) [S_p^+(t, a) + S_p^-(t, a)] + \Phi^*(t), \tag{8.36}$$

donde $\Phi^*(z)$ es una función, analítica en el plano cortado por el contorno ab, para la cual en el entorno del punto a es válida la acotación

$$|\Phi^*(z)| < \frac{A}{|z-a|^{\alpha_0}}, \qquad \alpha_0 < \operatorname{Re} \gamma.$$

Análogamente, para la integral

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{\varphi^*(\tau) \ln^p(\tau-b)}{(\tau-b)^\gamma (\tau-z)} d\tau \tag{8.37}$$

obtendremos en el entorno del extremo b una representación del mismo tipo en

la que figurarán las funciones

$$S_0^*(z,\ b) = -\frac{e^{-\gamma\pi i}}{2i \operatorname{sen} \gamma\pi}(z-b)^{-\gamma},$$

$$S_p^*(z,\ b) = -\frac{e^{-\gamma\pi i}}{2i \operatorname{sen} \gamma\pi}\frac{\ln^p(z-b)}{(z-b)^\gamma} - \frac{e^{\gamma\pi i}}{2i \operatorname{sen} \gamma\pi}\sum_{k=1}^{p} C_p^k (-1)^k (2\pi i)^k S_{p-k}^*(z,\ b). \tag{8.38}$$

El material de los pp. 8.5 y 8.6 ha sido expuesto conforme a la obra de I. M. Mélnik 2)*. P. G. Yúrov 1), 2)* dio, con la ayuda de la teoría de ecuaciones en diferencias finitas, las expresiones para la parte principal de las integrales (8.24) y (8.33) en la forma explícita (no en la forma recurrente), introduciendo los polinomios de Bernoulli y de Euler. Para poder entender la obra, se necesita conocer los elementos de la teoría de funciones enteras.

8.7. Integral de tipo de Cauchy en un contorno complejo. Hasta ahora se suponía (para no complicar la exposición) que la integral de tipo de Cauchy se resuelve en el contorno compuesto por una curva simple, sea cerrada o abierta. No obstante, nada nos impide que todos los resultados obtenidos se extiendan a un caso en que el contorno de integración consta de un número finito de curvas, separadas por completo o bien con ciertos puntos de intersección. Observemos ahora mismo que, sin perder la generalidad, podemos suponer simples todas las curvas, puesto que, si una cierta curva resultara tener puntos múltiples, podríamos partirla en unos tramos separados sin puntos múltiples y tomar estos tramos por curvas independientes.

Así pues, sea dada la integral de tipo de Cauchy

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau, \tag{8.39}$$

que se resuelve en el contorno L compuesto de un número finito de curvas simples L_k:

$$L = L_1 + L_2 + \ldots + L_m.$$

Entre las curvas L_k pueden ser tanto cerradas como abiertas. Es evidente que $\Phi(z)$ puede representarse como la suma

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau + \ldots + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_m} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau. \tag{8.40}$$

Cada uno de los términos de esta suma es la integral de tipo de Cauchy en una curva simple y, por consiguiente, son aplicables a él las deducciones de toda la teoría precedente. De aquí se infiere inmediatamente el siguiente

TEOREMA. *La integral de tipo de Cuachy* (8.39), *calculada en el contorno complejo L, representa una función que es analítica en todo el plano de la variable compleja, a excepción de los puntos del contorno L, y que se reduce a cero en el infinito.*

Examinemos los valores límites de la integral. Supongamos que el punto z va aproximándose a cierto punto t del contorno, que está dispuesto en una curva L_j y no es un punto de intersección de las curvas L_k. Todos los términos de la suma (8.40), salvo el j-ésimo, serán funciones analíticas y, por tanto, continuas en el punto t. Mientras tanto, la integral resuelta en el contorno L_j es subordinada a todas las condiciones para las cuales han sido obtenidos los resultados de la teoría expuesta anteriormente. De aquí se infiere que toda esta teoría es aplicable también al caso considerado de un contorno complejo. De este modo, en todos los teoremas referentes a los valores límites, incluidas las fórmulas de Sojotski, las de inversión del orden de integración, etc., podemos suponer que el

contorno L es complejo, es decir, compuesto de un número finito de curvas simples, a condición de que el punto t, en el que son investigados los valores límites, no es punto de intersección de los contornos simples L_k.

Para un punto de intersección de los contornos simples el problema resulta ser considerablemente más difícil. Aquí varios términos de la suma experimentan simultáneamente discontinuidades. Las curvas simples, que se cortan en el punto t, dividen el plano en sectores y el valor límite de la integral (8.39) depende de la respuesta a la pregunta ¿en qué de estos sectores se encuentra la vía γ, a lo largo de la cual nos aproximamos al punto t (fig. 9)? La investigación de los valores límites en el punto de intersección de las curvas simples representa unas dificultades enormes, si investigamos la integral calculada en todo el haz de las curvas simples que parten del punto dado (así lo hacía Trjizinsky 1)**, a quien se debe la primera investigación de este problema).[1]) No obstante, las dificultades desaparecen por completo, si, como lo propuso D. A. Kveselava 3)*, tomamos el valor límite en el punto de intersección de las curvas como suma de los valores límites de todos los términos que integran la suma (8.40). Si está prefijado el sector, en que se encuentra la vía γ, entonces, para cada una de las integrales en las curvas L_k, que se cortan en el punto t, puede determinarse exactamente el lado (derecho o izquierdo) por el cual se efectúa la tendencia al límite, y, consecuentemente, indicarse aquélla de las fórmulas de Sojotski (4.7) y (4.8), que corresponde a la vía elegida del paso al límite.

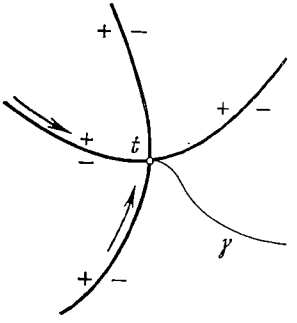


Fig. 9

Convengamos, para lo sucesivo, no asignar a la integral (8.39) en el punto de intersección ningún valor determinado. Hallaremos los valores límites para cada vía en que se tiende al límite, partiendo del principio, enunciado más arriba, de partición de la integral en una suma de integrales, resueltas en las curvas simples. Con tal manera de investigación, el caso en que el punto de intersección es un extremo de la curva que pasa por este punto, no representa dificultades algunas, puesto que el estudio del comportamiento de la integral se lleva a cabo de un modo habitual expuesto en el p. 8.2.

§ 9. Valores límites de las integrales generalizadas y de las integrales dobles de tipo de Cauchy

Hagamos extender una parte de los resultados expuestos más arriba a las integrales generalizadas (pp. 9.1—9.3) y a las integrales dobles de tipo de Cauchy (pp. 9.4—9.6).

9.1. Planteamiento del problema [2]). Sea L un contorno cerrado o abierto. Examinemos una integral curvilínea

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{P(\tau, z)}{Q(\tau, z)}\,d\tau, \tag{9.1}$$

haciendo las siguientes suposiciones con relación a las funciones P y Q:

[1]) Véanse las obras con dos asterisco en el apartado C de la bibliografía.

[2]) L. G. Mijáilov 1)* fue primero en considerar problemas expuestos en los pp. 9.1—9.3, aunque las consideraciones suyas no eran rigurosas ni tampoco completamente exactas. La exposición que se da en este libro se ha tomado de la obra de I. M. Mélnik 1)*.

1. P y Q son funciones analíticas enteras respecto de la variable compleja z para todos los valores de $\tau \in L$.

2. P satisface según la variable τ la condición de Hölder.

3. Q tiene la derivada continua respecto a τ que satisface la condición de Hölder.

4. En los puntos, donde $Q(\tau, z) = 0$, $Q'_\tau(\tau, z)$ y $Q'_z(\tau, z)$ son distintos de cero.

De acuerdo con § 1, la integral (9.1) representa en sí una función analítica en todo el plano, a excepción de los valores de z, que satisfacen la ecuación

$$Q(\tau, z) = 0 \quad (\tau \in L), \tag{9.2}$$

y, quizás, de un punto infinitamente alejado.

El comportamiento de $\Psi(z)$ en el infinito puede ser investigado sólo imponiendo ciertas condiciones determinadas sobre comportamiento de las funciones enteras P y Q en el infinito. Esta cuestión la dejamos al lado.

La ecuación (9.2) define un número finito o infinito de las curvas Γ. Resolviendo esta ecuación respecto a z y tomando el valor de τ de la ecuación del contorno $L: \tau = \tau(\sigma)$, obtendremos las ecuaciones de las curvas Γ en forma paramétrica. En virtud de las condiciones 3 y 4, la ecuación (9.2) determina una correspondencia biunívoca y continua entre el contorno L y cada una de las curvas Γ. Por consiguiente, todas las curvas Γ serán cerradas o abiertas simultáneamente, según sea cerrado o abierto el contorno L. Para concretar, en lo sucesivo tomemos L por contorno cerrado.

Las curvas Γ serán líneas singulares para la función $\Psi(z)$.

Resulta que bajo las condiciones 1—4, impuestas sobre las funciones P y Q, la función $\Psi(z)$ se comporta en las líneas singulares Γ igual que la integral de tipo de Cauchy en el contorno de integración, es decir, tiene valores límites continuos, al aproximarse por cualquier lado del contorno; estos valores no coinciden, así que las curvas Γ son para la función $\Psi(z)$ las líneas de saltos.

El método de investigación consiste en la reducción de la integral compleja en consideración, calculada en el contorno L, a una integral de tipo de Cauchy en la curva Γ. Sin realizar la investigación detallada, nos limitemos a la indicación de unas consideraciones de importancia.

9.2. Fórmulas análogas a las de Sojotski para la integral de tipo de Cauchy. Elijamos una curva Γ y designemos con ζ las coordenadas complejas de sus puntos, de modo que

$$Q(\tau, \zeta) = 0. \tag{9.2'}$$

Sea

$$\zeta = \psi(\tau) \tag{9.3}$$

la ecuación de la curva Γ, obtenida por la resolución de la ecuación (9.2') respecto de ζ.

De acuerdo al teorema de Weierstrass, la función analítica $Q(\tau, z)$ de dos variables complejas τ, z, que satisface la condición $\frac{\partial Q}{\partial z} \neq 0$, puede representarse en la forma

$$Q(\tau, z) = [\psi(\tau) - z]\, \Omega(\tau, z), \tag{9.4}$$

donde $\psi(\tau)$, $Q(\tau, z)$ son funciones analíticas de sus variables, con la particularidad de que $\Omega(\tau, z) \neq 0$ en el entorno de los puntos investigados.

En el caso considerado, $Q(\tau, z)$ no es analítica según τ; no obstante unos razonamientos sencillos muestran que en este caso también es lícita la descomposición (9.4), con la única diferencia de que ψ y Ω no serán analíticas según τ, sino funciones de la misma índole que la propia función Q (la condición 3). Es fácil advertir que la función $\psi(\tau)$, que figura en la descomposición (9.4), es el segundo miembro de la ecuación (9.3).

Tomando en consideración la descomposición (9.4), representemos la integral (9.1) en la forma

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{P(\tau, z)}{\Omega(\tau, z)}\,\frac{d\tau}{\psi(\tau)-z}. \tag{9.5}$$

Deseando reducir la integración en el contorno L a la integración por la curva investigada Γ, hagamos la sustitución (9.3). Designando con ω la función inversa a ψ:

$$\tau = \omega(\zeta),$$

e introduciendo la función

$$\varphi(\zeta, z)=\frac{P[\omega(\zeta), z]\,\omega'(\zeta)}{\Omega[\omega(\zeta), z]} \tag{9.6}$$

reduzcamos la integral examinada a la siguiente

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta, z)}{\zeta-z}\,d\zeta. \tag{9.7}$$

La integral (9.7) se diferencia de la integral corriente de tipo de Cauchy sólo en lo que su densidad $\varphi(\zeta, z)$ depende de la variable z. Sin embargo, esta circunstancia no lleva consigo ningunos cambios en el comportamiento de la integral cerca del contorno Γ. Es sabido (véase la nota al p. 7.2) que para esta integral son válidas las fórmulas corrientes de Sojotski.

Por consiguiente, tendremos

$$\Psi^{\pm}(w)=\pm\frac{1}{2}\varphi(w, w)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta, w)}{\zeta-w}\,d\zeta.$$

Suponiendo $\omega(w)=t$ y tomando en consideración que $\omega'(w)=\dfrac{1}{\psi'(t)}$, $\psi'(t)\,\Omega(t, w)=Q'_\tau(t, w)$, obtenemos

$$\Psi^{\pm}(w)=\pm\frac{1}{2}\frac{P(t, w)}{Q'_\tau(t, w)}+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{P(\tau, w)}{Q(\tau, w)}\,d\tau \tag{9.8}$$

donde la última integral se entiende en el sentido de valor principal.

9.3. Fórmula de inversión del orden de integración. Para una integral singular doble de tipo examinado es válida la fórmula de inversión del orden de integración, análoga a la fórmula (7.7) (de Poincaré — Bertrand).

La deducción se basa en el siguiente lema.

LEMA. *Supóngase que en el contorno L está definida la función $\varphi(t, \tau)$ que satisface las siguientes condiciones:*

1. *Es continua según ambas variables y tiene primera derivada respecto a τ, que satisface la condición de Hölder por τ y t.*

2. $\varphi(t, t) = 0$, *pero* $\varphi'_\tau(t, t) \neq 0$. *Entonces,* $\varphi(t, \tau)$ *puede presentarse en la forma*

$$\varphi(t, \tau) = (\tau - t)\, s(t, \tau), \tag{9.9}$$

donde $s(t, \tau)$ *satisface la condición de Hölder y* $s(t, t) = \varphi'_\tau(t, t)$.

Al demostrar, partimos de una igualdad evidente

$$\varphi(t, \tau) - \varphi(t, t) = \int_t^\tau \varphi'_\tau(t, u)\, du.$$

Tomando en consideración que $\varphi(t, t) = 0$ y efectuando la sustitución

$$u = t + v(\tau - t), \tag{9.10}$$

obtendremos la representación requerida (9.9) en que

$$s(t, \tau) = \int_{L'} \varphi'_\tau[t, t + v(\tau - t)]\, dv,$$

y la integral se resuelve en el arco L' (con los extremos 0, 1) en el cual la sustitución (9.10) aplica biunívoca y continuamente el arco $t\tau$ del contorno L.

La demostración de que $s(t, \tau)$ satisface la condición de Hölder y que $s(t, t) = \varphi'_\tau(t, t)$, se efectúa por un cálculo directo y no la damos aquí.

Pasemos, ahora, a la deducción de la fórmula de inversión. Supongamos que

1) la función $P(\tau, \sigma)$, definida en L, satisface la condición de Hölder;

2) la función $\omega(\tau, \sigma)$ satisface la condición del lema;

3) $Q(\tau, w)$ es una función que satisface las condiciones 3,4 del p. 9.1, siendo w un punto arbitrario de la curva Γ.

En estas condiciones tiene lugar la siguiente fórmula de inversión:

$$\int_L \frac{d\tau}{Q(\tau, w)} \int_L \frac{P(\tau, \sigma)}{\omega(\tau, \sigma)}\, d\sigma =$$

$$= -\pi^2 \frac{P(t, t)}{Q'_\tau(t, w)\, \omega'_\tau(t, t)} + \int_L d\sigma \int_L \frac{P(\tau, \sigma)}{Q(\tau, w)\, \omega(\tau, \sigma)}\, d\tau. \tag{9.11}$$

La demostración se realiza por reducción a las integrales de tipo de Cauchy. En virtud del lema,

$$\omega(\tau, \sigma) = (\sigma - \tau) s(\tau, \sigma). \tag{9.9'}$$

Puesto que $w = \psi(t)$, la función $Q(\tau, w) = Q[\tau, \psi(t)]$ satisface las condiciones del lema, por lo cual,

$$Q[\tau, \psi(t)] = (\tau - t)\, s_1(\tau, t). \tag{9.9''}$$

De aquí

$$\int_L \frac{d\tau}{Q(\tau, w)} \int_L \frac{P(\tau, \sigma)}{\omega(\tau, \sigma)}\, d\sigma = \int_L \frac{d\tau}{\tau - t} \int_L \frac{\varphi(\tau, \sigma, t)}{\sigma - t}\, d\sigma, \tag{9.12}$$

donde la función

$$\varphi(\tau, \sigma, t) = \frac{P(\tau, \sigma)}{s_1(\tau, t)\, s(\tau, \sigma)}$$

satisface la condición de Hölder según τ y σ para $t \in L$. Aplicando a la integral (9.12) la fórmula de inversión (7.7') y teniendo en cuenta que

$$s(t, t) = \omega_{\tau}^{*}(t, t), \quad s_1(t, t) = Q_{\tau}'(t, w),$$

es decir,

$$\varphi(t, t, t) = \frac{P(t, t)}{Q_{\tau}'(t, t)\,\omega_{\tau}'(t, t)},$$

llegaremos a la fórmula requerida (9.11).

9.4. Integrales múltiples de tipo de Cauchy. Planteamiento del problema [1]. Supóngase que en el plano de una veriable compleja z_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) está dado un sencillo contorno cerrado y suave L_k, que divide el plano en dos partes: la interior D_k^{+} y la exterior D_k^{-}. En este caso los productos topológicos

$$D^{\pm\pm\cdots\pm} = D_1^{\pm} \times D_2^{\pm} \times \ldots \times D_n^{\pm}$$

llevan el nombre de *dominios policilíndricos regulares* [2]. Las fronteras de todos estos dominios tienen una parte común, a saber, $L = L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_n$, que se denomina *armazón de fronteras* de los dominios correspondientes.

La integral

$$\Phi(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_L \frac{\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)\, d\tau_1 \ldots d\tau_n}{(\tau_1 - z_1) \ldots (\tau_n - z_n)}, \tag{9.13}$$

cuya densidad $\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ es una función continua de los puntos de la armazón L, recibe el nombre de *integral múltiple de tipo de Cauchy*.

Más abajo daremos la exposición de algunas cuestiones concernientes a las integrales de este género y, para sencillez, consideraremos el caso de dos variables. Será mostrado que la integral (9.13) posee, en lo esencial, unas propiedades análogas a las propiedades correspondientes de una integral ordinaria de tipo de Cauchy de multiplicidad 1.

9.5. Integral singular doble. Fórmula de Poincaré — Bertrand. Sea dada en la armazón $L = L_1 \times L_2$ una función $\varphi(t_1, t_2)$ que satisface la condición de Hölder con los exponentes λ_1 y λ_2, o, en la forma más breve, $\varphi \in H(\lambda_1, \lambda_2)$. Introduzcamos las designaciones

$$\varphi_1 = \varphi(\tau_1, t_2) - \varphi(t_1, t_2), \quad \varphi_2 = \varphi(t_1, \tau_2) - \varphi(t_1, t_2),$$
$$\varphi_{12} = \varphi(\tau_1, \tau_2) - \varphi(\tau_1, t_2) - \varphi(t_1, \tau_2) + \varphi(t_1, t_2).$$

Basándonos en los resultados del p. 2.2, encontram

$$|\varphi_1| \leqslant A_1 |\tau_1 - t_1|^{\lambda_1}, \quad |\varphi_2| \leqslant A_2 |\tau_2 - t_2|^{\lambda_2},$$
$$|\varphi_{12}| \leqslant 2A_1 |\tau_1 - t_1|^{\lambda_1}, \quad |\varphi_{12}| \leqslant 2A_2 |\tau_2 - t_2|^{\lambda_2}. \tag{9.14}$$

De las dos últimas desigualdades tenemos

$$|\varphi_{12}| \leqslant A_{12} |\tau_1 - t_1|^{\alpha\lambda_1} |\tau_2 - t_2|^{(1-\alpha)\lambda_2} \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1). \tag{9.15}$$

[1]) La exposición de los pp. 9.4—9.6 sigue, en lo principal, los artículos de V. A. Kakichev 1) y 2)*. Acerca de las fórmulas de Sojotski, véanse también M. B. Gagua 1)*, L. Bittner 1)** y A. G. Dzhvarsheishvili 1)*.

[2]) El punto $(z_1, \ldots, z_n)$ pertenece al producto topológico $D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$ de los conjuntos D_k ($k = 1, 2, \ldots, n$), siempre que $z_k \in D_k$.

Ha de notarse una identidad más:

$$\varphi(\tau_1, \tau_2) = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_{12} + \varphi(t_1, t_2). \tag{9.16}$$

Examinemos las integrales singulares

$$\widetilde{\varphi}_1 = S_1\varphi = \frac{1}{\pi i}\int_{L_1} \frac{\varphi(\tau_1, t_2)\,d\tau_1}{\tau_1 - t_1}, \qquad \widetilde{\varphi}_2 = S_2\varphi = \frac{1}{\pi i}\int_{L_2} \frac{\varphi(t_1, \tau_2)\,d\tau_2}{\tau_2 - t_2},$$

$$\widetilde{\varphi}_{12} = S_{12}\varphi = -\frac{1}{\pi^2}\int_{L} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)}.$$

Evidentemente, las integrales $S_1\varphi$ y $S_2\varphi$ existen en el sentido del valor principal (véase el p. 3.4).

En el plano z_k describamos una circunferencia $|z_k - t_k| = \rho$ con centro en el punto $t_k \in L_k$, y designemos por l_k la parte del contorno L_k, dispuesta dentro de esta circunferencia. El valor principal de la integral singular $S_{12}\varphi$ lo definamos como un límite

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{(L_1 - l_1)\times(L_2 - l_2)} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)}. \tag{9.17}$$

Si $\varphi \in H(\lambda_1, \lambda_2)$, entonces, sustituyendo $\varphi(\tau_1, \tau_2)$ en (9.17) por el segundo miembro de la identidad (9.16) y teniendo en cuenta las desigualdades (9.14), (9.15), así como la igualdad (4.6), se puede mostrar (por analogía con lo hecho en el p. 3.4) que la integral $S_{12}\varphi$ existe también en el sentido del valor principal.

Indicaremos, además, las siguientes igualdades operadoras, que o bien fueron demostradas antes o bien se demuestran con facilidad:

$$S_1S_2 = S_2S_1 = S_{12}, \quad S_j^2 = S_0, \quad S_jS_0 = S_0S_j = S_j \quad (j = 1, 2), \tag{9.18}$$

donde S_0 es un operador idéntico, es decir, $S_0\varphi = \varphi$.

Luego, aplicando el esquema para demostrar la fórmula de Poincaré — Bertrand, propuesto por V. D. Kupradze [1]), obtendremos la fórmula correspondiente de Poincaré — Bertrand para el caso de dos variables la cual en la forma operadora se puede escribir

$$S_{12}(a\widetilde{\varphi}_{12}) - S_{12}(\varphi\widetilde{a}_{12}) = a\varphi + \widetilde{a}_1\widetilde{\varphi}_1 + \widetilde{a}_2\widetilde{\varphi}_2 + \widetilde{a}_{12}\widetilde{\varphi}_{12} - S_1(\varphi_1\widetilde{a}_1 + \widetilde{\varphi}_2\widetilde{a}_{12}) - S_2(\varphi_2\widetilde{a}_2 + \widetilde{\varphi}_1\widetilde{a}_{12}),$$

donde $a(t_1, t_2)$, $\varphi(t_1, t_2)$ son funciones de los puntos de la armazón L que satisfacen en ella la condición de Hölder.

De esta fórmula se infiere, para $a \equiv 1$, la fórmula de composición del operador S_{12}:

$$S_{12}^2\varphi = S_{12}\widetilde{\varphi}_{12} = \varphi,$$

de la cual, en su turno, se deduce las siguientes fórmulas de inversión: si $\psi = S_{12}\varphi$ y $\varphi \in H$, entonces $\varphi = S_{12}\psi$, y viceversa.

---

[1]) Véase Kupradze V. D. «Problemas de frontera de la teoría de oscilaciones y las ecuaciones integrales» (Купрадзе В. Д., Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения, Гостехиздат, 1950).

9.6. Fórmulas de Sojotski. Si $\varphi(t_1, t_2) \in H(\lambda_1, \lambda_2)$ entonces, razonando igual que al demostrar el lema en el p. 4.1, se puede probar que al pasar a través de los contornos L_1, L_2 y la armazón L, las integrales

$$\psi_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{\varphi_1\, d\tau_1}{\tau_1 - z_1}, \quad \psi_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{\varphi_2\, d\tau_2}{\tau_2 - z_2}, \quad \psi_{12} = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{L}\frac{\varphi_{12}\, d\tau_1\, d\tau_2}{(\tau_1 - z_1)(\tau_2 - z_2)}$$

se comportan como funciones continuas.

Designamos con $\Phi^{\pm\pm}(t_1, t_2)$ los valores límites de la integral (9.13), cuando el punto $(z_1, z_2) \in D^{\pm\pm}$ tiende al punto $(t_1, t_2) \in L$.

De la igualdad evidente

$$\Phi(z_1, z_2) = \psi_{12} + \frac{\psi_1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{d\tau_2}{\tau_2 - z_2} + \\ + \frac{\psi_2}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{d\tau_1}{\tau_1 - z_1} - \frac{\varphi(t_1, t_2)}{4\pi^2}\int_{L}\frac{d\tau_1\, d\tau_2}{(\tau_1 - z_1)(\tau_2 - z_2)}$$

tendremos, con ayuda de los razonamientos análogos a los empleados en la deducción de las fórmulas de Sojotski para la integral unidimensional de tipo de Cauchy (p. 4.2):

$$\left.\begin{aligned} \Phi^{++} \\ \Phi^{--} \end{aligned}\right\} = \frac{1}{4}(\varphi \pm S_1\varphi \pm S_2\varphi + S_{12}\varphi), \\ \left.\begin{aligned} \Phi^{+-} \\ \Phi^{-+} \end{aligned}\right\} = \frac{1}{4}(-\varphi \mp S_1\varphi \pm S_2\varphi + S_{12}\varphi). \Bigg\} \tag{9.19}$$

De aquí

$$\left.\begin{aligned} \Phi^{++} \pm \Phi^{+-} \pm \Phi^{-+} + \Phi^{--} &= \begin{cases} S_{12}\varphi, \\ \varphi, \end{cases} \\ \Phi^{++} \mp \Phi^{+-} \pm \Phi^{-+} - \Phi^{--} &= \begin{cases} S_1\varphi, \\ S_2\varphi. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{9.20}$$

Las fórmulas de Sojotski (9.19) pueden compactamente escribirse como una fórmula de la manera siguiente:

$$4\Phi^{\pm\pm} = \{(\pm S_0 + S_1)(\pm S_0 + S_2)\}\varphi,$$

donde primeramente se hallan, según las fórmulas de Sojotski, los operadores correspondientes, y luego éstos se aplican a la función $\varphi(t_1, t_2)$.

Para n arbitrario las fórmulas de Sojotski tienen la forma

$$2^n\Phi^{\pm\pm\cdots\pm} = \{(\pm S_0 + S_1)(\pm S_0 + S_2)\ldots(\pm S_0 + S_n)\}\varphi.$$

Haciendo uso de las desigualdades (9.14) y la desigualdad (9.15) para $\alpha = \varepsilon/\lambda_1$ ó $\alpha = \varepsilon/\lambda_2$, obtenemos que si $\varphi(t_1, t_2) \in H(\lambda_1, \lambda_2)$, $S_1\varphi \in H(\lambda_1, \lambda_2 - \varepsilon)$, $S_2\varphi \in H(\lambda_1 - \varepsilon, \lambda_2)$, donde ε es un número positivo tan pequeño como se quiera. Es por esto que la integral singular $S_{12}\varphi$, como también los valores límites $\Phi^{\pm\pm}(t_1, t_2)$, pertenecen a la clase $H(\lambda_1 - \varepsilon, \lambda_2 - \varepsilon)$.

§ 10. Integral de tipo de Cauchy y los potenciales

Como se ha indicado antes, entre la integral de tipo de Cauchy y los potenciales (logarítmicos) existe una relación íntima. Demos la expresión explícita de dicha relación.

Supongamos que el contorno L es cerrado y hagamos

$$\Phi(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{\tau - z} d\tau.$$

Para sencillez consideraremos que la densidad $\varphi(\tau)$ es una función real. Si fuera compleja, tendríamos que dividir la integral de tipo

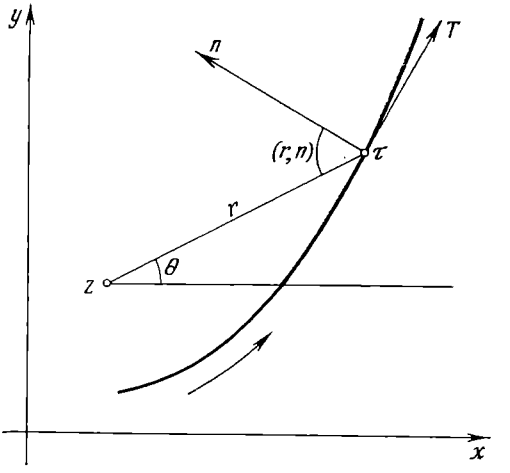


Fig. 10

de Cauchy en dos integrales, despejando en la densidad las partes real e imaginaria. Designemos (fig. 10)

$$\tau - z = re^{i\theta}, \quad r = |\tau - z|, \quad \theta = \arg(\tau - z). \tag{10.1}$$

Entonces

$$\frac{d\tau}{\tau - z} = d \ln(\tau - z) = d(\ln r + i\theta) = \frac{dr}{r} + i d\theta. \tag{10.2}$$

Por esta razón

$$u(x, y) + iv(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_L \varphi \frac{d\theta}{ds} ds - \frac{i}{2\pi} \int_L \varphi \frac{dr}{r}. \tag{10.3}$$

De acuerdo con las ecuaciones de Cauchy—Riemann, aplicadas a la función $\ln(\tau - z) = \ln r + i\theta$, tenemos

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{\partial \ln r}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r}.$$

Por consiguiente,

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_L \varphi \frac{d\theta}{ds}\, ds = \frac{1}{2\pi} \int_L \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_L \varphi \frac{\cos(r, n)}{r}\, ds, \quad (10.4)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_L \varphi d \ln \frac{1}{r} = -\frac{1}{2\pi} \int_L \varphi \frac{dr}{r}. \quad (10.5)$$

La fórmula (10.4) muestra que la *parte real de la integral de tipo de Cauchy es un potencial logarítmico de capa doble.*

Para expresar el segundo miembro de la fórmula (10.5) en términos de los potenciales, admitimos que la densidad $\varphi(t)$ es una función derivable. Efectuando en la última fórmula la integración por partes y observando que la parte integrada es nula, por ser cerrado el contorno, obtendremos

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{d\varphi}{ds} \ln r\, ds = -\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{d\varphi}{ds} \ln \frac{1}{r}\, ds. \quad (10.6)$$

Comparando la última expresión con el potencial de capa simple en escritura habitual

$$\int_L \mu(s) \ln \frac{1}{r}\, ds,$$

vemos que la *parte imaginaria de la integral de tipo de Cauchy es un potencial logarítmico de capa simple* cuya densidad es

$$\mu(s) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi}{ds}.$$

Como la carga completa (masa) del potencial

$$m = \int_L \mu(s)\, ds = -\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{d\varphi}{ds}\, ds = 0, \quad (10.7)$$

entonces, la fórmula (10.6) representa un potencial cuyo género no es del todo general, sino sólo a la condición de que la carga completa sea nula.

Observemos que si la densidad $\varphi(t)$ no se supusiera derivable, se podría realizar la integración por partes, para lo cual sólo es necesario comprender la integral obtenida $\int_L \ln \frac{1}{r}\, d\varphi$ como integral en el sentido de Stieltjes.

Haciendo uso de la representación de la integral de tipo de Cauchy en términos de potenciales, se puede obtener las fórmulas de Sojotski para sus valores límites. El primer sumando, que es un potencial de capa doble, representa en sí una función que sufre discontinuidad al pasar a través del contorno L. Los valores límites tienen por expresión

$$\pm \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_L \varphi \frac{d\theta}{ds}\, ds. \qquad (10.8)$$

Un potencial de capa simple se comporta, al pasar a través del contorno, como una función continua, con la particularidad de que la integral (10.6) debe entenderse en el sentido del valor principal. Sumando ambos términos, obtendremos las fórmulas de Sojotski. Ha de notarse que para las curvas que satisfacen la condición de Liapunov (p. 5.3), la deducción de las fórmulas de Sojotski mediante el método mencionado no representa dificultades algunas, siempre que se hayan deducido ya las fórmulas (10.8) para los valores límites del potencial de capa doble. No obstante, en el caso de cualquier contorno suave nos enfrentaríamos con las complicaciones considerables relacionadas con la cuestión sobre la existencia de la integral $\int_L \varphi \frac{d\theta}{ds}\, ds$ en el contorno.

§ 11. Notas históricas

Es difícil llamar al autor quien fue primero en señalar la integral de tipo de Cauchy, es decir, quien propuso que en la integral de Cauchy se considere a título de densidad una función arbitraria. Sin embargo, pueden indicarse con exactitud el tiempo y el autor quien fue primero en realizar unas investigaciones importantísimas en la teoría de esta integral. En el año 1873 Yu. V. Sojotski [24] investigó, en su tesis de doctorado, el compartamiento de la integral de tipo de Cauchy en el contorno y obtuvo las fórmulas (4.7) y (4.8) para las mismas condiciones (la condición de Hölder) que fueron expuestas en el § 4. Es notable que en la misma obra [24] fueron consideradas también las discontinuidadas de la densidad.

Estas investigaciones no son rigurosas desde el punto de vista actual, pero correspondían plenamente a los requisitos de aquella época. Mas, las investigaciones fundamentales de Sojotski fueron inmerecidamente olvidadas y no contribuyeron al desarrollo ulterior de la teoría [1]).

[1]) A. I. Markushévich fue el primero en señalar el papel de las obras de Yu. V. Sojotski en la teoría de la integral de tipo de Cauchy.

Las siguientes (en el tiempo) investigaciones de los valores límites de la integral de tipo de Cauchy se deben a Harnac 1)** en 1885. Este autor descompone la integral de tipo de Cauchy en una suma de dos potenciales (véase § 10) y deduce las fórmulas de Sojotski, apoyándose en las fórmulas para los valores límites del potencial de capa doble. Sobre la densidad y el contorno se imponen unas restricciones rigurosas. La obra de Harnac tampoco tuvo influencia considerable en las investigaciones posteriores: éstas siguieron el camino, trazado por Sojotski (aunque independientemente de sus trabajos), el de consideración de la integral de tipo de Cauchy como función compleja única.

Son de mayor importancia dos obras de Plemelj 1), 2)**. En ellas fueron deducidas de nuevo las fórmulas de Sojotski para las mismas condiciones de Hölder, pero de una manera suficientemente rigurosa. Se demostró esquemáticamente el teorema principal sobre el comportamiento de valores límites de la integral de tipo de Cauchy (véase el p. 5.1). Pero lo principal consiste en que por primera vez la integral de tipo de Cauchy fue utilizada en estas obras como un aparato matemático con el objeto de resolver un concreto problema de contorno de la teoría de funciones analíticas. Conviene mencionar también las obras de Poincaré [20] y de Bertrand 1)**, en las cuales se obtuvo la fórmula de permutación para las integrales singulares reiteradas.

El desarrollo posterior de la teoría y aplicaciones de la integral de tipo de Cauchy está relacionado, principalmente, con los nombres de I. I. Priválov y N. I. Musjelishvili, matemáticos soviéticos. En las obras del primero que datan del año 1918, las fórmulas de Sojotski para las funciones que satisfacen la condición de Hölder fueron deducidas con la máxima plenitud y rigurosidad, y luego se dieron unas generalizaciones de largo alcance, referentes a la densidad de la integral y el contorno de integración. Alguna información de estas generalizaciones se da en el p. 5.2. En las obras de N. I. Musjelishvili, a partir del año 1922, la integral de tipo de Cauchy se usa sistemáticamente en la resolución de los problemas de la teoría de elasticidad.

Estas obras que se hicieron ampliamente conocidas debido a su libro [17] desempeñaron un papel enorme para que la integral de tipo de Cauchy sea implantada en calidad de un aparato matemático en diferentes ramas de las matemáticas teóricas y aplicadas. En 1941 apareció la obra de Musjelishvili 1)*, que representa una investigación profunda del comportamiento de la integral de tipo de Cauchy en los extremos del contorno y en los puntos de discontinuidad de la densidad. Esta obra se hizo de amplio uso en la teoría de los problemas de contorno y en las ecuaciones integrales singulares.

De los trabajos ulteriores en la teoría de la integral de tipo de Cauchy merecen ser mencionados, en primer lugar, las obras de L. G. Magnaradze 1)*, S. G. Mijlin y B. V. Jvedelidze. En la obra [15] la integral de tipo de Cauchy se considera como un operador en el espacio de funciones con cuadrado integrable. Esto presta la posibilidad de emplear, en ciertos casos, el análisis funcional como aparato de investigación. Una investigación semejante se ha realizado por B. V. Jvedelidze 2)* para las funciones, integrables en la potencia $p > 1$ con algún peso. Las generalizaciones posteriores de la integral de tipo de Cauchy se mencionarán en las notas históricas al cap. VI.

Una exposición más completa de la teoría de la integral de tipo de Cauchy para las condiciones clásicas, que aseguran la existencia de valores límites continuos en todos los puntos del contorno, se da en el libro de N. I. Musjelishvili [16]. Esta última fue tomada de base para la exposición de varios apartados del presente capítulo (§§ 4, 7, pp. 8.3, 8.4).

PROBLEMAS AL CAPITULO I

1. Calcúlese la integral singular $\int_a^b \frac{dx}{x-c}$, definiéndola como

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon}\frac{-dx}{c-x}+\int_{c+k\varepsilon}^{b}\frac{dx}{x-c}\right].$$

2. Muéstrese que si $n>0$ es un número impar, entonces la integral singular $\int_a^b \frac{dx}{(x-c)^n}$, definida como valor principal, existe.

3. Muéstrese que si n es un número impar y $\varphi(x)$ satisface la condición $|\varphi(x)-\varphi(c)|\leqslant A|x-c|^{\lambda}$, donde $\lambda>n-1$, entonces la integral $\int_a^b \frac{\varphi(x)}{(x-c)^n}dx$ existe.

4. Muéstrese que si la integral singular $\int_L \frac{d\tau}{\tau-t}$ se define por la condición $\lim_{t_1,\ t_2\to t}\left|\frac{t_2-t}{t_1-t}\right|=k$ (designaciones del p. 3.4), entonces los valores límites de la integral de tipo de Cauchy $\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau$ se expresarán mediante las fórmulas

$$\Phi^{+}(t)=\frac{1}{2}\left[1+\frac{\ln k}{\pi i}\right]\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau,$$

$$\Phi^{-}(t)=\frac{1}{2}\left[-1+\frac{\ln k}{\pi i}\right]\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau.$$

5*. Demuéstrese que si $\varphi(t)$ satisface la condición $H(\lambda)$, entonces para la derivada de la integral de tipo de Cauchy $\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau$ en los puntos del contorno será válida la acotación

$$|\Phi'(z)|<A|z-t|^{\lambda-1} \quad \text{para } \lambda<1,$$
$$|\Phi'(z)|<A\ln|z-t| \quad \text{para } \lambda=1.$$

(N.I. Musjelishvili [16], § 20).

6. Calcúlese una integral singular $\frac{1}{\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{\tau^2}{\tau^3-1}d\tau$.

---

* Con asterisco se dan los problemas mas difíciles.

Respuesta. 1.

7. Sea L un contorno cerrado simple que divide el plano en dos dominios D^+ y D^-. Demuéstrese, haciendo uso del teorema y de la fórmula de Cauchy, que si la densidad de la integral de tipo de Cauchy $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau$ puede representarse en la forma

$$\varphi(\tau) = \varphi^+(\tau) + \varphi^-(\tau),$$

donde φ^+ y φ^- son valores de contorno de las funciones analíticas, respectivamente, en los dominios D^+ y D^-, entonces son lícitas las fórmulas

$$\Phi^+(z) = \varphi^+(z) + \varphi^-(\infty), \quad \Phi^-(z) = -\varphi^-(z) + \varphi^-(\infty).$$

Dedúzcase lo mismo de las fórmulas de Sojotski.

8. Empleando los resultados del problema anterior, calcúlese la integral de tipo de Cauchy para los casos:

a) $\varphi(t)$ es un valor de contorno de la función analítica en D^+, a excepción de un número finito de puntos a_k, en los cuales ella tiene polos;

b) $\varphi(t)$ es una función del mismo tipo en D^-.

Respuesta.

a) $\Phi^+(z) = \varphi(z) - \sum g_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)$, $\quad \Phi^-(z) = -\sum g_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)$;

b) $\Phi^+(z) = \sum g_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) + g(z)$, $\quad \Phi^-(z) = -\varphi(z) + \sum g_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) + g(z)$,

donde $g_k(z)$, $g(z)$ son polinomios que representan las partes principales de la descomposición de $\varphi(t)$, respectivamente, en el entorno de los polos finitos y en el de un punto infinitamente alejado ($g_k(0) = 0$).

9. Calcúlese la integral de tipo de Cauchy

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\frac{\tau^3 + i\tau^2 + \tau - 4i}{\tau^4 - 3\tau^2 - 4} + \frac{\ln\frac{\tau-2}{\tau-3}}{\tau^2-4} - \frac{e^{\frac{1}{\tau}} + \operatorname{sen}\frac{1}{\tau-1}}{\tau^2+1}\right]\frac{d\tau}{\tau - z},$$

donde L es una circunferencia $|z| = 3/2$.

Respuesta.

$$\Phi^+(z) = \frac{z + \ln\frac{z-2}{z-3}}{z^2-4}, \qquad \Phi^-(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}} + \operatorname{sen}\frac{1}{z-1} - i}{z^2+1}.$$

10. Haciendo uso de las fórmulas (4.11) y (4.12), calcúlese la integral singular

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \left[\frac{\tau^3 + i\tau^2 + \tau - 4i}{\tau^4 - 3\tau^2 - 4} + \frac{\ln\frac{\tau-2}{\tau-3}}{\tau^2-4} - \frac{e^{\frac{1}{\tau}} + \operatorname{sen}\frac{1}{\tau-1}}{\tau^2+1}\right]\frac{d\tau}{\tau - t}$$

donde L es el contorno del problema 9.

Respuesta. $\dfrac{t+\ln\dfrac{t-2}{t-3}}{t^2-4}+\dfrac{e^{\frac{1}{t}}+\operatorname{sen}\dfrac{1}{t-1}-i}{t^2+1}$.

11*. Dedúzcase la fórmula para una diferencia de valores límites de la integral de tipo de Cauchy $\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\varphi(t)$, sin exigir que $\varphi(t)$ satisfaga la condición de Hölder y sólo admitiendo su continuidad (N. I. Musjelishvili [16], § 17).

12. Demuéstrese que si $\varphi(t)$ es un valor de contorno en el contorno L de la función $\Phi(z)$, analítica en el dominio D^+, a excepción de un número finito de puntos en los cuales ella tiene polos, con la particularidad de que la suma de las partes principales de la descomposición de $\Phi(z)$ en los entornos de los polos es $R(z)$, entonces $\varphi(t)$ debe satisfacer la condición

$$-\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau+R(t)=0.$$

13. Dedúzcanse las fórmulas para los valores límites de una derivada del m-ésimo orden de la integral de tipo de Cauchy

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau,$$

considerando el contorno L abierto, con los extremos a, b. Se supone que la densidad $\varphi(t)$ es derivable tantas veces como se quiera.

14. Calcúlense las integrales singulares con núcleos de Hilbert:

a) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos n\theta\operatorname{ctg}\frac{\theta-\varphi}{2}\,d\theta$;

b) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\operatorname{sen} n\theta\operatorname{ctg}\frac{\theta-\varphi}{2}\,d\theta$;

c) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\ln 2\left|\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right|\operatorname{ctg}\frac{\theta-\varphi}{2}\,d\theta$.

Respuesta. a) $-\operatorname{sen} n\varphi$; b) $\cos n\varphi$; c) $\dfrac{\pi-\varphi}{2}$.

Observación. De a), para $n=0$, obtenemos $\displaystyle\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\theta-\varphi}{2}\,d\theta=0$. Hállese este resultado mediante el cálculo inmediato de la integral singular en calidad del valor principal.

15. Calcúlense las integrales singulares:

$$\text{a) } \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\ln[(1-\tau)^p(1+\tau)^q]}{\sqrt{1-\tau^2}\,(\tau-t)}\,d\tau;$$

$$\text{b) } \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\ln|x-\tau|\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}\,(\tau-t)}.$$

Indicación. Hágase el cambio de variables $\tau = \cos\theta$, $t = \cos\varphi$, teniendo en cuenta la identidad

$$\frac{1}{\cos\theta-\cos\varphi}=\frac{1}{2\operatorname{sen}\varphi}\left[\operatorname{ctg}\frac{\varphi+\theta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\theta}{2}\right]$$

y hágase uso del resultado en el ejemplo antecedente.

Respuesta.

$$\text{a) } \frac{p(\arccos t-\pi)+q\arccos t}{\sqrt{1-t^2}};$$

$$\text{b) } \frac{\arccos t-\pi\theta(x-t)}{\sqrt{1-t^2}}$$

donde $\theta(x-t)=1$ para $x>t$, y $\theta(x-t)=0$ para $x<t$.

16. Demuéstrese que si $\varphi(s)$ es una función periódica derivable, entonces, para una integral singular con núcleo de Hilbert es lícita la siguiente fórmula de integración por partes:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi'(\sigma)\ln\left[\operatorname{sen}^2\frac{\sigma-s}{2}\right]d\sigma.$$

17. Calcúlese la integral de tipo de Cauchy

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\ln t}{t-z}\,dt,$$

si el origen de coordenadas pertenece a D^+ y $\ln t$ está definido por la condición

$$0\leqslant \operatorname{Im}\ln t<2\pi.$$

Indicación. Aplíquese el teorema de Cauchy o fórmula de Cauchy a la integral resuelta en el contorno, compuesto por la curva L, los márgenes del corte que une el punto t_0 con el origen de coordenadas y una pequeña circunferencia cerca del origen.

Respuesta. $\Phi^+(z)=\ln(z-t_0)$, $\Phi^-(z)=\ln\left(1-\frac{t_0}{z}\right)$.

18. Sea $L=\sum_{k=1}^{m}L_k$ un contorno compuesto por m curvas simples abiertas que no tienen extremos comunes. Las coordenadas de los extremos, puestas en cierto orden, denotemos con $c_1, c_2, \ldots, c_{2m}$. Sea p cierto número entero, $0\leqslant$

$\leqslant p \leqslant 2m$, y $P(z)$, un polinomio. Calcúlese la integral singular

$$I(t)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\prod_{k=1}^{p}(\tau-c_k)^{1/2}}{\prod_{j=p+1}^{2m}(\tau-c_j)^{1/2}}\,\frac{P(\tau)}{\tau-t}\,d\tau.$$

Indicación. Examínese la integral de tipo de Cauchy

$$\Phi(z)=\frac{1}{4\pi i}\int_\Gamma \frac{\prod_{k=1}^{p}(\tau-c_k)^{1/2}}{\prod_{=p+1}^{2m}(\tau-c_j)^{1/2}}\,\frac{P(\tau)}{\tau-z}\,d\tau,$$

resuelta en el conjunto de lazos que cercan las curvas L_k. Efectúese el paso al límite cuando los lazos se convierten en cortes a lo largo de las curvas L_k y hágase uso de la fórmula de Sojotski $I = \Phi^+ + \Phi^-$.

Respuesta. $I(t) = -P^*(t)$, donde $P^*(z)$ es un polinomio que representa en sí la parte principal de la descomposición de la densidad de la integral de tipo de Cauchy en el entorno de un punto infinitamente alejado, es decir, un polinomio que satisface la condición

$$\lim_{z\to\infty}\left[\frac{\prod_{k=1}^{p}(z-c_k)^{1/2}}{\prod_{j=p+1}^{2m}(z-c_j)^{1/2}}\,P(z)-P^*(z)\right]=0.$$

19. Haciendo uso de los resultados obtenidos en el problema anterior, calcúlense las siguientes integrales singulares

a) $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\frac{t^2+3}{t-x}\,dt$;

b) $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{t^n}{\sqrt{a^2-t^2}}\,\frac{dt}{t-x}$ ($n>0$, es entero)

c) $\dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_{a}^{b}\frac{\tau^3-2\tau^2+3\tau+1}{\sqrt{(\tau-a)(\tau-b)}}\,\frac{d\tau}{\tau-t}$.

Respuesta.

a) $-x^2+x-3{,}5$;

b) $x^{n-1}+\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{1\cdot 3\ldots(2k-1)}{2\cdot 4\ldots 2k}\,a^{2k}x^{n-2k-1}$,

donde $m=\dfrac{n}{2}-1$ para n par, $m=\dfrac{n-1}{2}$ para n impar;

c) $-t^2+\dfrac{1}{2}(4-a-b)\,t+\dfrac{1}{8}(8a+8b-2ab-3a^2-3b^2)$.

20. Calcúlense las integrales singulares

$$\text{a) } I_p(t)=\frac{1}{\pi i}\int_a^b \frac{\left[\ln\dfrac{\tau-a}{\tau-b}\right]^p}{\sqrt{(\tau-a)(\tau-b)}}\,\frac{d\tau}{\tau-t};$$

$$\text{b) } I_p(t)=\frac{1}{\pi i}\int_a^b \frac{\left[\ln\dfrac{\tau-a}{\tau-b}\right]^p}{\tau-t}\,d\tau$$

(p es un número entero no negativo).

Respuesta.

$$\text{a) } I_p(t)=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} C_p^k (2\pi i)^k \left[\frac{\ln^{p-k}\dfrac{-a}{t-b}}{\sqrt{(t-a)(t-b)}}+I_{p-k}(t)\right],$$

$$I_0(t)=0;$$

$$\text{b) } I_p(t)=-\frac{1}{(p+1)\,2\pi i}\left[2\ln^{p+1}\frac{t-a}{t-b}+\sum_{k=1}^{p+1} C_{p+1}^k (2\pi i)^k \ln^{p-k+1}\frac{t-a}{t-b}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=2}^{p+1} C_{p+1}^k (2\pi i)^k I_{p-k+1}(t)\right],$$

donde C_p^k son coeficientes binomiales.

21. Muéstrese que $\Phi(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{-a}^{a}\nu(t)\operatorname{cth}(t-z)\,dt$ es una función periódica de período πi, que es analítica fuera de los segmentos $-a\leqslant x\leqslant a$, $y=k\pi i$ ($k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$).

22. Muéstrese que para la función $\Phi(z)$ del problema anterior se verifica la correlación

$$\Phi^+(x)+\Phi^-(x)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\operatorname{th}a}^{\operatorname{th}a}\nu_1(s)\,\frac{ds}{s-\sigma}+\frac{1}{\pi i}\int_{-\operatorname{th}a}^{\operatorname{th}a}\nu_1(s)\,\frac{s\,ds}{1-s^2},$$

donde

$$\nu_1(s)=\nu(\operatorname{arth}s),\quad \sigma=\operatorname{th}x\ (-a<x<a).$$

23*. Sea L un suave contorno cerrado con la longitud del arco l, y sean $G^+(z,\zeta)$, $G^-(z,\zeta)$ las funciones de Green del problema de Neumann para los dominios D^+, D^-, respectivamente.

Demuéstrese que se verifican las siguientes fórmulas de inversión de Hilbert

$$v^+(s)=\frac{1}{l}\int_0^l \frac{\partial G^+(s,\ \sigma)}{\partial\sigma}\,u^+(\sigma)\,d\sigma+\frac{1}{l}\int_0^l v^+(\sigma)\,d\sigma,$$

$$u^+(s)=-\frac{1}{l}\int_0^l \frac{\partial G^+(s,\ \sigma)}{\partial\sigma}\,v^+(\sigma)\,d\sigma+\frac{1}{l}\int_0^l u^+(\sigma)\,d\sigma,$$

$$v^-(s)=-\frac{1}{l}\int_0^l \frac{\partial G^-(s,\ \sigma)}{\partial\sigma}\,u^-(\sigma)\,d\sigma+\frac{1}{l}\int_0^l v^-(\sigma)\,d\sigma,$$

$$u^-(s)=\frac{1}{l}\int_0^l \frac{\partial G^-(s,\ \sigma)}{\partial\sigma}\,v^-(\sigma)\,d\sigma+\frac{1}{l}\int_0^l u^-(\sigma)\,d\sigma,$$

donde $G^{\pm}(s,\ \sigma)=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{l}(s-\sigma)+$ una función regular (Hilbert [10], págs. 84-88).

Indicación. Utilícense la expresión para resolver el problema de Neumann en términos de la función de Green, las ecuaciones de Cauchy — Riemann en forma $\frac{\partial u}{\partial n}=-\frac{\partial v}{\partial s}$, $\frac{\partial v}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial s}$, y la integración por partes.

24*. Demuéstrese que la condición necesaria y suficiente para que $f^+(s)=a(s)+ib(s)$ sea un valor de contorno de una función analítica en el dominio D^+, es el cumplimiento de la igualdad

$$f^+(s)-\frac{i}{2\pi}\int_0^l \frac{\partial G^+(s,\ \sigma)}{\partial\sigma}\,f^+(\sigma)\,d\sigma-\frac{1}{l}\int_0^l f^+(\sigma)\,d\sigma=0.$$

Correspondientemente, para el dominio D^- la condición es

$$f^-(s)+\frac{i}{2\pi}\int_0^l \frac{\partial G^-(s,\ \sigma)}{\partial\sigma}\,f^-(\sigma)\,d\sigma-\frac{1}{l}\int_0^l f^-(\sigma)\,\partial\sigma=0.$$

(Hilbert [10]).

Indicación. Utilícense las fórmulas de 23*.

25. Sea $f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$ una función analítica en el semiplano superior. Denotemos con $u(x)$, $v(x)$ los valores límites de sus partes real e imaginaria en el eje real. Muéstrese que se verifican las fórmulas de inversión de Hilbert

$$v(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi)}{\xi-x}\,d\xi+v_\infty,\qquad u(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v(\xi)}{\xi-x}\,d\xi+u_\infty,$$

donde u_∞, v_∞ son valores de las partes real e imaginaria en la infinidad.

26. a) Calcúlese la integral de tipo de Cauchy

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau,$$

si $\varphi(\tau) = \varphi^+(\tau) + \varphi^-(\tau)$, donde $\varphi^{\pm}(\tau)$ satisfacen la condición de Hölder en todo el eje y son valores límites de las funciones analíticas, respectivamente, en los semiplanos superior e inferior.

Respuesta.

$$\Phi^+(z) = \varphi^+(z) - \frac{1}{2}\varphi^+(\infty) + \frac{1}{2}\varphi^-(\infty),$$

$$\Phi^-(z) = -\varphi^-(z) - \frac{1}{2}\varphi^+(\infty) + \frac{1}{2}\varphi^-(\infty).$$

Observación. Se puede aceptar, según se quiera,

$$\varphi^+(\infty) = \varphi(\infty), \quad \varphi^-(\infty) = 0 \text{ ó}$$
$$\varphi^-(\infty) = \varphi(\infty), \quad \varphi^+(\infty) = 0.$$

b) Haciendo uso de la solución del p. a), calcúlese la integral de tipo de Cauchy

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau^2}{\tau^2+1}\,\frac{d\tau}{\tau - z}.$$

Respuesta.

$$\Phi^+(z) = \frac{z}{z+i}, \qquad \Phi^-(z) = \frac{-z}{z-i}.$$

27*. Pruébese que

$$\int_{ab} \frac{d\tau}{\tau - t}\int_{ab} \frac{d\tau_1}{\tau_1 - \tau} = \frac{1}{2}\left[\ln^2\frac{b-t}{t-a} - \pi^2\right].$$

(V. D. Kupradze, véase la nota de la pág. 84.)

28*. Dedúzcase la fórmula de permutación (7.7) con la ayuda de la transformación

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau - t}\int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1 - \tau}\,d\tau_1 = \int_L \frac{d\tau}{\tau - t}\int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1) - \varphi(\tau, \tau)}{\tau_1 - \tau}\,d\tau_1 +$$
$$+ \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau) - \varphi(t, t)}{\tau - t}\,d\tau \int_L \frac{d\tau_1}{\tau_1 - \tau} + \varphi(t, t)\int_L \frac{d\tau}{\tau - t}\int_L \frac{d\tau_1}{\tau_1 - \tau}.$$

(V. D. Kupradze, véase la nota de la pág. 84.)

Indicación. Inviértase el orden de integración en las integrales donde sólo una integral es singular y hágase uso de los resultados del ejemplo anterior.

29. Obténganse las fórmulas de inversión (6.6) y (6.7), haciendo uso de la identidad

$$2\frac{d\tau}{\tau - t} = i\,d\sigma + \operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\,d\sigma, \quad \text{donde} \quad t = e^{is},\ \tau = e^{i\sigma}$$

y de la condición necesaria y suficiente (4.11).

Por analogía, pruébese, con ayuda de la condición necesaria y suficiente (4.12) que para una función analítica en el dominio $|z| > 1$, las fórmulas de inversión (6.6) y (6.7) toman la forma

$$v(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma + v(\infty),$$

$$u(s) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma + u(\infty).$$

CAPITULO II

PROBLEMA DE CONTORNO DE RIEMANN

Consideraremos en este capítulo la cuestión central de la teoría de los problemas de contorno de funciones analíticas, es decir, el problema de contorno de Riemann. Alrededor de esta cuestión viene agrupándose todo el material y en lo sucesivo volveremos a ella más de una vez en relación con toda clase de generalizaciones y suplementos.

Comencemos con las consideraciones auxiliares.

§ 12. Algunos teoremas auxiliares

Demos aquí cuatro teoremas que se usan con mayor frecuencia en la teoría de funciones analíticas. Todos ellos se exponen en los manuales de esta teoría, razón por la cual sólo nos limitemos, en lo esencial, a las enunciaciones y explicaciones de la terminología. La exposición más detallada se da sólo para los casos del principio de simetría y de argumento, donde nos vemos obligados a generalizar el resultado obtenido o cambiar su enunciación, aplicando el material a las necesidades de la teoría de problemas de contorno.

12.1. Principio de continuidad. Prolongación según simetría.

1°. TEOREMA DE PROLONGACIÓN ANALÍTICA EN LOS DOMINIOS CONTIGUOS (principio de continuidad). *Supóngase que dos dominios D_1 y D_2 son limítrofes a lo largo de cierta curva suave L; en los dominios D_1 y D_2 están definidas las funciones analíticas $f_1(z)$ y $f_2(z)$. Supóngase también que cuando el punto z tiende a la curva L, ambas funciones tienden a los valores límites continuos en la curva L y, además, dichos valores límites son iguales entre sí. Bajo estas condiciones cada una de las funciones $f_1(z)$ y $f_2(z)$ será prolongación analítica una de la otra.*

2°. DEFINICIÓN ADICIONAL DE UNA FUNCIÓN SEGÚN SIMETRÍA. Llamaremos, como siempre, puntos simétricos con relación a una recta aquellos que son representación especular uno del otro respecto a una

recta, es decir, los puntos que se disponen en una perpendicular a dicha recta a las distancias iguales y por distintos lados de la última. Si la recta es el eje real y las coordenadas del punto z se expresan por $z = x + iy$, entonces las coordenadas del punto, simétrico a z, serán $z^* = \bar{z} = x - iy$. Se llaman puntos simétricos respecto de una circunferencia aquellos que representan la inversión uno de otro con relación a dicha circunferencia. Si un punto dado se dispone a una distancia r del centro de la circunferencia de radio R, entonces el punto simétrico se ubica en el mismo radio a la distancia $\rho = R^2/r$ del centro. Si tenemos una circunferencia unitaria y la coordenada del punto dado es z, entonces el punto simétrico tendrá la coordenada $z^* = \frac{1}{\bar{z}}$.

He aquí una serie de designaciones las cuales utilizaremos ahora y en lo sucesivo:

a) $\overline{f(z)}$ es, como siempre, una función conjugada de la dada;

b) $f(\bar{z})$ es una función que se obtiene de $f(z)$, sustituyendo en ella z por $\bar{z}$, es decir, y por $-y$;

c) $\bar{f}(z)$ es una función definida por la condición $\bar{f}(z) = \overline{f(\bar{z})}$.

Al sustituir en la última igualdad z por $\bar{z}$, obtenemos $\bar{f}(\bar{z}) = f(z)$.

Si, por ejemplo, $f(z)$ se da por la serie $f(z) = \sum c_n z^n$, entonces

$$\overline{f(z)} = \sum \bar{c}_n \bar{z}^n, \quad f(\bar{z}) = \sum c_n \bar{z}^n, \quad \bar{f}(z) = \sum \bar{c}_n z^n.$$

Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, entonces

$\overline{f(z)} = u(x, y) - iv(x, y)$, $f(\bar{z}) = u(x, -y) + iv(x, -y)$,

$$\bar{f}(z) = u(x, -y) - iv(x, -y).$$

Para una función representada por la integral de tipo de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau - z},$$

tendremos

$$\overline{f(z)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)}\, \overline{d\tau}}{\bar{\tau} - \bar{z}}, \quad f(\bar{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau - \bar{z}},$$

$$\bar{f}(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)}\, \overline{d\tau}}{\bar{\tau} - z}.$$

Observemos que si la función satisface la condición $\bar{f}(z) = f(z)$, entonces para los valores reales de z ella toma valores reales puros. La afirmación recíproca es también justa.

La prolongación de la función analítica según simetría es en la teoría de funciones analíticas un medio simple y efectivo de la prolongación analítica. Precisamente en esta forma dicha prolongación se expone en los manuales de esta teoría, llamada *principio de simetría*. En las aplicaciones a la teoría de los problemas de contorno frecuentemente no se cumplen las condiciones para que pueda realizarse la prolongación analítica y el método de la definición adicional de una función según simetría sirve no para la prolongación analítica sino para formar una función analítica a trozos.

A. DEFINICIÓN ADICIONAL ANALÍTICA SEGÚN SIMETRÍA. Sea D_z un dominio del plano z, y sea L_z cierta recta o circunferencia que tienen una parte común con el contorno del dominio D_z. El conjunto de puntos simétricos a todos los puntos de D_z con relación a L_z forman un dominio que denotemos con D_z^* y llamaremos dominio simétrico a D_z respecto a L_z. Sea, luego, $w = f(z)$ una función analítica en D_z, que lo aplica sobre cierto dominio D_w; y supongamos que L_w es una recta arbitraria o circunferencia en el plano w, y D_w^* es un dominio simétrico a D_w respecto de L_w. Definamos en D_z^* la función $w = f^*(z)$ poniendo en correspondencia a los puntos z^*, simétricos a z, los valores de w^* que son simétricos a los valores de $w = f(z)$; en particular, si L_z y L_w son ejes reales, entonces

$$f^*(z) = \overline{f(\bar{z})} = \bar{f}(z).$$

LEMA *La función $w = f^*(z)$ es analítica en el dominio D_z^*.*

Demos aquí una demostración basada en las propiedades de la integral de tipo de Cauchy, un aparato matemático fundamental de este libro[1]).

Haciendo uso de la propiedad circular de las transformaciones lineales fraccionales, realizamos en los planos z y w unas transformaciones lineales fraccionales de tal manera que L_z, L_w pasen, respectivamente, en los segmentos de los ejes reales z y w. En virtud de la propiedad de invariación de los puntos simétricos en una transformación lineal fraccional, los puntos simétricos respecto de L_z, L_w, pasarán en los puntos simétricos respecto a los ejes reales de los planos z y w. De este modo, la situación se reduce al caso en que los pares de puntos simétricos serán z, $\bar{z}$; w, $\bar{w}$. Para demostrar que $f^*(z)$ es analítica aprovechamos la integral de Cauchy. Se tiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_z} \frac{f(\tau)}{\tau - z}\, d\tau.$$

[1]) Otras demostraciones se pueden encontrar en distintos manuales de la teoría de funciones analíticas.

Por la definición.

$$f^*(z) = \overline{f(\bar{z})} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_z} \frac{\overline{f(\tau)}}{\bar{\tau}-z}\,d\bar{\tau}.$$

Bajo el signo de la integral sustituyamos τ por $\bar{\tau}$, y $\overline{f(\bar{\tau})}$ por $f^*(\tau)$. En este caso el contorno L_z pasará en L_z^*, recorrido en el sentido negativo.

Obtendremos

$$f^*(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_z^*} \frac{f^*(\tau)}{\tau - z}\,d\tau,$$

es decir, $f^*(z)$ se representa por la integral de Cauchy, por lo que es analítica.

La función

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D_z, \\ f^*(z), & z \in D_z^*, \end{cases}$$

es analítica a trozos en la totalidad de los dominios D_z, D_z^*.

B. Pasemos, ahora, al principio de simetría en una enunciación habitual.

TEOREMA (principio de simetría). *Supóngase que la función* $w = f(z)$ *es analítica en el dominio* D_z, *una parte de la frontera del cual es un segmento de recta o un arco de circunferencia, y aplica el dominio* D_z *en cierto dominio* D_w *de tal modo que dichos segmento o arco pasen de nuevo en un segmento de la recta o en arco de la circunferencia. En este caso la función* $f^*(z)$, *definida según simetría en el dominio* D_z^*, *será prolongación analítica de la función* $f(z)$ *en el dominio* D_z^*.

Razonando igual que al demostrar el lema, se puede reducir la consideración al caso en que un segmento del eje real del plano z se aplica sobre un segmento del eje real del plano w. Conforme al lema, $f^*(z)$ es analítica en D_z^*. Cuando z tiende a un punto del eje real, el punto $\bar{z}$, simétrico a z, tiende al mismo punto del eje. Por definición de simetría y la condición del teorema, w y $\bar{w}$ tienden a un mismo punto del eje del plano w. Por consiguiente, los valores de frontera de $f(z)$ y $f^*(z)$ coinciden. Las condiciones del principio de continuidad están cumplidas y el teorema queda demostrado.

La noción de simetría puede ser generalizada considerablemente. Sea L una curva analítica, definida en la forma paramétrica: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, donde φ, ψ son funciones analíticas del parámetro real t. La igualdad $z = \varphi(t) + i\,\psi(t)$, para t real, determina un punto de la curva L, y, para t complejo, define cierto punto del plano complejo no perteneciente a L. Al sustituir t por $\bar{t}$, obtendre-

mos el punto $z^* = \varphi(\bar{t}) + i\psi(\bar{t})$, que es simétrico, por definición[1]), al punto z respecto de L. En la última expresión tomemos un valor conjugado y le unamos a él la expresión para z. Resolviendo el sistema, obtendremos

$$\varphi(t) = x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}^*), \qquad \psi(t) = y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}^*).$$

Si la ecuación de la curva L está dada en una forma implícita por la ecuación $f(x, y) = 0$, obtendremos la siguiente ecuación para determinar el punto z^* que sea simétrico a z respecto de la curva L:

$$f\left[\frac{1}{2}(z^* + \bar{z}), \frac{1}{2i}(z^* - \bar{z})\right] = 0.$$

Para una curva analítica arbitraria el algoritmo de construcción de los puntos simétricos no se ha estudiado. Para un caso más particular de la curva algebraica está elaborado y en ciertos casos puede realizarse con eficacia (véase p. 53.6).

12.2. Principio de argumento. Teorema generalizado de Liouville.

1°. PRINCIPIO DE ARGUMENTO. Supóngase que en el dominio D, limitado por el contorno L, la función $f(z)$ es analítica, a excepción de un número finito de puntos donde ella pueda tener polos. Escribamos el desarrollo en serie en el entorno de cierto punto z_0:

$$f(z) = c_n(z - z_0)^n + c_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \ldots = (z - z_0)^n f_1(z),$$
$$f_1(z_0) = c_n \neq 0.$$

El número n se denomina *orden de la función en el punto* z_0. Si $n > 0$, el orden de la función es el orden de su cero; si $n < 0$, su orden es el orden del polo de signo opuesto. Si el orden de la función en z_0 es nulo, en este punto la función toma un valor finito, distinto de cero. Al considerar un punto infinitamente alejado, el binomio $z - z_0$ debe sustituirse por $\frac{1}{z}$. Si el punto z_0 se ubica en el contorno L, por orden de la función tomamos el número $n/2$.

Sean N_D, P_D; N_L, P_L, respectivamente, los números de ceros y polos en el dominio y en el contorno, con la particularidad de que cada uno de ellos se toma tantas veces como es su multiplicidad. Con el símbolo $[w]_L$ designaremos el incremento de la magnitud w, al recorrerse el contorno en el sentido positivo[2]). Enunciemos el teorema, llamado *principio de argumento*, en la forma en que será usado a continuación (p. 36.4).

---

[1]) El sentido de esta definición consiste en una representación especular en lo infinitamente pequeño con la sucesiva prolongación analítica.

[2]) Por sentido positivo se toma, como siempre, aquel en que el dominio considerado queda a la izquierda.

PRINCIPIO DE ARGUMENTO. *Supóngase que $f(z)$ es una función analítica y uniforme en el dominio múltiplemente conexo D, limitado por un contorno suave $L = L_0 + L_1 + \ldots + L_m$, a excepción de un número finito de puntos, donde la función puede tener polos, es continua en el dominio cerrado $D + L$ y tiene en el contorno a lo sumo un número finito de ceros de orden entero. En este caso se verifica la fórmula*

$$N_D - P_D + \frac{1}{2}(N_L - P_L) = \frac{1}{2\pi}[\arg f(z)]_L.$$

No damos aquí la demostración de este teorema[1]). Se puede encontrarla en la obra de F. D. Gajov, E. I. Zveróvich, S. G. Samko 1)*.

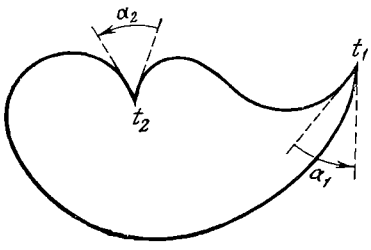


Fig. 11

El teorema contiene una generalización de gran alcance del principio de argumento. Con el objeto de simplificar la enunciación de esta generalización nos limitemos aquí a un caso del dominio simplemente conexo, limitado por un simple contorno suave a trozos.

PRINCIPIO GENERALIZADO DE ARGUMENTO *Sea $f(z)$ analítica en D, a excepción de un número finito de puntos, donde ella tiene polos, y sea esta función prolongable continuamente en todo el contorno, salvo los puntos t_k, en cuyos contornos puede ser representada en la forma*

$$f(z) = f_k(z)\,(z - t_k)^{\lambda_k}\,\ln^{\mu_k}(z - t_k) \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

donde $f_k(z) \neq 0$, λ_k, μ_k son, en general, ciertas constantes complejas.

Entonces

$$N_D - P_D + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \operatorname{Re}\lambda_k = \frac{1}{2\pi}[\arg f(z)]_L,$$

donde α_k es un ángulo formado por los vectores tangentes en el punto angular (véanse fig. 11 y p. 3.4).

2°. TEOREMA DE LIOUVILLE (generalizado). *Sea la función $f(z)$ analítica en todo plano de la variable compleja, a excepción de los puntos $a_0 = \infty$, a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, donde ella tiene polos, con la particularidad de que las partes principales de los desarrollos de la función $f(z)$ en el entorno de los polos tienen la forma*

$$G_0(z) = c_1^0 z + c_2^0 z^2 + \ldots + c_{m_0}^0 z^{m_0} \quad \text{en el punto } a_0,$$

$$G_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right) = \frac{c_1^k}{z - a_k} + \frac{c_2^k}{(z - a_k)^2} + \ldots + \frac{c_{m_k}^k}{(z - a_k)^{m_k}} \quad \text{en los puntos } a_k.$$

[1]) Para el caso $N_L = P_L = 0$, la demostración se da en todos los manuales de la teoría de funciones analíticas.

En este caso $f(z)$ es una función racional y puede representarse por la fórmula

$$f(z) = c + G_0(z) + \sum_{k=1}^{n} G_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right).$$

En particular, si la única singularidad de la función $f(z)$ es un polo de orden m en el punto infinitamente alejado, entonces $f(z)$ es un polinomio de grado m:

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_m z^m.$$

§ 13. Indice

13.1. Definición y propiedades fundamentales. Sea L un contorno cerrado suave y $G(t)$, una función continua, dada en el contorno, que no se reduce a cero.

DEFINICIÓN. *Se denomina índice $\varkappa$ de la función $G(t)$* en el contorno L el incremento de su argumento dividido por 2π, al recorrer la curva L en el sentido positivo:

$$\varkappa = \operatorname{Ind} G(t) = \frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L. \tag{13.1}$$

Puesto que $\ln G(t) = \ln |G(t)| + i \arg G(t)$, y después de recorrer el contorno L, la función $|G(t)|$ vuelve a su valor de partida, entonces $[\ln G(t)]_L = i[\arg G(t)]_L$, y, por lo tanto,

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}[\ln G(t)]_L. \tag{13.2}$$

El índice puede ser representado en la forma de la integral

$$\varkappa = \operatorname{Ind} G(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L d \ln G(t) = \frac{1}{2\pi}\int_L d \arg G(t). \tag{13.3}$$

En este caso, si $G(t)$ no es derivable, pero tiene variación acotada, la integral se comprende en el sentido de Stieltjes. Por ser $G(t)$ continua, la imagen Γ del contorno cerrado L será también un contorno cerrado y el incremento del argumento de $G(t)$, al recorrer el contorno L, será múltiplo de 2π; por consiguiente:

1. *El índice de una función que es continua en el contorno cerrado y en ningún punto se reduce a cero, es un número entero o cero.*

De la definición de índice obtenemos inmediatamente:

2. *El índice de un producto de funciones es igual a la suma de índices de los factores. El índice de un cociente es igual a la diferencia de índices del dividendo y divisor.*

Supongamos, ahora, que $G(t)$ es derivable y representa un valor de contorno de una función analítica en el interior o fuera del contorno L. En este caso

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i} \int_L d \ln G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{G'(t)}{G(t)} dt \qquad (13.4)$$

resulta igual al residuo logarítmico de la función $G(z)$. Del principio de argumento se infieren las siguientes propiedades del índice:

3. *Si $G(t)$ es un valor de contorno de la función, analítica en el interior o fuera del contorno, su índice es igual al número de ceros dentro del contorno, o, respectivamente, al número de ceros fuera del contorno, tomado con el signo menos.*

4. *Si la función $G(z)$ es analítica en el interior del contorno, a excepción de un número finito de puntos, donde ella puede tener polos, el número de ceros se debe sustituir por la diferencia del número de ceros y número de polos.*

Los ceros y polos se cuentan tantas veces como cual es su multiplicidad.

Observemos, además, que los índices de funciones conjugadas complejas son opuestos de signo.

13.2. Cálculo del índice. Sea

$$t = t_1(s) + it_2(s) \quad (0 \leqslant s \leqslant l)$$

la ecuación del contorno L. Sustituyendo la expresión para la coordenada compleja t en la función $G(t)$, obtenemos

$$G(t) = G[t_1(s) + it_2(s)] = \xi(s) + i\eta(s). \qquad (13.5)$$

Convengamos en considerar ξ, η como coordenadas de Descartes. Entonces

$$\xi = \xi(s), \quad \eta = \eta(s)$$

representa una ecuación paramétrica de cierta curva Γ. Como que la función $G(t)$ es continua y el contorno L es cerrado, la curva Γ será cerrada.

El número de vueltas de la curva Γ alrededor del origen de coordenadas, es decir, el número de revoluciones completas del radio vector, cuando la variable s varía de 0 hasta l, será, evidentemente, el índice de la función $G(t)$. Este número lo llaman, a veces, *orden de la curva* Γ con relación al origen de coordenadas.

Si se logra construir la curva Γ, el número de vueltas se ve en seguida. Se pueden aducir muchos ejemplos, cuando se hace posible determinar el índice según la forma de la curva Γ. Por ejemplo, si $G(t)$ es una función real o imaginaria pura que no se reduce a cero, Γ es un argumento de una recta (recorrido un número par de veces) y el índice de $G(t)$ es nulo. Si la parte real $\xi(s)$ o la imaginaria $\eta(s)$

no cambia de signo, el índice, obviamente, es también nulo, etc. Si la función $G(t)$ puede ser representada en la forma de un producto o cociente de unas funciones las cuales son valores límites de las funciones analíticas en el interior o afuera del contorno, entonces el índice se calcula a base de las propiedades 2, 3, 4.

En el caso general el cálculo del índice puede efectuarse por la fórmula (13.3). Haciendo en ésta, en virtud de la fórmula (13.5)

$$d \arg G(t) = d \operatorname{arctg} \frac{\eta(s)}{\xi(s)}$$

y suponiendo que ξ y η son derivables, obtenemos

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\xi\, d\eta - \eta\, d\xi}{\xi^2 + \eta^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\xi(s)\,\eta'(s) - \eta(s)\,\xi'(s)}{\xi^2(s) + \eta^2(s)}\, ds. \qquad (13.6)$$

En ciertos casos sencillos se puede dar un algoritmo algebraico para calcular el índice (véanse los problemas 1, 2, 3 al final del capítulo).

La noción del índice puede ser extendida a un caso del contorno abierto L, como también a los casos en que $G(t)$ tiene discontinuidades (véanse pp. 41.2 y 42.1).

OBSERVACIÓN. Si $G(t)$ es el valor de contorno de una función analítica, se puede variar el contorno L entre los límites anchos sin alterar la magnitud del índice. Es evidente que el índice cambiará cada vez cuando el contorno, deformándose, pasa a través de cero o un polo de $G(z)$.

EJEMPLO. Calcúlese el índice de $G(t) = t^n$ en cualquier contorno L que circunda el origen de coordenadas.

1er MÉTODO. La función t^n es el valor de contorno de la función z^n, que tiene dentro del contorno un cero de orden n. Por consiguiente

$$\varkappa = \operatorname{Ind} t^n = n.$$

2° MÉTODO. Si el argumento t es φ, el argumento t^n será igual a $n\varphi$. Cuando el punto t, al finalizar el recorrido del contorno L, vuelve al valor de partida, φ recibe el incremento 2π. Por consiguiente,

$$\operatorname{Ind} t^n = n.$$

El cálculo del índice puede efectuarse por los métodos numéricos con el uso de las máquinas calculadoras de acción rápida. Por ser enteros los valores del índice, es evidente que un valor aproximado de éste, hallado con un error inferior a 1/2 y redondeado hasta un número entero más próximo nos proporcionará el valor exacto.

He aquí uno de los métodos numéricos para calcular el índice. El intervalo $[0, l]$ de variación del parámetro s, que define la ecuación del contorno L, lo dividamos mediante los puntos $s_0 = 0, s_1, s_2, \ldots, s_n = l$ en n partes iguales. Como consecuencia, el mismo contorno L y la curva Γ, que es la aplicación de L obtenida con la ayuda de la función $G(t)$, resultarán divididos en n arcos. Sea γ_i

uno de tales arcos de la curva Γ, y sean (ξ_{i-1}, η_{i-1}), (ξ_i, η_i) las coordenadas de sus extremos. Aquí $\xi_i = \xi_i(s)$, $\eta_i = \eta_i(s)$. Designemos con $\Delta\varphi_i$ el ángulo formado por radios vectores de los extremos del arco γ_i. En este caso, según la fórmula (13.1)

$$\varkappa = \operatorname{Ind} G(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n} \Delta\varphi_i.$$

Para n suficientemente grande tenemos

$$\Delta\varphi_i \approx \operatorname{sen} \Delta\varphi_i = \frac{\xi_i\eta_{i-1} - \xi_{i-1}\eta_i}{\sqrt{\xi_{i-1}^2 + \eta_{i-1}^2}\sqrt{\xi_i^2 + \eta_i^2}},$$

y por esta razón

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i\eta_{i-1} - \xi_{i-1}\eta_i}{\sqrt{\xi_{i-1}^2 + \eta_{i-1}^2}\sqrt{\xi_i^2 + \eta_i^2}} + R_n,$$

donde R_n es un error.

Sería fácil de probar que si las funciones $t_1(s)$ y $t_2(s)$, que figuran en la ecuación del contorno L, satisfacen la condición de Hölder con el exponente α, y la función $G(t)$ satisface la misma condición con el exponente β, entonces

$$|R_n| < \frac{C}{n^{3\alpha\beta - 1}}.$$

donde C es una constante.

De aquí, para $\alpha\beta > 1/3$ y $n \to \infty$, tenemos $R_n \to 0$. De esta manera obtenemos la fórmula de cálculo

$$\varkappa \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i\eta_{i-1} - \xi_{i-1}\eta_i}{\sqrt{\xi_{i-1}^2 + \eta_{i-1}^2}\sqrt{\xi_i^2 + \eta_i^2}}. \tag{13.7}$$

la cual puede fácilmente programarse para las máquinas calculadoras.

Demos un ejemplo de cálculo del índice, efectuado por una máquina calculadora «Strela», aplicando la fórmula (13.7). Para el índice de una función que no es prolongable analíticamente al dominio

$$w = u + iv = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}(x+y) - \frac{9}{8(x^2+y^2+x)+1} + i(x-y),$$

obtenemos en la circunferencia unitaria, al redondear hasta el tercer signo:

para $n = 32$. $\varkappa \approx -0{,}949$,

para $n = 64$ $\varkappa \approx -0{,}983$.

Por consiguiente, $\varkappa = -1$.

Según muestra el ejemplo, para obtener este resultado, sería suficiente elegir n mucho menor.

Las partes real e imaginaria de la función en consideración están definidas por medio de funciones analíticas y pueden ser prolongadas analíticamente al interior de un círculo. La función prolongada $w(x, y)$ tiene cero en el punto $(1/2, 1/2)$ y se reduce al infinito en la circunferencia $(x + 1/2)^2 + y^2 = 1/8$.

Del ejemplo se ve que para las funciones complejas no analíticas en el dominio no existe ninguna dependencia sencilla que vincule el índice con ceros e infinitos de la función. Esta última consideración se ha tomado de la obra de Z. A. Chikin 4)*.

13.3. Indices parciales de la función de dos variables [1]). Examinemos la función $G(t_1, t_2)$ de dos variables t_1 y t_2, que es continua y distinta de cero en los puntos de la armazón $L = L_1 \times L_2$ de cierto dominio bicilíndrico (véase el p. 9.4).

Por analogía con 13.1, el índice de tal función a lo largo de cualquier curva cerrada y continua $\Gamma \subset L$, definida por las ecuaciones

$$t_1 = t_1(s), \quad t_2 = t_2(s) \quad (0 \leqslant s \leqslant T),$$

lo definiremos como variación de su argumento al recorrerse Γ en el sentido de crecimiento del parámetro s:

$$\varkappa_\Gamma = \operatorname{Ind}_\Gamma G = \frac{1}{2\pi} [\arg G(t_1, t_2)]_\Gamma =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma d \ln G(t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^T d \ln G(t_1(s), t_2(s)).$$

En particular obtendremos

$$\varkappa_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} d \ln G, \quad \varkappa_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} d \ln G$$

y observemos que la integral $\varkappa_1$ no depende de t_2, puesto que es una función continua de la variable $t_2 \in L_2$ y es, al mismo tiempo, un número entero. Del modo igual, $\varkappa_2$ no depende de t_1.

Con la ayuda de unas consideraciones topológicas no es difícil demostrar que se verifica la correlación

$$\varkappa_\Gamma = m_1 \varkappa_1 + m_2 \varkappa_2; \; m_1, \; m_2 \text{ son enteros.}$$

De aquí, si $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$, entonces $\varkappa_\Gamma = 0$, y si $\varkappa_\Gamma = 0$ para todo contorno cerrado $\Gamma \subset L$, entonces, simultáneamente, también $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$.

Los números enteros $\varkappa_1 = \varkappa_1(G)$ y $\varkappa_2 = \varkappa_2(G)$ llamaremos *índices parciales de la función* $G(t_1, t_2)$, que es distinta de cero y continua en L.

Los índices parciales de la función de dos variables poseen las mismas propiedades que tiene el índice de la función de una variable. Por ejemplo,

$$\varkappa_j(GF) = \varkappa_j(G) + \varkappa_j(F), \quad \varkappa_j\left(\frac{G}{F}\right) = \varkappa_j(G) - \varkappa_j(F),$$

[1]) Los conceptos aquí expuestos se han tomado de las obras de I. S. Simonenko 4)* y V. A. Kakichev 3)*.

y si la función $G(z_1, z_2)$ es analítica en el dominio bicilíndrico $D_1 \times D_2$ y continua en su clausura (adherencia), las igualdades $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$ serán equivalentes a lo que $G(z_1, z_2)$ no se reduce a cero en la clausura $D_1 \times D_2$.

§ 14. Problema de Riemann para el dominio simplemente conexo

14.1. Planteamiento del problema. Sean dados un simple contorno cerrado suave L, que divide el plano de la variable compleja en el dominio interior D^+ y el exterior D^-, y dos funciones de los puntos del contorno $G(t)$ y $g(t)$ que satisfacen la condición de Hölder, con la particularidad de que $G(t)$ no se reduce a cero.

PROBLEMA DE RIEMANN. *Hállense dos funciones*[1]: $\Phi^+(z)$, *analítica en el dominio* D^+, *y* $\Phi^-(z)$, *analítica en el dominio* D^-, incluido $z = \infty$, *las cuales en el contorno* L *satisfagan la correlación lineal*

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) \quad \text{(problema homogéneo)} \tag{14.1}$$

ó

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t) \quad \text{(problema no homogéneo)} \tag{14.2}$$

Llamaremos la función $G(t)$ *coeficiente del problema de Riemann*, y la función $g(t)$, *término independiente.*

14.2. Búsqueda de la función analítica a trozos por el salto dado. Examinemos previamente un problema de Riemann particular. Sea dada en el contorno cerrado L la función $\varphi(t)$, que satisface la condición de Hölder. Hállese la función analítica a trozos. $\Phi(z)$ ($\Phi(z) = \Phi^+(z)$, cuando $z \in D^+$, $\Phi(z) = \Phi^-(z)$, cuando $z \in D^-$), que desaparece en el infinito y experimenta un salto $\varphi(t)$ al pasar a través del contorno L, es decir, una función que satisfaga la condición

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t). \tag{14.3}$$

Es evidente que la función

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\, d\tau \tag{4.4}$$

ofrece, en virtud de la fórmula (4.9), la solución de este problema. Es fácil de mostrar la unicidad de la solución obtenida. En efecto, admitiendo la existencia de dos soluciones y considerando la diferencia entre ellas, llegamos a que para dicha diferencia el salto en

[1]) Empleando la terminología del § 1, se puede hablar de una función analítica a trozos.

la línea L es nulo; por consiguiente, será una función analítica en todo el plano de la cual podemos decir que se reduce a cero en el infinito. De aquí se deduce, según el teorema de Liouville, que esta diferencia es idénticamente igual a cero.

La solución del problema considerado puede enunciarse, además, en la forma siguiente:

La función arbitraria $\varphi(t)$, *definida en un contorno cerrado, que satisface la condición de Hölder, se puede representar de manera única como la diferencia entre las funciones* $\Phi^+(t)$ y $\Phi^-(t)$, *las cuales, con la condición adicional de que* $\Phi^-(\infty) = 0$, *son valores de contorno de las funciones analíticas* $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$.

Si prescindimos de la condición adicional $\Phi^-(\infty) = 0$, se ve con facilidad que la solución del problema se dará mediante la fórmula

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\, d\tau + \text{const.} \qquad (4.4')$$

14.3. Función canónica. Comencemos con la búsqueda de cierta función auxiliar por medio de la cual, como veremos más adelante, se expresa la solución de los problemas de contorno, tanto homogéneo como no homogéneo. Buscaremos la solución particular del problema homogéneo (14.1) en la clase de funciones que en el contorno no se reducen a cero. Sean N_+, N_- los números de ceros de las funciones buscadas en los dominios D^+, D^-, respectivamente. Al tomar el índice en ambos miembros de la igualdad (14.1), obtendremos, en virtud de la propiedades 2 y 3 del punto 13,1:

$$N_+ + N_- = \operatorname{Ind} G(t) = \varkappa. \qquad (14.4)$$

El índice $\varkappa$ del coeficiente del problema de Riemann lo llamaremos índice del problema.

Sea $\varkappa = 0$. Bajo esta condición $\ln G(t)$ será una función uniforme. De (14.4) se infiere $N_+ = N_- = 0$, es decir, la solución está privada de ceros en todo el plano. Por esta razón, las funciones $\ln \Phi^{\pm}(z)$ serán analíticas en sus dominios y, por lo tanto, uniformes junto con sus valores de contorno $\ln \Phi^{\pm}(t)$.

Hallando por logaritmos la condición de contorno (14.1), tenemos

$$\ln \Phi^+(t) - \ln \Phi^-(t) = \ln G(t). \qquad (14.3')$$

Para $\ln G(t)$ puede elegirse cualquier rama. El resultado final no depende de qué rama se elige, lo que puede ser fácilmente comprobado.

Hemos llegado al problema de buscar la función analítica a trozos $\ln \Phi(z)$ mediante un salto dado en L. Su solución si se cumple la condición adicional $\ln \Phi^-(\infty) = 0$, se da por medio de la fórmula

$$\ln \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z}\, d\tau. \qquad (14.5)$$

Para abreviar, designaremos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z}\, d\tau = \Gamma(z). \tag{14.6}$$

Según se deduce inmediatamente de las fórmulas de Sojotski, las soluciones del problema de contorno (14.1), que satisfacen la condición $\Phi^-(\infty) = 1$, serán las funciones

$$\Phi^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}, \quad \Phi^-(z) = e^{\Gamma^-(z)}. \tag{14.7}$$

Al prescindir de la condición adicional $\Phi^-(\infty,) = 1$, en la fórmula (14.5) se debe añadir un sumando constante arbitrario y la solución del problema se expresará así:

$$\Phi^+(z) = Ae^{\Gamma^+(z)}, \quad \Phi^-(z) = Ae^{\Gamma^-(z)}, \tag{14.8}$$

donde A es una constante arbitraria. Puesto que $\Gamma^-(\infty) = 0$, A será el valor de $\Phi^-(z)$ en el infinito.

De este modo, para $\varkappa = 0$ y $\Phi^-(\infty)$ arbitrario distinto de cero, la solución contiene una constante arbitraria; por consiguiente, se tiene una solución linealmente independiente. Si $\Phi^-(\infty) = 0$, entonces, $A = 0$, y el problema sólo tiene una solución trivial, es decir, un cero idéntico, lo que parece natural, dado que $N_- = 0$.

De aquí se puede deducir un corolario importante:

La función arbitraria $G(t) \neq 0$, dada en el contorno L, que satisface la condición de Hölder y tiene índice cero, puede ser representada como la razón de las funciones $\Phi^+(t)$ y $\Phi^-(t)$, las cuales son valores de contornos de las funciones que son analíticas en D^+, D^- y están privadas de ceros en estos dominios[1]. *Dichas funciones se definen salvo un factor constante arbitrario y se dan mediante las fórmulas* (14.8).

Pasando, ahora, al caso general, buscaremos una función analítica a trozos que satisface la condición de contorno homogénea (14.1) y tiene el orden nulo en todo el plano, salvo en un punto excepcional, donde su orden equivale al índice del problema. Por este punto puede tomarse cualquier punto del plano. En lo sucesivo siempre, si no se especifica lo contrario, a título del punto excepcional tomaremos un punto infinitamente alejado.

DEFINICIÓN. Llamaremos *función canónica* $X(z)$ la función que satisface la condición de contorno (14.1) y es analítica a trozos en todos los puntos del plano, a excepción de un punto infinitamente alejado, donde su orden es igual al índice del problema.

Esta función puede construirse por reducción al caso de índice nulo. Escribamos la condición de contorno en la forma

$$\Phi^+(t) = t^{\varkappa} t^{-\varkappa} G(t)\, \Phi^-(t).$$

[1]) Lo mismo es justo también para una clase más amplia de funciones, lo que se seguirá de los resultados del p. 16.3.

Representando la función $t^{-\varkappa} G(t)$ de índice nulo como razón de los valores de contorno de las funciones analíticas

$$t^{-\varkappa}G(t)=\frac{e^{\Gamma^+(t)}}{e^{\Gamma^-(t)}}, \quad \Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\ln[\tau^{-\varkappa}G(\tau)]}{\tau-z}\,d\tau, \qquad (14.9)$$

obtenemos con facilidad la expresión para la función canónica

$$X^+(z)=e^{\Gamma^+(z)}, \quad X^-(z)=z^{-\varkappa}e^{\Gamma^-(z)}. \qquad (14.10)$$

De la igualdad $X^+(t) = G(t)\, X^-(t)$ se deduce que el coeficiente del problema de Riemann puede ser representado como una razón de las funciones canónicas:

$$G(t)=\frac{X^+(t)}{X^-(t)}. \qquad (14.11)$$

A veces, en lugar de $X^-(z)$ se toma $\frac{1}{X^-(z)}$ (el orden, en este caso, cambia su signo por opuesto) y se obtiene una representación del coeficiente en la forma del producto $G(t) = X^+(t)\, X^-(t)$. La representación de esta índole se denomina *factorización*. No obstante, en este caso las fórmulas definitivas de la solución dejan de ser simétricas. Más adelante en todos los casos utilizaremos la representación (14.11).

Cuando $\varkappa \geqslant 0$, la función canónica, admitiendo en el infinito el cero de orden $\varkappa$, representa una de las soluciones particulares del problema de contorno (14.1). Para $\varkappa < 0$, la función canónica tiene en el infinito el polo de orden $|\varkappa|$ y no es ya la solución, pero también en este caso se usa a título de función auxiliar para resolver el problema no homogéneo.

14.4. Resolución del problema homogéneo. Se $\varkappa = \operatorname{Ind} G(t)$ un número entero cualquiera. Representando $G(t)$ por medio de la fórmula (14.11), reduzcamos la condición de contorno (14.1) a la forma

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)}=\frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}.$$

En el primer miembro de la última igualdad se encuentra el valor de contorno de la función analítica en D^+; en el segundo miembro, el valor de contorno de la función que tiene en el infinito el orden no inferior a $-\varkappa$ ($X(z)$ tiene, por definición, el orden $\varkappa$). Conforme al principio de continuidad (p. 12.1), cada una de las funciones en los miembros primero y segundo es prolongación analítica una de la otra a todo el plano, a excepción, quizás, de un punto infinitamente alejado, donde para $\varkappa > 0$ es posible la existencia del polo cuya orden no es mayor que $\varkappa$. Resulta, pues, que cuando $\varkappa > 0$, esta función analítica única es, de acuerdo con el teorema generalizado de Liou-

ville, un polinomio de grado $\varkappa$ de coeficientes arbitrarios. Si $\varkappa < 0$, entonces, según el teorema de Liouville habitual, la función es una constante. Pero, puesto que ella debe reducirse a cero en el infinito, resulta que es un cero idéntico. Por consiguiente, tenemos: cuando $\varkappa < 0$, el problema homogéneo sólo tiene una solución trivial, esto es, cero idéntico. Aquí y en adelante llamaremos *insolubles* aquellos problemas que no tienen otras soluciones salvo nula trivial. De este modo, el problema homogéneo (14.1) es insoluble, si el índice es negativo.

Para $\varkappa > 0$, designando el polinomio de grado $\varkappa$ de coeficientes arbitrarios mediante $P_\varkappa(z)$, obtendremos la solución en la forma

$$\Phi(z) = P_\varkappa(z)\, X(z),$$

o bien

$$\Phi^+(z) = P_\varkappa(z)\, e^{\Gamma^+(z)}, \quad \Phi^-(z) = z^{-\varkappa} P_\varkappa(z)\, e^{\Gamma^-(z)}, \tag{14.12}$$

donde $\Gamma(z)$ se determina mediante la fórmula (14.9). El caso en que $\varkappa = 0$, examinado en el p. 14.3, figura aquí como particular: $P_\varkappa(z)$ se degenera en una constante.

El resultado de nuestras consideraciones se reduce al siguiente TEOREMA. *Si el índice $\varkappa$ del problema de contorno de Riemann no es negativo, el problema homogéneo* (14.1) *tiene $\varkappa + 1$ soluciones linealmente independientes*

$$\Phi_k^+(z) = z^k e^{\Gamma^+(z)}, \quad \Phi_k^-(z) = z^{k-\varkappa} e^{\Gamma^-(z)} \quad (k = 0, 1, \ldots, \varkappa). \tag{14.13}$$

La solución general contiene $\varkappa + 1$ constantes arbitrarias y se determina mediante la fórmula (14.12). *Cuando el índice es negativo, el problema* (14.1) *queda insoluble.*

El polinomio $P_\varkappa(z)$ tiene en el plano complejo exactamente $\varkappa$ ceros. De las fórmulas (14.12) se deduce que el número de todos los ceros de la solución del problema de contorno de Riemann homogéneo es exactamente igual al índice $\varkappa$. Según sea la manera de elegir los coeficientes del polinomio, estos ceros pueden caer en cualquiera de los dominios $D^\pm$, y también en el contorno. Si designamos, como antes, con $N_\pm$ el número de ceros de la solución en los dominios $D^\pm$, y con N_0, el número de ceros en el contorno L, llegamos a que en el caso general (sin limitar la ausencia de ceros en el contorno) la fórmula (14.4) adquiere la forma siguiente

$$N_+ + N_- + N_0 = \varkappa. \tag{14.4'}$$

14.5. Resolución del problema no homogéneo. Sustituyendo los coeficientes $G(t)$ de la condición de contorno

$$\Phi^+(t) = G(t)\, \Phi^-(t) + g(t) \tag{14.2}$$

por la razón de valores de contorno de la función canónica del problema homogéneo $G(t) = \frac{X^+(t)}{X^-(t)}$, reducimos (14.2) a la forma

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} + \frac{g(t)}{X^+(t)}.$$

De acuerdo con el p. 5.1, la función $\frac{g(t)}{X^+(t)}$ satisface la condición de Hölder. Sustituyámosla, conforme al p. 14.2, por la diferencia entre los valores de contorno de las funciones analíticas:

$$\frac{g(t)}{X^+(t)} = \Psi^+(t) - \Psi^-(t),$$

donde

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z}. \tag{14.14}$$

Entonces, la condición de contorno puede escribirse en la forma

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \Psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \Psi^-(t).$$

Cabe señalar que para $\varkappa \geqslant 0$ la función $\frac{\Phi^-(z)}{X^-(z)}$ tendrá en el infinito el polo, y para $\varkappa < 0$, el cero de orden de $\varkappa$.

Razonando sumamente igual que en el p. 14.4 al resolver el problema homogéneo, obtendremos los siguientes resultados:

1°. $\varkappa \geqslant 0$. En este caso

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \Psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \Psi^-(t) = P_\varkappa(t).$$

De aquí tenemos la solución

$$\Phi(z) = X(z)\,[\Psi(z) + P_\varkappa(z)], \tag{14.15}$$

con la particularidad de que $X(z)$, $\Psi(z)$ se expresan mediante las fórmulas (14.10), (14.14), y $P_\varkappa$ es un polinomio de grado $\varkappa$ con coeficientes arbitrarios.

Es fácil ver que la fórmula (14.15) ofrece una solución general del problema no homogéneo, puesto que contiene, a título de un sumando, la solución general del problema homogéneo $X(z)\,P_\varkappa(z)$.

2° $\varkappa < 0$. En este caso $\frac{\Phi^-(z)}{X^-(z)}$ es nula en el infinito y

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \Psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \Psi^-(t) = 0,$$

de donde

$$\Phi(z) = X(z)\,\Psi(z). \tag{14.16}$$

En la expresión de la función $\Phi^-(z)$ el primer factor tiene en el infinito, debido a la fórmula (14.10), el polo de orden $-\varkappa$, y el segundo factor, representando la integral de tipo de Cauchy (14.14), tiene en el infinito, en el caso general, el cero de primer orden. Por consiguiente, $\Phi^-(z)$ tiene en el infinito el polo de orden no mayor que $-\varkappa - 1$. Así pues, si $\varkappa < -1$, el problema no homogéneo es, en el caso general, insoluble. Será soluble sólo cuando el término independiente satisfaga ciertas condiciones adicionales. Para obtenerlas, desarrollemos en serie la integral de tipo de Cauchy (14.14) en el entorno del punto infinitamente alejado (véase § 1)

$$\Psi^-(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{-k},$$

donde

$$c_k = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \tau^{k-1}\, d\tau.$$

Para que $\Phi^-(z)$ sea analítica en el punto infinitamente alejado, es necesario que los primeros $-\varkappa - 1$ coeficientes del desarrollo de $\Psi^-(z)$ se reduzcan a cero. De aquí resulta que para la resolubilidad del problema no homogéneo en el caso de índice negativo ($\varkappa < -1$) es necesario y suficiente que se satisfagan las siguientes $-\varkappa - 1$ condiciones:

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \tau^{k-1}\, d\tau = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, -\varkappa - 1). \tag{14.17}$$

Como resultado podemos enunciar la siguiente deducción:

TEOREMA. *Cuando* $\varkappa \geqslant 0$, *el problema de Riemann no homogéneo es soluble con cualquier término independiente, y su solución general se expresa mediante la fórmula*

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + X(z)\, P_\varkappa(z), \tag{14.18}$$

donde la función canónica $X(z)$ *se determina de* (14.10), *y* $P_\varkappa(z)$ *es un polinomio de grado* $\varkappa$ *de coeficientes complejos arbitrarios. Si* $\varkappa = -1$, *el problema no homogéneo es también soluble y tiene una solución única.*

En el caso de que $\varkappa < -1$, *el problema no homogéneo no es generalmente soluble. Para que sea soluble, es necesario y suficiente que el término independiente del problema satisfaga* $-\varkappa - 1$ *condiciones* (14.17). *Si estas últimas se cumplen, la única solución del problema se expresa mediante la fórmula* (14.18), *donde se debe poner* $P_\varkappa(z) \equiv 0$.

En lo sucesivo (cap. III) tendrá unas aplicaciones importantes la solución con un requisito adicional de que ésta se reduzca a cero en

el punto infinitamente alejado. En este caso en lugar del polinomio de grado $\varkappa$ se debe tomar un polinomio de grado $\varkappa - 1$. Para que el problema sea resoluble en el caso del índice negativo, tendremos que exigir que se reduzca a cero también el coeficiente $c_{-\varkappa}$.

Por consiguiente, si se cumple la condición $\Phi^-(\infty) = 0$, la solución se determinará, para $\varkappa \geqslant 0$, mediante la fórmula

$$\Phi(z) = X(z)\,[\Psi(z) + P_{\varkappa-1}(z)] \qquad (14.18')$$

(para $\varkappa = 0$, hay que hacer $P_{\varkappa-1}(z) \equiv 0$).

Si $\varkappa < 0$, la solución se expresará, como antes, por la fórmula (14.18'), donde $P_{\varkappa-1}(z) \equiv 0$, siempre que se cumplan $-\varkappa$ condiciones de resolubilidad:

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\,\tau^{k-1}\,d\tau = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, -\varkappa). \qquad (14.19)$$

De este modo, el teorema de resolubilidad de un problema no homogéneo adquiere una forma más simétrica.

Cuando $\varkappa \geqslant 0$, la solución general del problema no homogéneo depende linealmente de $\varkappa$ constantes arbitratias.

Cuando $\varkappa < 0$, el número de las condiciones de resolubilidad es igual a $-\varkappa$.

Observemos que aquí el problema no homogéneo, para $\varkappa = 0$, es incondicionalmente resoluble y la solución es única.

14.6. Ejemplos. En virtud de lo expuesto más arriba, la resolución del problema de contorno de Riemann se reduce, en lo fundamental, a dos operaciones:

1. Representación de una función arbitraria, definida en el contorno, en forma de una diferencia entre los valores de contorno de las funciones analíticas en los dominios D^+ y D^-. (El problema sobre el salto.)

2. Representación de una función, que no desaparece, en forma de la razón de los valores de contorno de las funciones analíticas. (La factorización.)

Observemos que la segunda operación puede ser reducida a la primera, hallando logaritmos. Ciertas compilicaciones, siendo el índice no nulo, las trae consigo sólo el hecho de que el logaritmo no es uniforme. Para una función arbitraria la primera operación es equivalente al cálculo de la integral de tipo de Cauchy. Con tal motivo la solución del problema, obtenida mediante las fórmulas (14.10), (14.14)—(14.16), se expresa explícitamente (o, como suele decirse, en la forma cerrada) en términos de las integrales de tipo de Cauchy.

Para el cálculo de las integrales de esta índole un algoritmo simple no existe en el caso general. Se debe emplear algunos de los procedimientos de cálculo aproximado de las integrales lo que lleva a unos cálculos voluminosos. Nos limitaremos aquí a un caso en que

el coeficiente y el término independiente del problema pueden ser analíticamente prolongados desde el contorno al plano de la variable compleja. En este caso las operaciones 1 y 2 se efectúan de una manera elemental. Al variar el contorno de integración L, la solución irá alterándose sólo con el cambio de la posición de ceros y de puntos singulares del cofieciente $G(z)$ respecto del contorno.

Observemos que la significación del procedimiento expuesto para resolver el problema de coeficientes racionales sale fuera de los márgenes del ejemplo ilustrativo, puesto que la función continua arbitraria (que, además, satisface la condición de Hölder) puede ser aproximada con cualquier grado de precisión por medio de unas funciones racionales, y la solución del problema con coeficientes racionales puede servir de base para su resolución aproximada en el caso general (véase más abajo el p. 16.3, 6°).

Para ilustrar resolvamos un problema de contorno de Riemann en el cual el contorno está compuesto por un número finito de curvas sencillas y el coeficiente $G(t)$ es una función racional, privada de ceros y polos en el contorno:

$$\Phi^+(t) = \frac{p(t)}{q(t)} \Phi^-(t) + g(t). \tag{14.20}$$

Descompongamos los polinomios $p(z)$, $q(z)$ en un producto

$$p(z) = p_+(z)\, p_-(z), \quad q(z) = q_+(z)\, q_-(z), \tag{14.21}$$

donde $p_+(z)$, $q_+(z)$ son polinomios cuyas raíces yacen en D^+, y $p_-(z)$, $q_-(z)$ son polinomios con las raíces en D^-. De la propiedad 4 del índice (p. 13.1) fácilmente resulta que $\varkappa = m_+ - n_+$, donde m_+, n_+ representan los números de ceros de los polinomios $p_+(z)$, $q_+(z)$.

En vista de que el coeficiente del problema es una función, que puede ser analíticamente prolongada a los dominios $D^\pm$, aquí resulta más conveniente no emplear fórmulas generales de la solución, sino que obtener la última de manera directa, recurriendo a una prolongación analítca[1]). Representando la condición de contorno en la forma

$$\frac{q_-(t)}{p_-(t)} \Phi^+(t) - \frac{p_+(t)}{q_+(t)} \Phi^-(t) = \frac{q_-(t)}{p_-(t)} g(t)$$

$\left(\text{las funciones canónicas aquí son } X^+ = \frac{p_-}{q_-},\ X^- = \frac{q_+}{p_+}\right)$, con la ayuda de los mismos razonamientos que se han aplicado en el p. 14.5, obten-

[1]) En este caso hay que tener en cuenta que el papel de una función estándar $t^\varkappa$ (que se usa para reducir el índice a uno nulo) es capaz de desempeñarlo el producto $\prod_{j=1}^{\varkappa} (t - a_j)$, donde $a_1, \ldots, a_\varkappa$ son puntos cualesquiera del dominio D^+.

dremos la solución

$$\left.\begin{aligned} \Phi^+(z) &= \frac{p_-(z)}{q_-(z)}[\Psi(z)+P_{\varkappa-1}(z)], \\ \Phi^-(z) &= \frac{q_+}{p_+}[\Psi(z)+P_{\varkappa-1}(z)], \\ \Phi(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{q_-(\tau)}{p_-(\tau)}\, g(\tau)\,\frac{d\tau}{\tau-z} \\ &(\Phi^-(\infty)=0), \end{aligned}\right\} \qquad (14.22)$$

Si el índice resulta ser negativo, se debe poner $P_{\varkappa-1} \equiv 0$, y añadir las condiciones de resolubilidad:

$$\int_L \frac{q_-(\tau)}{p_-(\tau)}\, g(\tau)\,\tau^{k-1}\,d\tau = 0 \quad (k=1, 2, \ldots, -\varkappa). \qquad (14.23)$$

La expresión obtenida concuerda con las fórmulas generales (14.14), (14.15), si se toma en consideración que la función canónica en este caso tendrá la forma $X^+ = \frac{p_-}{q_-}$, $X^- = \frac{q_+}{p_+}$: Lo último puede obtenerse partiendo de la definición de función canónica (p. 14.3).

Ha de notarse que también en el caso general, cuando se resuelve prácticamente el problema de Riemann, resulta ventajoso representar el coeficiente mediante la expresión $G = \frac{p_+p_-}{q_+q_-}G_1$, donde G_1 es una función de índice nulo, y los polinomios $p_\pm$, $q_\pm$ se escogen partiendo de la forma del coeficiente. Con la elección adecuada de estos polinomios la solución puede obtenerse de una manera más sencilla.

A título de ejemplo resolvamos un problema de Riemann

$$\Phi^+(t) = \frac{t}{t^2-1}\Phi^-(t) + \frac{t^3-t^2+1}{t^3-t}$$

a la condición de que $\Phi^-(\infty) = 0$, y L es un contorno suave cerrado arbitrario de la siguiente forma:

a) el contorno L contiene en su interior un punto $z_1 = 0$ y no contiene los puntos $z_2 = 1$, $z_3 = -1$;

b) el contorno L contiene en su interior los puntos $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, y no contiene $z_3 = -1$;

c) el contorno L contiene en su interior los puntos $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = -1$;

d) el contorno L contiene en su interior los puntos $z_2 = 1$, $z_3 = -1$, y no contiene el punto $z_1 = 0$.

Para resolver el problema, hagamos uso del procedimiento mencionado más arriba.

a) En el caso dado (fig. 12)

$$p_+(t) = t, \quad p_-(t) = 1, \quad m_+ = 1$$
$$q_+(t) = 1, \quad q_-(t) = t^2 - 1, \quad n_+ = 0, \quad \varkappa = m_+ - n_+ = 1.$$

Escribamos la condición de contorno en la forma

$$(t^2-1)\,\Phi^+(t)-t\Phi^-(t)=\frac{1}{t}\,(t^3-t^2+1)\,(t+1).$$

De aquí

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{q_-(\tau)}{p_-(\tau)}\,g(\tau)\,\frac{d\tau}{\tau-z}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\tau^3-\tau+1}{\tau-z}\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\frac{1}{\tau}}{\tau-z}\,d\tau,$$

y, por lo tanto, en virtud de las fórmulas (1.1) y (1.2), tenemos

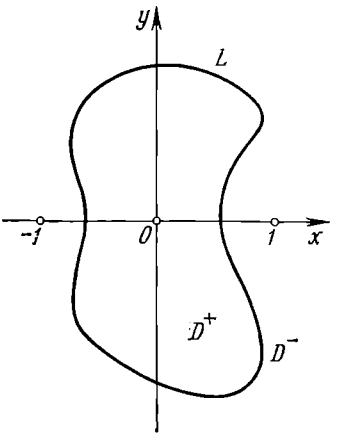


Fig. 12

$$\Psi^+(z)=z^3-z+1, \qquad \Psi(z)=-\frac{1}{z}.$$

La solución general del problema contiene una constante arbitraria. Según la fórmula (14.22) encontramos

$$\Phi^+(z)=\frac{1}{z^2-1}\,[(z^3-z+$$

$$+1)+c]=\frac{z^3-z+1}{z^2-1}+\frac{c}{z^2-1},$$

$$\Phi^-(z)=\frac{1}{z}\left[-\frac{1}{z}+c\right]=-\frac{1}{z^2}+\frac{c}{z},$$

donde c es una constante arbitraria. Sustituyendo c por $c-1$, podemos atribuir a la solución la forma siguiente:

$$\Phi^+(z)=z+\frac{c}{z^2-1},$$

$$\Phi^-(z)=-\frac{z+1}{z^2}+\frac{c}{z}.$$

b) Aquí

$$p_+(t)=t,\ p_-(t)=1; \quad q_+(t)=t-1, \quad q_-(t)=t+1; \quad m_+=n_+=$$
$$=1,\ \varkappa=0;$$

$$(t+1)\,\Phi^+(t)-\frac{t}{t-1}\,\Phi^-(t)=\frac{(t+1)\,(t^3-t^2+1)}{t\,(t-1)};$$

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\tau^2-\tau}{\tau-z}\,d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\frac{\tau+1}{\tau\,(\tau-1)}}{\tau-z}\,d\tau=$$

$$=\begin{cases} z^2+z & \text{para } z\in D^+;\\ -\dfrac{z+1}{z\,(z-1)} & \text{para } z\in D^-. \end{cases}$$

El problema tiene la única solución:

$$\Phi^+(z)=\frac{p_-(z)}{q_-(z)}\,\Psi^+(z)=\frac{1}{z+1}\,(z^2+z)=z,$$

$$\Phi^-(z)=\frac{q_+(z)}{p_+(z)}\,\Psi^-(z)=\frac{z-1}{z}\left(-\frac{z+1}{z(z-1)}\right)=-\frac{z+1}{z^2}.$$

c) En este caso

$$p_+(t)=t,\quad p_-(t)=1;\quad q_+(t)=t^2-1,\quad q_-(t)=1;\quad m_+=1,\quad n_+=2,\quad \varkappa=-1;$$

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\tau}{\tau-z}\,d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\frac{1}{\tau(\tau-1)}}{\tau-z}\,d\tau=$$

$$=\begin{cases} z & \text{para } z\in D^+,\\ -\dfrac{1}{z(z-1)} & \text{para } z\in D^-.\end{cases}$$

La solución del problema existe sólo cuando se cumplan las condiciones de resolubilidad (14.23) o, en el caso dado, cuando se cumpla la condición:

$$\int_L\frac{q_-(\tau)}{p_-(\tau)}\,g(\tau)\,d\tau=0.$$

Calculando esta integral, encontramos

$$\int_L\frac{\tau^3-\tau^2+1}{\tau^2-\tau}\,d\tau=\int_L\tau\,d\tau+\int_L\frac{d\tau}{\tau-1}-\int_L\frac{d\tau}{\tau}=0+2\pi i-2\pi i=0.$$

De este modo, la condición de resolubilidad se verifica y la única solución del problema será

$$\Phi^+(z)=z,\qquad \Phi^-(z)=-\frac{z+1}{z^2}.$$

d) En este caso

$$p_+(t)=1,\quad p_-(t)=t;\quad q_+(t)=t^2-1,\quad q_-(t)=1;$$
$$\varkappa=m_+-n_+=-2<0.$$

Para que el problema sea resoluble, es necesario que se cumplan dos condiciones:

$$\int_L\frac{q_-(\tau)}{p_-(\tau)}\,q(\tau)\,\tau^{k-1}\,d\tau=0\qquad (k=1,\ 2).$$

Calculando esta integral para $k=1$, encontramos

$$\int_L\frac{\tau^3-\tau^2+1}{\tau(\tau^2-\tau)}\,d\tau=\int_L\left(1-\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\tau^2}+\frac{1}{\tau-1}\right)d\tau=2\pi i\neq 0.$$

De este modo, la condición de resolubilidad no está cumplida y, por tanto, el problema no tiene solución.

Ha de notarse que, siendo resuelta formalmente, la función $\Phi(z)$ tendrá el polo en el punto infinitamente alejado, y, por consiguiente, no puede ser solución del problema.

Cuando el contorno L es finito y, por tanto, el dominio D^+ está acotado, el procedimiento señalado de la resolución es aplicable también en el caso en que $p(t)$, $q(t)$ no son polinomios sino funciones enteras. Sean $p_+(t)$, $q_+(t)$ unos polinomios cuyas raíces en D^+ son ceros de las funciones $p(t)$ y $q(t)$, respectivamente, de las mismas multiplicidades. Entonces, representando p y q en la forma

$$p(t) = p_+(t)\, P_+(t), \quad q(t) = q_+(t) Q_+(t),$$

obtenemos la condición de contorno

$$\frac{Q_+\Phi^+}{P_+} = \frac{p_+}{q_+}\Phi^- + \frac{Q_+}{P_+} g.$$

Luego se puede proceder igual que antes.

14.7. Problema de Riemann para un semiplano. Sea el contorno L el eje real. El problema de Riemann consiste, como antes, en hallar dos funciones acotadas $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$, las cuales sean analíticas, respectivamente, en los semiplanos superior e inferior (la función analítica a trozos $\Phi(z)$) y cuyos valores límites en el contorno satisfagan la condición de contorno

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t) \quad (-\infty < t < \infty). \qquad (14.24)$$

Las funciones dadas $G(t)$ y $g(t)$ satisfacen la condición de Hölder tanto en los puntos finitos como en el entorno de un punto infinitamente alejado del contorno (véanse las condiciones (4.20), (4.27).) Consideramos también que $G(t) \neq 0$.

La resolución se efectuará según el mismo plan que nos servía en el caso de un contorno finito. La principal discrepancia del caso de una curva finita, considerado anteriormente, consiste en lo que ahora el punto infinitamente alejado y el origen de coordenadas se ubican en el propio contorno y por esta razón no pueden ser tomados por un punto excepcional, donde para la función canónica es admisible un orden no nulo. En lugar de la función auxiliar t, que se ha usado anteriormente y tenía en L el índice equivalente a la unidad, introduzcamos aquí una función lineal fraccional

$$\frac{t-i}{t+i},$$

que posee en el eje real la misma propiedad. El argumento de esta función

$$\arg \frac{t-i}{t+i} = \arg \frac{(t-i)^2}{t^2+1} = 2 \arg (t-i)$$

cambia en 2π, cuando t recorre el eje real en el sentido positivo. De este modo,

$$\operatorname{Ind} \frac{t-i}{t+i} = 1.$$

Si Ind $G(t) = \varkappa$, el índice de la función

$$G(t)\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{-\varkappa}$$

será igual a cero. Su logaritmo en el eje real será una función uniforme.

Construyamos la función canónica para la cual $-i$ será un punto excepcional:

$$X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}, \quad X^-(z) = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{-\varkappa} e^{\Gamma^-(z)}, \tag{14.25}$$

donde

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left[\left(\frac{\tau-i}{\tau+i}\right)^{-\varkappa} G(\tau)\right]\frac{d\tau}{\tau-z}.$$

Utilizando los valores límites de esta función, transformemos la condición de contorno (14.24) hasta que tenga la forma

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} + \frac{g(t)}{X^+(t)}.$$

Luego, al introducir la función analítica

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z}, \tag{14.26}$$

representemos la condición de contorno así:

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \Psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \Psi^-(t).$$

Observemos que a diferencia del caso de un contorno finito, aquí, en general, $\Psi^-(\infty) \neq 0$. Aplicando el teorema sobre la prolongación analítica y tomando en consideración que la única singularidad de la función examinada sólo puede ser el polo en el punto $z = -i$ de orden no superior que $\varkappa$ (para $\varkappa > 0$), en virtud del teorema generalizado de Liouville, tendremos

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \Psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \Psi^-(t) = \frac{P_\varkappa(t)}{(t+i)^\varkappa} \qquad (\varkappa \geqslant 0),$$

donde $P_\varkappa(t)$ es un polinomio de grado no mayor que $\varkappa$ con coeficientes arbitrarios. De aquí obtenemos la solución general del problema

$$\Phi(z) = X(z)\left[\Psi(z) + \frac{P_\varkappa(z)}{(z+i)^\varkappa}\right] \quad \text{para } \varkappa \geqslant 0, \tag{14.27}$$

$$\Phi(z) = X(z)\ [\Psi(z) + C] \quad \text{para} \quad \varkappa < 0. \tag{14.28}$$

Cuando $\varkappa < 0$, la función $X(z)$ tiene en el punto $z = -i$ el polo de orden $-\varkappa$; por esta razón, para que el problema sea soluble, hay que poner $C = -\Psi^-(-i)$. Para $\varkappa < -1$, se deben cumplir, además, las siguientes condiciones:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{(\tau+i)^k} = 0 \quad (k = 2, \ldots, -\varkappa). \tag{14.29}$$

De este modo, se han obtenido los resultados análogos a los que tuvimos en el caso de un contorno finito.

TEOREMA. *Cuando* $\varkappa \geqslant 0$, *los problemas de contorno de Riemann, homogéneo y no homogéneo, para un semiplano son incondicionalmente solubles y su solución depende linealmente de* $\varkappa + 1$ *constantes arbitrarias. Cuando* $\varkappa < 0$, *el problema homogéneo no es soluble. En cambio, el problema no homogéneo, para* $\varkappa < 0$, *es resoluble unívocamente, con la particularidad de que, en el caso de* $\varkappa = -1$, *se resuelve incondicionalmente, y, para* $\varkappa < -1$, *sólo cuando se cumplen* $-\varkappa-1$ *condiciones* (14.29).

Hasta ahora buscábamos las soluciones del problema de Riemann que eran simplemente acotadas en el infinito. Ahora fijemos una atención especial en el caso de soluciones que desaparecen en el infinito.

Sustituyendo en la condición de contorno $\Phi^+(\infty) = \Phi^-(\infty) = 0$, obtenemos $g(\infty) = 0$. Por consiguiente, para que el problema de Riemann tenga solución que desaparezca en el infinito, el término independiente de la condición de contorno tiene que reducirse a cero en el infinito. Convengamos en considerar esta condición cumplida. Para obtener la solución en el caso considerado, es necesario en lugar de $P_\varkappa$ en (14.27) tomar $P_{\varkappa-1}$, y en (14.28) igualar a cero C. De este modo,

$$\Phi(z) = X(z)\left[\Psi(z) + \frac{P_{\varkappa-1}(z)}{(z+i)^\varkappa}\right]. \tag{14.30}$$

Cuando $\varkappa \leqslant 0$, en esta fórmula se debe poner $P_{\varkappa-1} \equiv 0$. A las condiciones de resolubilidad (14.29) se añadirá una más: $\Psi(-i) = 0$.

Así pues, estas condiciones tomarán la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{(\tau+i)^k} = 0 \quad (k = 1, \ldots, -\varkappa). \tag{14.31}$$

Ahora, con $\varkappa > 0$, tendremos una solución que depende de las constantes arbitrarias; con $\varkappa \leqslant 0$, la solución será única, con la particularidad de que, para su existencia, cuando $\varkappa < 0$, es necesario y suficiente que se cumplan $-\varkappa$ condiciones.

Para un contorno suave arbitrario L, que se cierre en el infinito, la resolución del problema de Riemann puede efectuarse igual que para una recta real. La diferencia sólo consiste en lo que en lugar de la función auxiliar $\frac{t-i}{t+i}$, que tiene en el eje real un índice igual a la unidad, aquí se introduce la función $\frac{t-z_0}{t-z_1}$ (donde $z_0 \in D^+$, $z_1 \in D^-$) que posee en L la misma propiedad. El punto excepcional es z_1.

14.8. Problema bidimensional sobre el salto[1]). A toda función $\varphi(t_1, t_2)$, que satisface la condición de Hölder en la armazón común $L = L_1 \times L_2$ de cuatro dominios bicilíndricos $D^{\pm\pm} = D_1^{\pm} \times D_2^{\pm}$, le pondremos en correspondencia la integral de tipo de Cauchy

$$\Phi(z_1, z_2) = (K\varphi)(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_L \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2}{(\tau_1 - z_1)(\tau_2 - z_2)}, \qquad (14.32)$$

que define cuatro funciones

$$\Phi^{\pm\pm}(z_1, z_2) = (K\varphi)(z_1, z_2) \quad \text{para} \quad (z_1, z_2) \in D^{\pm\pm},$$

analíticas en $D^{\pm\pm}$, con la particularidad de que $\Phi^{\pm\mp}(z_1, z_2)$ y $\Phi^{--}(z_1, z_2)$ desaparecen en todos los puntos infinitamente alejados de los dominios respectivos $D^{\pm\mp}$ y D^{--}.

En virtud de la segunda de las fórmulas de Sojotski (9.20), en L se verifica la igualdad

$$\Phi^{++}(t_1, t_2) - \Phi^{-+}(t_1, t_2) - \Phi^{+-}(t_1, t_2) + \Phi^{--}(t_1, t_2) = \varphi(t_1, t_2). \qquad (14.33)$$

El problema bidimensional del salto consiste en la búsqueda de cuatro funciones $\Phi^{\pm\pm}(z_1, z_2)$, que son analíticas en los dominios respectivos $D^{\pm\pm}$ y satisfacen la condición (14.33) con la función prefijada φ de la clase H.

Al abordar el problema bidimensional del salto, hagamos una observación de carácter general. Si la función de dos variables desempeña, en virtud de ciertas consideraciones, el papel de una constante con relación a una de las variables, será función arbitraria de la otra variable.

Sea, al principio, $\varphi(t_1, t_2) \equiv 0$; entonces, escribimos (14.33) en forma de la igualdad

$$\Phi^{++}(t_1, t_2) - \Phi^{+-}(t_1, t_2) = \Phi^{-+}(t_1, t_2) - \Phi^{--}(t_1, t_2)$$

y aplicando a ésta el teorema de Liouville según la variable t_1, nos convencemos de que todo miembro de la igualdad es una función

[1]) Para los puntos 14.8 y 14.9 se han usado las obras de V. A. Kakichev 3)* y 4).*

arbitraria de la clase H sólo de la variable t_2, la cual se designará

$$b(t_2) = b^+(t_2) - b^-(t_2).$$

De aquí se deduce que

$$\Phi^{\pm\pm}(t_1, t_2) - b^+(t_2) = \Phi^{\pm\mp}(t_1, t_2) - b^-(t_2) \equiv a^{\pm}(t_1),$$

donde $a^{\pm}(t_1)$ son también funciones arbitrarias de las clases correspondientes.

Así pues, la solución general del problema homogéneo bidimensional del salto nulo es de forma

$$\Phi^{\pm\pm}(z_1, z_2) = a^{\pm}(z_1) + b^{\pm}(z_2), \tag{14.34}$$

donde $a^{\pm}(z_1)$ y $b^{\pm}(z_2)$ son unas funciones arbitrarias, analíticas, respectivamente, en $D_1^{\pm}$ y $D_2^{\pm}$, cuyos valores límites pertenecen a la clase H.

Para obtener la unicidad de la solución del problema bidimensional del salto[1]), resulta conveniente prefijar las condiciones adicionales en la forma que sigue:

$$\begin{aligned} &\Phi^{+-}(z_1, \infty) = a^+(z_1), \quad z_1 \in D_1^+, \\ &\Phi^{-+}(\infty, z_2) = b^+(z_2), \quad z_2 \in D_2^+, \end{aligned} \tag{14.35}$$

donde $a^{\pm}(z_1)$ y $b^{\pm}(z_2)$ son funciones prefijadas de antemano que poseen las propiedades citadas anteriormente.

Ya sabemos que bajo la condición $\Phi^-(\infty) = 0$, la integral (4.4) determinaba la única solución del problema (14.3). Del mismo modo, la integral (14.32) determina la única solución del problema (14.33) bajo las condiciones adicionales:

$$\begin{aligned} &\Phi^{+-}(z_1, \infty) = 0 \quad \text{para } z_1 \in D_1^+ \\ &\Phi^{-+}(\infty, z_2) = 0 \quad \text{para } z_2 \in D_2^+. \end{aligned}$$

En el caso general la única solución del problema (14.33), siendo presentes las condiciones adicionales (14.35), será la suma de la integral (14.32) y la suma correspondiente de (14.34).

Indiquemos dos corolarios útiles que se deducen directamente de la solución del problema sobre el salto y de las fórmulas de Sojotski (9.19).

1. *Toda función* $\varphi \in H$ *puede ser representada de una manera única en forma de la suma* $\Phi^{++} - \Phi^{-+} - \Phi^{+-} + \Phi^{--}$ *de valores límites*

[1]) Demos a conocer una analogía útil y de gran alcance: si $u'(x) = 0$, entonces u es una constante arbitraria, y si $u''_{xy}(x, y) = 0$, se tiene: $u(x, y) = \alpha(x) + \beta(y)$, donde α y β son funciones arbitrarias de sus argumentos. Sin embargo, la ecuación $u''_{xy} = 0$, junto con las condiciones correspondientes de Cauchy, tiene la única solución.

$\Phi^{\pm\pm}(t_1, t_2)$ *de las funciones* $\Phi^{\pm\pm}(z_1, z_2)$, *analíticas en* $D^{\pm\pm}$ *y tales que* $\Phi^{\pm=}(z_1, \infty) = 0$ *para* $z_1 \in D_1^{\pm}$ *y* $\Phi^{=\pm}(\infty, z_2) = 0$, *para* $z_2 \in D_2^{\pm}$.

2. *Para que una función* $\varphi \in H$ *pueda ser representada en forma de una de las sumas*

$$1)\ \Phi^{++}_{--} - \Phi^{+-} - \Phi^{-+}, \quad 2)\ \Phi^{++} - \Phi^{+-}_{-+} + \Phi^{--},$$

$$3)\ \Phi^{++}_{--} - \Phi^{+-}_{-+}, \quad 4)\ \Phi^{++}_{--} - \Phi^{+-}_{-+}, \quad 5)\ \Phi^{++}_{-+} - \Phi^{--}_{+-},$$

en las cuales $\Phi^{\pm\pm}$ *poseen las mismas propiedades que tenían en* 1, *es necesario y suficiente que ella satisfaga, respectivamente, las condiciones*

$$1)\quad \varphi \mp S_1\varphi \mp S_2\varphi + S_{12}\varphi = 4\Phi^{--}_{++} = 0,$$

$$2)\quad -\varphi \pm S_1\varphi \mp S_2\varphi + S_{12}\varphi = 4\Phi^{-+}_{+-} = 0,$$

$$3)\quad \varphi \mp S_1\varphi = 2(\Phi^{--}_{++} - \Phi^{-+}_{+-}) = 0,$$

$$4)\quad \varphi \mp S_2\varphi = 2(\Phi^{--}_{++} - \Phi^{+-}_{-+}) = 0,$$

$$5)\quad \mp\varphi \pm S_{12}\varphi = 2(\Phi^{+-}_{++} + \Phi^{=\pm}) = 0.$$

14.9. Planteamiento del problema de Riemann para los dominios bicilíndricos. El problema de Riemann para las funciones analíticas en los dominios bicilíndricos puede enunciarse del modo siguiente.

Sean A, B, C, D y f unas funciones prefijadas que en la armazón común L de cuatro dominios bicilíndricos $D^{\pm\pm}$ satisfacen la condición de Hölder. Es necesario, rigiéndose por la condición de contorno

$$A(t_1, t_2)\,\Phi^{++}(t_1, t_2) - B(t_1, t_2)\,\Phi^{-+}(t_1, t_2) - C(t_1, t_2)\,\Phi^{+-}(t_1, t_2) + D(t_1, t_2)\,\Phi^{--}(t_1, t_2) = f(t_1, t_2), \tag{14.36}$$

dada en L, hallar cuatro funciones $\Phi^{\pm\pm}(z_1, z_2)$ que sean analíticas en $D^{\pm\pm}$ y satisfagan las condiciones adicionales

$$\begin{aligned} &\Phi^{+-}(z_1, \infty) = 0, \quad z_1 \in D_1^{+}, \\ &\Phi^{-+}(\infty, z_2) = 0, \quad z_2 \in D_2^{\pm}. \end{aligned} \tag{14.37}$$

La teoría de problemas bidimensionales (14.36)—(14.37) difiere[1]) considerablemente de la de problema unidimensional (14.2) y su solución en forma cerrada no se ha obtenido hasta ahora. Con el fin de aclarar algunas particularidades de este problema, consideremos un ejemplo.

[1]) En cierto sentido la diferencia entre los problemas de Riemann bidimensionales y unidimensionales es la misma que se observa entre las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes en derivadas parciales y las ecuaciones ordinarias.

EJEMPLO. Sean L_1 y L_2 unas circunferencias unitarias y supongamos que $f(t_1, t_2) \equiv 0$ y que

$$A = 1, \quad B = t_1^{l_1} t_2^{l_2}, \quad C = t_1^{m_1} t_2^{m_2}, \quad D = t_1^{n_1} t_2^{n_2}, \qquad (14.38)$$

donde l_1, l_2, m_1, m_2, n_1, n_2 son ciertos números enteros. Este *problema* que se llamará *elemental homogéneo bidimensional*, es análogo al problema elemental unidimensional $\Phi^+(t) = t^\varkappa \Phi^-(t)$, el cual, con $\varkappa > 0$ y la condición adicional $\Phi^-(\infty) = 0$, tiene exactamente $\varkappa$ soluciones linealmente independientes y no es soluble para $\varkappa \leqslant 0$. Ahora probaremos que a diferencia de este problema, el problema elemental homogéneo bidimensional puede tener una solución, dependiente del número finito de funciones de una variable.

Hagamos el problema más simple aún, buscando primero sólo sus soluciones en las cuales cualesquiera dos de cuatro funciones buscadas son idénticamente iguales a cero.

Sea, al principio, 1) $\Phi^{\pm=}(z_1, z_2) \equiv 0$; en este caso el problema en consideración toma la forma

$$\Phi^{++}(t_1, t_2) = t_1^{l_1} t_2^{l_2} \Phi^{-+}(t_1, t_2), \quad \Phi^{-+}(\infty, z_2) = 0, \quad z_2 \in D_2^+. \qquad (14.39)$$

Haciendo prolongar analíticamente la condición de contorno (14.39) según la variable z_2, en el dominio D_2^+ y comparándola con la condición del correspondiente problema unidimensional, nos convencemos de que el problema (14.39) es en realidad el de Riemann solamente respecto a la variable t_1, mientras que $z_2 \in D_2^+$ figura en su condición a título de parámetro.

Por consiguiente, el problema (14.39) es resoluble sólo cuando se cumple la condición $l_1 \geqslant 0$. Sea $l_1 > 0$. Entonces, de acuerdo con las fórmulas (14.12), la solución general del problema (14.39) adquiere la forma

$$\Phi^{++}(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{l_1 - 1} c_k^+(z_2)\, z_1^k, \qquad (14.40)$$

$$z_2^{l_2} \Phi^{-+}(z_1, z_2) = z_1^{-l_1} \sum_{k=0}^{l_1 - 1} c_k^+(z_2)\, z_1^k. \qquad (14.40')$$

Si $l_2 \leqslant 0$, en estas fórmulas $c_k^+(z)$ serán funciones arbitrarias, analíticas en D_2^+ y que satisfacen en L_2 la condición de Hölder; si $l_2 > 0$, de esta misma índole debe ser cada una de las funciones

$$z_2^{-l_2} c_k^+(z_2) \quad k = 0, 1, \ldots, l_1 - 1.$$

Abstrayéndonos por el momento del problema de partida (14.36)—(14.38), demos a conocer una de las enunciaciones posibles de las condiciones adicionales, bajo las cuales el problema (14.39) con $l_1 \geqslant 0$ tiene solución única. Para simplificar, supongamos que $l_2 = 0$ Sean $c_k^+(z_2)$, $k = 0, 1, \ldots, l_1 - 1$, unas funciones prefijadas

analíticas en D_2^+ y que satisfacen en L_2 la condición de Hölder; en este caso el problema de contorno (14.39) tiene una única solución que satisface las condiciones adicionales

$$[z_1^k \Phi^{-+}(z_1, z_2) - \sum_{j=0}^{k} c_{l_1-j+1}^{+}(z_2) z_1^{j-1}]\big|_{z_1=\infty} = c_{l_1-k}^{+}(z_2),$$
$$z_2 \in D_2^+, \quad k = 1, 2, \ldots, l_1.$$

Razonando igual que en la resolución del problema (14.39), nos convencemos de que el problema inicial tiene soluciones que dependen de un número finito de funciones de una sola variable y son tales que

$$2)\ \Phi_{+\,+}^{+\,+}(z_1, z_2) \equiv 0, \quad 3)\ \Phi_{+\,-}^{+\,+}(z_1, z_2) \equiv 0, \quad 4)\ \Phi_{-\,-}^{-\,+}(z_1, z_2) \equiv 0,$$

cuando, y, sólo cuando, respectivamente

$$2)\ n_1 > m_1, \quad 3)\ n_2 > l_2, \quad 4)\ m_2 > 0.$$

Continuando buscar las soluciones del problema en las cuales

$$5)\ \Phi^{\pm\mp}(z_1, z_2) \equiv 0,$$

obtendremos el problema

$$\Phi^{++}(t_1, t_2) + t_1^{n_1} t_2^{n_2} \Phi^{--}(t_1, t_2) = 0,$$
$$\Phi^{--}(\infty, z_2) = 0, \quad z_2 \in D_2^-, \quad \Phi^{--}(z_1, \infty) = 0, \quad z_1 \in D_1^-. \tag{14.41}$$

Aplicando el teorema de Liouville al problema (14.41), primero según la variable t_1 y después según la variable t_2, encontramos que éste es resoluble cuando, y sólo cuando, $n_1 > 0$ y $n_2 > 0$ simultáneamente. Si $n_1 > 0$ y $n_2 > 0$, la solución del problema (14.41) se describe con la ayuda de un polinomio arbitrario en el cual están contenidas $n_1 n_2$ constantes arbitrarias:

$$\Phi^{++}(z_1, z_2) = \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} c_{k_1 k_2} z_1^{k_1} z_2^{k_2} = P_{n_1-1,\, n_2-1}(z_1, z_2),$$
$$\Phi^{--}(z_1, z_2) = -z_1^{-n_1} z_2^{-n_2} P_{n_1-1,\, n_2-1}(z_1, z_2).$$

Unos razonamientos análogos muestran que el problema de partida tiene soluciones que dependen de un número finito de constantes arbitrarias y son tales que

$$6)\ \Phi^{\pm\pm}(z_1, z_2) \equiv 0$$

sólo cuando $l_1 > m_1$ y $m_2 > l_2$.

Un problema elemental homogéneo bidimensional resoluble siempre tiene, como lo prueban los cálculos inmediatos, un número infinito de soluciones linealmente independientes de tal índole que o

bien sólo una de las cuatro funciones buscadas es idénticamente igual a cero, o bien todas ellas son distintas de cero.

El análisis de todos los casos muestra que el problema elemental homogéneo bidimensional es resoluble, si se cumple una de las siguientes condiciones necesarias y suficientes impuestas sobre los exponentes de los monomios (14.38):

$$\begin{aligned} &1)\ l_1 > 0, \quad 2)\ n_1 > m_1, \quad 3)\ n_2 > l_2, \quad 4)\ m_2 > 0, \\ &5)\ l_1 > m_1 \quad \text{y } m_2 > l_2, \quad 6)\ n_1 > 0 \quad \text{y} \quad n_2 > 0. \end{aligned} \tag{14.42}$$

El problema tiene solución general, dependiente del número finito de las constantes arbitrarias, cuando, y sólo cuando,

$$m_1 = n_1, \quad l_2 = n_2, \quad l_1 = m_2 = 0 \quad \text{y} \quad n_1 n_2 > 0. \tag{14.43}$$

Si el problema es soluble y su solución general depende de las funciones analíticas arbitrarias de una sola variable, entonces, al prefijar a lo sumo $l_1 + m_2 + (n_1 - m_1) + (n_2 - l_2)$ condiciones funcionales adicionales, se puede lograr que la solución de tal problema ya dependa sólo de un número finito de constantes arbitrarias.

Pasando a la consideración del problema bidimensional no homogéneo (14.36)—(14.38), observamos que éste, a diferencia del problema unidimensional, puede resultar insoluble incluso en el caso de que es resoluble el problema homogéneo que le corresponde. Este fenómeno, inesperado a primera vista, se explica, en primer lugar, por el hecho de que en la fórmula de Sojotski (14.33) figuran cuatro sumandos en vez de dos en el caso unidimensional, y, en segundo lugar, por la influencia de los exponentes de monomios (14.38), lo que es semejante a la influencia del índice del problema unidimensional.

El primer fenómeno está bien ilustrado por el corolario 2 al final del p. 14.8. Para mostrar el segundo, examinemos un ejemplo sencillo. Sea en (14.38) $l_1 = 1$, $l_2 = m_1 = m_2 = n_1 = n_2 = 0$; entonces, en virtud de la primera desigualdad de (14.42), el problema homogéneo es soluble y su solución general tiene la forma

$$\Phi^{++}(z_1, z_2) = a^+(z_2), \quad \Phi^{-+}(z_1, z_2) = z_1^{-1} a^+(z_2),$$
$$\Phi^{\pm=}(z_1, z_2) = 0,$$

donde $a^+(z_2)$ es una función arbitraria, analítica en D_2^+. Por otra parte, aplicando la fórmula de Sojotski (14.33) a una integral de tipo de Cauchy $F(z_1, z_2) = (Kf)(z_1, z_2)$ y haciendo uso del corolario 1 del p. 14.8, obtenemos las siguientes igualdades:

$$\Phi^{++}(t_1, t_2) - t_1 \Phi^{-+}(t_1, t_2) = F^{++}(t_1, t_2) - F^{-+}(t_1, t_2),$$
$$\Phi^{--}(z_1, z_2) = F^{--}(z_1, z_2), \quad z_1 \Phi^{+-}(z_1, z_2) = F^{+-}(z_1, z_2),$$

la última de las cuales se cumple sólo cuando

$$F^{+-}(0, z_2) = 0 \quad \text{para} \quad z_2 \in D_2^-.$$

Si esta condición está cumplida, para obtener la solución particular $\Phi_0^{\pm\pm}(z_1, z_2)$ del problema no homogéneo basta poner

$$\Phi_0^{++}(z_1, z_2) = F^{++}(z_1, z_2), \quad \Phi^{+-}(z_1, z_2) = z_1^{-1} F^{+-}(z_1, z_2).$$

Para obtener las condiciones de resolubilidad del problema elemental no homogéneo, se debe, en el caso general, desarrollar la función dada en serie doble de Laurent

$$f(t_1, t_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} f_{k_1 k_2} t_1^{k_1} t_2^{k_2}$$

e igualar a cero sus coeficientes $f_{k_1 k_2}$, que están ausentes en los desarrollos en series de Laurent de las funciones

$$\Phi^{++}(t_1, t_2), \quad t_1^{l_1} t_2^{l_2} \Phi^{-+}(t_1, t_2), \quad t_1^{m_1} t_2^{m_2} \Phi^{+-}(t_1, t_2),$$
$$t_1^{n_1} t_2^{n_2} \Phi^{--}(t_1, t_2),$$

donde $\Phi^{\pm\pm}(z_1, z_2)$ son funciones arbitrarias de sus clases que satisfacen las condiciones (14.37).

Si por ejemplo,

1) $n_1 \geqslant l_1 > 0, \quad n_2 \geqslant m_2 > 0, \quad l_2 \leqslant 0, \quad m_1 < 0,$

2) $m_1 = n_1, \quad l_2 = n_2, \quad l_1 = m_2 = 0, \quad n_1 n_2 \leqslant 0$ (compárese con (14.43),

3) $l_1 = n_1 > 0$ ($\leqslant 0$), $\quad m_2 = n_2 \leqslant 0$ (> 0), $\quad m_1 = l_2 = 0$, entonces el problema elemental no homogéneo es, respectivamente,

1) incondicionalmente resoluble;

2) resoluble, si se cumple el número finito de las condiciones de resolubilidad necesarias y suficientes;

3) resoluble, si se cumple el conjunto numerable de las condiciones de resolubilidad necesarias y suficientes.

Un problema elemental y bidimensional no homogéneo resoluble tiene, en general, una infinidad de diferentes soluciones particulares. El procedimiento más sencillo para hallar una solución particular consiste en lo siguiente. Hagamos $\Phi_0^{++}(z_1, z_2) = F^{++}(z_1, z_2)$, y, partiendo de aquí, exigiremos que se verifiquen las igualdades

$$t_1^{l_1} t_2^{l_2} \Phi_0^{-+} = U^{-+} + U^{+-} - U^{--},$$
$$t_1^{m_1} t_2^{m_2} \Phi_0^{+-} = V^{-+} + V^{+-} - V^{--},$$
$$t_1^{n_1} t_2^{n_2} \Phi_0^{--} = -W^{-+} - W^{+-} + W^{--},$$
$$F^{+-} = U^{+-} + V^{+-} + W^{+-},$$
$$F^{--} = U^{--} + V^{--} + W^{--},$$

en las cuales se deben determinar las funciones $U^{\pm\mp}$, U^{--}, $V^{\pm\mp}$, V^{--}, $W^{\pm\mp}$, W^{--}, y, consecuentemente, las funciones $\Phi_0^{\pm\mp}$ y Φ_0^{--} que figuran en la solución particular del problema. En virtud de estas igualdades, en las series de Laurent, por ejemplo, para las funciones U^{--}, V^{--}, W^{--} solamente una parte de los coeficientes puede ser distinta de cero. Designemos los conjuntos de tales coeficientes $Z_{\overline{U}}$, $Z_{\overline{V}}$, $Z_{\overline{W}}$, respectivamente; entonces, la unión de estos conjuntos coincide con el conjunto de aquellos coeficientes de la serie de Laurent para la función F^{--} que no figuran entre las condiciones necesarias y suficientes de resolubilidad. Exigiremos, ahora, que los coeficientes de la función U^{--}, que figuran en $Z_{\overline{U}}$, coincidan con los coeficientes correspondientes de la función F^{--}. A continuación, igualemos a cero los coeficientes de la función V^{--}, que figuran en el conjunto $Z_{\overline{U}} - Z_{\overline{V}}$, y los que integran el conjunto $Z_{\overline{V}} - Z_{\overline{U}}$ haremos iguales a los correspondientes coeficientes de la función F^{--}. Y, por fin, pongamos iguales a cero los coeficientes de la función W^{--}, que figuran en el conjunto $Z_{\overline{W}} - (Z_{\overline{U}} + Z_{\overline{V}})$, y los restantes haremos equivalentes a los coeficientes correspondientes de la función F^{--}. De una manera análoga determinemos también las demás funciones $U^{\pm\mp}$, $V^{\pm\mp}$ y $W^{\pm\mp}$.

En conclusión, introduzcamos las siguientes designaciones: λ es el número de soluciones linealmente independientes del problema homogéneo (14.36)—(14.37); μ, el número de condiciones linealmente independientes, necesarias y suficientes para que sea resoluble el correspondiente problema no homogéneo. Según proviene del ejemplo recién considerado, son posibles los siguientes cuatro casos: a) $\lambda < +\infty$, $\mu < +\infty$, la diferencia finita $\varkappa = \lambda - \mu$ de este problema, la denominan *índice* del problema, b) $\lambda = +\infty$, $\mu < +\infty$, c) $\lambda < +\infty$, $\mu = +\infty$, d) $\lambda = +\infty$, $\mu = +\infty$. Todos estos casos se realizan en realidad, en lo que, precisamente, consiste la diferencia fundamental entre el problema bidimensional de Riemann y el unidimensional, para el cual bajo las suposiciones, aquí consideradas, resulta posible sólo el caso a).

14.10. Algunos resultados relacionados con el problema de Riemann multidimensional.

1°. La solución del problema general (14.36)—(14.37) en la forma cerrada actualmente no se conoce, lo que ya hemos señalado más arriba. En los pp. 14.8 y 14.9 se consideraban dos casos más sencillos de la solución del problema de Riemann en la forma cerrada. Demos a conocer una serie de otros casos de este género.

Empleando la metodología de resolución de los problemas unidimensionales, se puede resolver (V. A. Kakichev 3)*) seis problemas «degenerados» de Riemann que se obtienen de la condición (14.36), si ponemos en ella:

$$1)\ A = B = 0, \quad 2)\ A = C = 0, \quad 3)\ B = D = 0,$$

$$4)\ C = D = 0, \quad 5)\ A = D = 0, \quad 6)\ B = C = 0.$$

Siguiendo el método, análogo al de separación de variables, que se utiliza en las ecuaciones de la física matemática, V. A. Kakichev 4)* resuelve dos tipos de problemas, equivalentes al número finito de los problemas elementales y degenerados. Por el método de eliminación sucesiva de valores límites que conduce a los problemas degenerados, Kakichev resolvió toda una serie de otros problemas y, en particular, el problema con coeficientes A, B, C, D, que admiten la representación

$$A=\frac{A^{++}A^{+-}}{A^{--}}, \qquad B=B^{+-}B^{--}, \qquad C=C^{+-}C^{--}, \qquad D=D^{+-}+D^{-+}-D^{--}.$$

Este método fue utilizado por Yu. I. Cherski y a continuación por V. S. Rabinovich 1)*.

V. A. Malishev 1), 2)* redujo el problema sobre los desplazamientos aleatorios en el cuadrante del plano a la resolución del problema de Riemann, en el cual L es un toro unitario, $t_1^N t_2^N A\ (t_1, t_2)$ es un polinomio y $B = C = -D = 1$. Bajo las condiciones especiales complementarias tal problema fue reducido por él a la resolución de un problema de Riemann unidimensional en cierta superficie de Riemann (véase el p. 53.2).

2°. El problema bidimensional multiplicativo (problema de factorización), análogo a uno considerado en 1° del p. 14.3, consiste en la representación de la función $G\ (t_1, t_2) \neq 0$, que satisface en L la condición de Hölder, en la forma de un producto de cuatro funciones $\Phi^{\pm\pm}\ (t_1, t_2)$ que son valores límites de las funciones $\Phi^{\pm\pm}\ (z_1, z_2)$, analíticas en $D^{\pm\pm}$.

Este problema, al igual que el problema unidimensional, está estrechamente relacionado con el del salto; para $\varkappa_1\ (G) = \varkappa_2\ (G) = 0$ y las condiciones adicionales de tipo (14.35) el problema tiene solución única. Cuando $|\ \varkappa_1\ | + |\ \varkappa_2\ | > 0$, la situación se hace mucho más compleja (véase V. A. Kakichev 5)*).

3°. Puesto que la solución del problema de Riemann en la forma cerrada está desconocida, para su estudio crece el papel de los métodos cualitativos. I. B. Simonenko 4), 5)* elaboró y empleó el procedimiento local de investigación de los operadores lineales cuya exposición sale de los márgenes de este libro, para indicar las condiciones necesarias y suficientes que destacan la clase de problemas de Riemann de índice finito (véase el caso a) al final del p. 14.9). Enunciaremos este teorema importante de I. B. Simonenko, acompañado de una generalización, obtenida por V. S. Pilidi 1)*.

TEOREMA. *Supongamos que A, B, C, D y f son sumables para la potencia $p > 1$, en la armazón L, formada por unas curvas simples cerradas de Liapunov. Entonces las condiciones*

a) $A \neq 0, \quad B \neq 0, \quad C \neq 0, \quad D \neq 0$ en L;
b) $\varkappa_1\ (A) = \varkappa_1\ (B), \quad \varkappa_1\ (C) = \varkappa_1\ (D),$
$\varkappa_2\ (A) = \varkappa_2\ (C), \quad \varkappa_2\ (B) = \varkappa_2\ (D)$

son necesarias y suficientes para que el problema (14.36)—(14.37) *tenga el índice finito.*

4°. El problema de Riemann para unos bisemiplanos consiste en la búsqueda de cuatro funciones $\Phi^{\pm\pm}\ (z_1, z_2)$, analíticas, respectivamente, en los bisemiplanos $\operatorname{Im} z_1 \geqslant 0$ y $\operatorname{Im} z_2 \geqslant 0$, según las condiciones (14.36)—(14.37), donde L, ahora, es un semiplano: $\operatorname{Im} z_1 = 0$, $\operatorname{Im} z_2 = 0$. Este problema se ha estudiado en las obras de I. B. Simonenko 3)* y V. S. Ravinovich 1)*, bajo el supuesto de que las funciones A, B, C, D y f son continuas en el conjunto $\dot{R}^2$, obtenido por clausura del plano L mediante un punto infinitamente alejado. En este caso, a lo largo de cualquier curva cerrada $\Gamma \subset \dot{R}^2$ en índice de la función continua en $\dot{R}^2$ es siempre nulo.

Por esto, si se cumple sólo una condición a) del teorema del p. 3°, el índice del problema de Riemann para los bisemiplanos resulta ser igual a cero.

Un problema de este género, para $B = C = -D = 1$ y cuando A y f son funciones de tipo especial, tiene numerosas aplicaciones a saber, en la teoría de única velocidad acerca del transporte de partículas (véase, por ejemplo, A. Leonard 1)**), en la teoría de la difracción de ondas electromagnéticas (E. A. Kraut, G. W. Lehman 1)**), etc.

5°. El problema de Riemann para un hipercono $|z_1| + |z_2| < 1$ se estudiaba por los discípulos de A. A. Temliakov. El informe de los resultados obtenidos se puede encontrar en el artículo de G. L. Lukankin 1)*.

6°. El problema multidimensional de Riemann para los dominios tubulares radiales se ha planteado y estudiado en el artículo de V. S. Vladímirov 1)*, el cual, desde el punto de vista histórico, es la primera obra de esta índole. Se llama dominio tubular radial al conjunto $T^{\pm}$ de puntos $z = (z_1, \ldots, z_n)$ tales que $\operatorname{Re} z = x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ y $\operatorname{Im} z = y = (y_1, \ldots, y_n)$ pertenece al cono $V^{\pm}$. Los conos V^+ y $V^- = -V^+$ se suponen convexos que no contienen íntegramente una recta con vértice común en el origen de coordenadas. En el problema de Riemann se debe determinar un par de funciones $\Phi^{\pm}(z)$, analíticas en $T^{\pm}$, según la condición de contorno

$$\Phi^+(x) = G(x)\,\Phi^-(x) + g(x), \quad x \in R^n, \tag{14.44}$$

en la cual $G(x)$ y $g(x)$ son funciones conocidas de ciertas clases, y $\Phi^{\pm}(x)$ son valores de contorno de las funciones $\Phi^{\pm}(z)$, cuando $y \to 0$ e $y \in V^{\pm}$.

El problema (14.44) fue investigado por V. S. Vladímirov 1)* para el caso en que los valores límites $\Phi^{\pm}(x)$ son: a) funciones continuas que pueden ser representadas por las integrales de Fourier, b) funciones generalizadas de crecimiento lento.

El problema (14.44) es, en cierto sentido, una generalización del conocido teorema de una «punta de la cuña» de N. N. Bogolúbov, el cual surgió en la teoría de correlaciones de dispersión en la mecánica cuántica (véase V. S. Vladímirov 2)*).

§ 15. Casos excepcionales del problema de Riemann

Al plantear el problema de contorno de Riemann (p 14.1) hemos exigido que el coeficiente $G(t)$ satisfaga la condición de Hölder, lo que excluye la posibilidad de que éste se convierta en el infinito y no se anule en ningún punto. Estas restricciones, como lo vimos en el transcurso de la resolución (el empleo de $\ln G(t)$), eran esenciales. Ahora llevemos a cabo la investigación del problema, renunciando a estas restricciones, es decir, admitiendo que la función $G(t)$ en ciertos puntos del contorno se reduce a cero o convierte en el infinito de órdenes enteros.

Para simplificar, supondremos que el contorno L está compuesto por una curva cerrada.

15.1. Problema homogéneo. Escribamos la condición de contorno del problema de Riemann homogéneo en la forma

$$\Phi^+(t) = \frac{\prod_{k=1}^{\mu} (t-\alpha_k)^{m_k}}{\prod_{j=1}^{\nu} (t-\beta_j)^{p_j}}\, G_1(t)\,\Phi^-(t). \tag{15.1}$$

Aquí, α_k ($k = 1, 2, \ldots, \mu$), β_j ($j = 1, 2, \ldots, \nu$) son ciertos puntos del contorno; m_k, p_j son números enteros positivos; $G_1(t)$ es una función que satisface la condición de Hölder y no se anula. Los puntos α_k serán ceros de la función $G(t)$. Los puntos β_j se llamarán polos de esta función[1]).

Designemos

$$\operatorname{Ind} G_1(t) = \varkappa; \quad \sum_{j=1}^{\nu} p_j = p; \quad \sum_{k=1}^{\mu} m_k = m.$$

Buscaremos la solución en la clase de funciones acotadas en el contorno[2]).

Sea $X(z)$ una función canónica del problema de Riemann cuyo coeficiente es $G_1(t)$. Sustituyamos en (15.1) $G_1(t) = \frac{X^+(t)}{X^-(t)}$ y escribamos la condición de contorno en la forma

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k}} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)\prod_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}}. \tag{15.2}$$

Apliquemos a la última igualdad el teorema acerca de la prolongación analítica y el teorema generalizado de Liouville (compárese el p. 14.4, el caso en que $\varkappa > 0$). Los puntos α_k, β_j no pueden ser puntos singulares de la misma función analítica, puesto que esto contradiría a la suposición de que $\Phi^+(t)$ ó $\Phi^-(t)$ es acotada. Por consiguiente, la única singularidad posible es un punto infinitamente alejado. El orden en el infinito de $X^-(z)$ es $\varkappa$, mientras que el orden de $\prod_{j=1}^{\nu}(z-\beta_j)^{p_j}$ es igual a $-p$. De aquí, el orden en el infinito de la función $\frac{\Phi^-(z)}{X^-(z)\prod_{j=1}^{\nu}(z-\beta_j)^{p_j}}$ es $-\varkappa+p$. Cuando $\varkappa - p \geqslant 0$, de acuerdo con el teorema generalizado de Liouville, se tiene

$$\frac{\Phi^+(z)}{X^+(z)\prod_{k=1}^{\mu}(z-\alpha_k)^{m_k}} = \frac{\Phi^-(z)}{X^-(z)\prod_{j=1}^{\nu}(z-\beta_j)^{p_j}} = P_{\varkappa-p}(z),$$

[1]) Puesto que la función $G(t)$ no es analítica, el empleo del término «polo» no es del todo lícito. Utilizaremos este término con el fin de abreviar, comprendiendo por él un punto, donde la función (no analítica) se convierte en el infinito de orden entero.

[2]) Es fácil establecer que lo esencial aquí es sólo la exigencia de integrabilidad, es decir, la restricción en aquel sentido que es admisible la reducción al infinito cuyo orden es inferior al primero. De este hecho ya desprende la acotación (véase el problema 12 al final del capítulo).

de donde

$$\Phi^+(z) = X^+(z) \prod_{k=1}^{\mu} (z-\alpha_k)^{m_k} P_{\varkappa-p}(z),$$
$$\Phi^-(z) = X^-(z) \prod_{j=1}^{\nu} (z-\beta_j)^{p_j} P_{\varkappa-p}(z). \tag{15.3}$$

Si $\varkappa - p < 0$, se debe poner $P_{\varkappa-p}(z) \equiv 0$, y, por lo tanto, el problema no tiene soluciones.

El problema de contorno con coeficientes $G_1(t)$ lo llamaremos *problema reducido*. El índice $\varkappa$ del problema reducido se denominará también índice del problema dado. Las fórmulas (15.3) muestran que el grado del polinomio $P(z)$ es en p unidades inferior al índice del problema $\varkappa$.

De aquí se deduce que *el número de soluciones del problema* (15.1) *en la clase de funciones acotadas en el contorno no varía a causa de la presencia de ceros en el coeficientes del problema y disminuye en orden sumario de todos los polos. En particular, si el índice resulta ser menor que el orden sumario de los polos, el problema es insoluble.*

Si el problema es resoluble, su solución se da mediante las fórmulas (15.3), en las cuales la función canónica del problema reducido $X(z)$ se halla según las fórmulas (14.9), (14.10), con una particularidad de que $G(t)$ en estas últimas debe sustituirse por $G_1(t)$. Al imponerse la condición complementaria $\Phi^-(\infty) = 0$, el número de soluciones disminuye en una unidad y el polinomio $P(z)$ se debe tomar de grado $\varkappa - p - 1$.

Hagamos más amplia, ahora, la clase de soluciones, admitiendo que una de las funciones buscadas (sea $\Phi^+(z)$ ó $\Phi^-(z)$) puede reducirse en ciertos puntos del contorno al infinito de orden entero, mientras que la otra función queda acotada en estos mismos puntos. Es fácil advertir que tal admisión no tendrá por resultado ningunos cambios en los puntos no excepcionales. En este caso la acotación de una de las funciones lleva automáticamente la acotación de la otra. Otra cosa ocurre en los puntos excepcionales. Escribamos la condición de contorno (15.1) en la forma

$$\frac{\prod_{j=1}^{\nu} (t-\beta_j)^{p_j} \Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\prod_{k=1}^{\mu} (t-\alpha_k)^{m_k} \Phi^-(t)}{X^-(t)}. \tag{15.2'}$$

Razonando de una manera análoga a la anterior y tomando en consideración que el segundo miembro tiene en el infinito el polo

de orden $\varkappa + m$, obtenemos la solución general en la forma

$$\Phi^+(z) = X^+(z) \prod_{k=1}^{\mu} (z-\alpha_k)^{-m_k} P_{\varkappa+m}(z),$$
$$\Phi^-(z) = X^-(z) \prod_{j=1}^{\nu} (z-\beta_j)^{-p_j} P_{\varkappa+m}(z). \qquad (15.3')$$

Lo último muestra que en la clase de soluciones con singularidad polar admisible que tiene una de las funciones, el número de soluciones, en comparación con la clase de funciones acotadas en el contorno, aumenta (para $\varkappa > 0$) en el orden sumario de todos los ceros y polos del coeficiente.

15.2. Problema no homogéneo. Escribamos la condición de contorno en la forma

$$\Phi^+(t) = \frac{\prod_{k=1}^{\mu} (t-\alpha_k)^{m_k}}{\prod_{j=1}^{\nu} (t-\beta_j)^{p_j}} G_1(t)\, \Phi^-(t) + g(t). \qquad (15.4)$$

Es fácil ver que la condición de contorno no puede ser satisfecha por las $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ finitas, si se admite que $g(t)$ tiene polos en los puntos distintos de β_j, o bien si en los últimos puntos los órdenes de polos de $g(t)$ superan a p_j. Partiendo de esta circunstancia tomemos como una condición que $g(t)$ puede tener polos solamente en los puntos β_j y sus órdenes no superan a p_j.

Para que la teoría que se expone más abajo pueda ser aplicada, es necesario exigir que las funciones $G_1(t)$ y $\prod_{j=1}^{\nu} (t-\beta_j)^{p_j} g(t)$ sean derivables en los puntos excepcionales un número suficiente de veces. El orden de la derivada superior requerida se determina en lo sucesivo.

Igual que en el problema homogéneo, sustituyamos $G_1(t)$ por la razón de funciones canónicas $\frac{X^+(t)}{X^-(t)}$ y escribamos la condición de contorno (15.4) en la forma[1])

$$\prod_{j=1}^{\nu} (t-\beta_j)^{p_j} \frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \prod_{k=1}^{\mu} (t-\alpha_k)^{m_k} \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} + \prod_{j=1}^{\nu} (t-\beta_j)^{p_j} \frac{g(t)}{X^+(t)}. \qquad (15.4')$$

[1]) No podemos transformar la condición de contorno, como hicimos al resolver el problema homogéneo (fórmula (15.2)), dejando en su lugar

$$\prod_{j=1}^{\nu} (t-\beta_j)^{p_j} \text{ y dividiendo por } \prod_{k=1}^{\mu} (t-\alpha_k)^{m_k},$$

La función $\prod_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}\frac{g(t)}{X^+(t)}$ será integrable. Sustituyéndola por la diferencia de valores de contorno de las funciones analíticas

$$\prod_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}\frac{g(t)}{X^+(t)}=\Psi^+(t)-\Psi^-(t),$$

donde

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\prod_{j=1}^{\nu}(\tau-\beta_j)^{p_j}\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z}, \tag{15.5}$$

llevaremos la condición de contorno a la forma

$$\prod_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)}-\Psi^+(t)=\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k}\frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}-\Psi^-(t).$$

Al aplicar, como siempre (el p. 14.4), el teorema de la prolongación analítica y el teorema de Liouville, obtendremos

$$\begin{aligned}\Phi^+(z)&=\frac{X^+(z)}{\prod_{j=1}^{\nu}(z-\beta_j)^{p_j}}[\Psi^+(z)+P_{\varkappa+m}(z)],\\ \Phi^-(z)&=\frac{X^-(z)}{\prod_{k=1}^{\nu}(z-\alpha_k)^{m_k}}[\Psi^-(z)+P_{\varkappa+m}(z)].\end{aligned} \tag{15.6}$$

Las últimas fórmulas darán soluciones las cuales, en general, se convertirán en el infinito en los puntos α_k, β_j. Para que la solución sea acotada, es necesario que la función $\Psi^+(z)+P_{\varkappa+m}(z)$ tenga ceros de órdenes p_j en los puntos β_j, y la función $\Psi^-(z)+P_{\varkappa+m}(z)$,

---

puesto que el término independiente se haría no integrable. Inversamente, escribiendo la condición de contorno (15.2) en la forma (15.4'), obtendríamos la solución

$$\Phi^+(z)=\prod_{j=1}^{\nu}(z-\beta_j)^{p_j}X^+(z)P_{\varkappa+m}(z),$$

$$\Phi^-(z)=\prod_{k=1}^{\mu}(z-\alpha_k)^{-m_k}X^-(z)P_{\varkappa+m}(z)$$

La condición de que $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ son finitas nos obligaría tomar el polinomio en la forma

$$P_{\varkappa+m}(z)=\prod_{k=1}^{\mu}(z-\alpha_k)^{m_k}\prod_{j=1}^{\nu}(z-\beta_j)^{p_j}P_{\varkappa-p}(z),$$

lo que conduciría a la solución obtenida antes (15.3).

ceros de órdenes m_k en los puntos α_k. Estos requisitos impondrán sobre los coeficientes del polinomio $P_{\varkappa+m}(z)$ $m + p$ condiciones. Al escoger los coeficientes del polinomio $P_{\varkappa+m}(z)$ de acuerdo con las condiciones impuestas, las fórmulas (15.6) darán la solución del problema no homogéneo (15.4) en la clase de funciones acotadas.

El procedimiento indicado de resolución representa algunos inconvenientes tanto en el sentido práctico (las dificultades, relacionadas con la resolución del sistema de ecuaciones) como en el teórico: la necesidad de demostrar la compatibilidad e independencia de las ecuaciones que se desprenden de la condición de que en los puntos α_k, β_j las soluciones son finitas. A dicha condición pueden añadirse también las condiciones de que la solución es finita en el punto infinitamente alejado.

Con el objeto de evitar estos inconvenientes, L. A. Chíkin 1)* propuso construir una solución particular especial, llamada por él función canónica del problema no homogéneo.

DEFINICION. Se denomina *función canónica* $Y(z)$ *del problema no homogéneo* (15.4) a una función analítica a trozos que satisface la condición de contorno (15.4), tiene en todo punto de la parte finita del plano (incluso los puntos α_k, β_j) el orden nulo y posee en el infinito el orden más alto posible.

Al construir una función canónica, partiremos de la solución proporcionada por las fórmulas (15.6). Construyamos el polinomio $Q(z)$ de tal modo que él satisfaga las condiciones siguientes:

$$Q^{(i)}(\beta_j) = \Psi^{+(i)}(\beta_j) \quad (i = 0, 1, \ldots, p_j - 1;\ j = 1, 2, \ldots, \nu)$$
$$Q^{(l)}(\alpha_k) = \Psi^{-(l)}(\alpha_k) \quad (l = 0, 1, \ldots, m_k - 1);\ k = 1, 2, \ldots, \mu)$$

donde $\Psi^{+(i)}(\beta_j)$, $\Psi^{-(l)}(\alpha_k)$ son los valores de las derivadas de i-ésimo y l-ésimo órdenes en los puntos correspondientes[1]). De este modo, $Q(z)$ es un polinomio de interpolación de Hermite para la función

$$\Psi(z) = \begin{cases} \Psi^+(z) \text{ en los puntos } \beta_j, \\ \Psi^-(z) \text{ en los puntos } \alpha_k, \end{cases}$$

cuyos nudos de interpolación β_j, α_k poseen las multiplicidades p_j, m_k, respectivamente.

---

[1]) La existencia de estas derivadas será asegurada, si sobre las funciones $\prod_{j=1}^{\nu} (t - \beta_j)^{p_j} g(t)$, $G_1(t)$ imponemos la condición de que en los puntos α_k, β_j ellas tengan derivadas de órdenes m_k, p_j que satisfacen la condición de Hölder.

Es sabido[1]) que tal polinomio se define de única manera y su grado ρ es

$$\rho = m + p - 1.$$

La función canónica del problema no homogéneo se expresa mediante el polinomio de interpolación del modo siguiente

$$Y^+(z) = X^+(z)\frac{\Psi^+(z) - Q_\rho(x)}{\prod_{j=1}^{\nu}(z-\beta_j)^{p_j}}, \quad Y^-(z) = X^-(z)\frac{\Psi^-(z) - Q_\rho(z)}{\prod_{k=1}^{\mu}(z-\alpha_k)^{m_k}} \tag{15.7}$$

Para construir la solución general del problema no homogéneo (15.4) hagamos uso de lo que la solución general se obtiene como suma de cierta solución particular del problema no homogéneo y la solución general del problema homogéneo. Aprovechando las fórmulas (15.3) y (15.7), obtendremos

$$\begin{aligned} \Phi^+(z) &= Y^+(z) + X^+(z)\prod_{k=1}^{\mu}(z-\alpha_k)^{m_k} P_{\varkappa-p}(z), \\ \Phi^-(z) &= Y^-(z) + X^-(z)\prod_{j=1}^{\nu}(z-\beta_j)^{p_j} P_{\varkappa-p}(z). \end{aligned} \tag{15.8}$$

En el caso en que $\varkappa - p < 0$, se debe poner $P_{\varkappa-p}(z) \equiv 0$. Utilizando la fórmula (15.7), no es difícil de calcular que el orden de $Y^-(z)$ en el infinito es igual a $\varkappa - p + 1$. Si $\varkappa < p - 1$, entonces, $Y^-(z)$ tiene en el punto infinitamente alejado el polo y la función canónica deja de ser la solución del problema no homogéneo.

No obstante, al someter el término independiente $g(t)$ a $p - \varkappa - 1$ condiciones, se puede conseguir que el orden en el infinito de la función $Y(z)$ aumente en $p - \varkappa - 1$ unidades y, consecuentemente, que la función canónica $Y(z)$ se haga de nuevo una solución del problema no homogéneo. Para ello es necesario y suficiente, evidentemente, que en el desarrollo de la función $\Psi(z) - Q_\rho(z)$ en el entorno de un punto infinitamente alejado los primeros $p - \varkappa - 1$ coeficientes se reduzcan a cero. Esto precisamente nos da $p - \varkappa - 1$ condiciones de resolubilidad del problema en el caso considerado. Aclaremos el carácter de estas condiciones. El desarrollo $\Psi(z) - Q_\rho(z)$ puede ser representado en la forma

$$\begin{aligned} \Psi(z) - Q_\rho(z) &= c_\rho z^\rho - c_{\rho-1}z^{\rho-1} - \ldots \\ &\ldots - c_0 + c_{-1}z^{-1} + c_{-2}z^{-2} + \ldots + c_{-k}z^{-k} + \ldots, \end{aligned}$$

[1]) Véase, por ejemplo, V. L. Goncharov, «Teoría de interpolación y aproximación de funciones», § 14 (Гончаров В. Л., «Теория интерполирования и приближения функций», Гостехиздат, 1954).

donde $c_0, c_1, \ldots, c_\rho$ son coeficientes del polinomio $Q_\rho(z)$, y c_{-k}, los coeficientes del desarrollo de la función $\Psi(z)$ calculados, lo que se prueba con facilidad, mediante la fórmula

$$c_{-k} = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{j=1}^{\nu}(\tau-\beta_j)^{p_j} g(\tau)\,\tau^{k-1}}{X^+(\tau)}\,d\tau.$$

Las condiciones de resolubilidad mencionadas más arriba tendrán por expresión

$$c_\rho = c_{\rho-1} = \ldots = c_{\rho-p+\varkappa+2} = 0.$$

Si sobre la solución se ha impuesto la condición adicional $\Phi^-(\infty) = 0$, entonces, para $\varkappa - p > 0$, en las fórmulas (15.8) se debe tomar el polinomio $P_{\varkappa-p-1}(z)$, y, cuando $\varkappa - p < 0$, hará falta satisfacer $p - \varkappa$ condiciones.

OBSERVACION. El procedimiento para construir la función canónica del problema no homogéneo puede emplearse también en otros casos, cuando se necesita construir una solución que satisfaga ciertas condiciones prefijadas (véase el problema **13** al final del capítulo).

Es fácil advertir, cómo varían los razonamientos y los resultados, si las soluciones se buscan en la clase de funciones, citada en el p. 15.1, cuando una de ellas tiene singularidad polar en el contorno. Las fórmulas (15.6) representan precisamente las soluciones de esta clase, para lo cual, por consiguiente, se hacen inútiles todos los razonamientos ulteriores acerca de los ceros de las funciones $\Psi^{\pm}(z) + P_{\varkappa+m}(z)$. De este modo, si se admite que en los puntos excepcionales una de las funciones tenga solución de singularidad polar, el número de condiciones de resolubilidad disminuye.

La suposición de que los ceros y los polos son de orden entero, no es esencial. El procedimiento es aplicable también para los casos más generales. La investigación bajo el supuesto de cualquier orden potencial de los ceros y polos se da en [6]. Un caso, aún más general, cuando

$$G(t) = \prod (t-c_k)^{r_k} \ln^{s_k}(t-c_k)\, G_1(t),$$

está explorado en [30].

15.3. Sobre el planteamiento correcto del problema de contorno de Riemann. Por planteamiento correcto de un problema de contorno se comprende, habitualmente, tal planteamiento, cuando el problema es resoluble incondicional y uniformemente, y su solución resulta estable con relación a unos cambios pequeños de los coeficientes o del contorno.

La estabilidad respecto al cambio de los coeficientes de la condición de contorno se desprende directamente de lo siguiente: 1) la solución del problema se da en una forma explícita mediante las integrales de tipo de Cauchy, 2) la inte-

gral de tipo de Cauchy es un operador acotado y, por lo tanto, con las variaciones pequeñas de densidad (en la clase considerada H) recibe pequeños incrementos. Una cuestión más compleja acerca de la estabilidad respecto al cambio del contorno la investigó L. A. Chikin 2), 3)*. El demostró que para G y g, que satisfacen la condición de Hölder, la condición necesaria y suficiente de la estabilidad es que sea $G(t) \neq 0$. De este modo, en los puntos no excepcionales el problema de contorno de Riemann es estable.

Sin embargo, la primera condición de la corrección, hablando en general, no se cumple. Según sea la magnitud del índice, pueden perturbarse o bien la uniformidad o bien la resolubilidad del problema. Veamos cómo se debe cambiar el planteamiento del problema para que éste se haga correcto. Para conseguir la mayor simetría en los resultados, convengamos en buscar la solución en la clase de funciones que desaparecen en el infinito $\Phi^-(\infty) = 0$.

1°. Ind $G(t) = \varkappa > 0$. Aquí, la solución del problema de contorno contiene constantes arbitrarias, por lo cual tendremos que imponer sobre la solución las condiciones adicionales con el objeto de obtener la uniformidad.

Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$; $\beta_1, \ldots, \beta_n$ unos puntos elegidos al azar, que se ubican en los dominios D^+, D^-, respectivamente. Exigiremos que las soluciones del problema de contorno de Riemann no homogéneo (14.2) satisfagan las siguientes $\varkappa$ condiciones:

$$\Phi^{+(j)}(\alpha_i) = a_i^j \quad (i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 0, 1, \ldots, p_i - 1), \tag{15.9'}$$

$$\Phi^{-(l)}(\beta_k) = b_k^l \quad (k = 1, 2, \ldots, n; \quad l = 0, 1, \ldots, q_k - 1), \tag{15.9''}$$

donde a_i^j, b_k^l son números arbitrarios; j, l son los órdenes de las derivadas,

$$\sum_{i=1}^{m} p_i + \sum_{k=1}^{n} q_k = \varkappa, \tag{15.10}$$

y sean $P(z)$ un polinomio de Hermite con nudos de interpolación (15.9') y $\frac{1}{z} Q(z)$ un polinomio similar según potencias de $\frac{1}{z}$ con nudos (15.9''). Buscaremos la solución del problema de contorno (14.2) en la forma

$$\begin{aligned} \Phi^+(z) &= P(z) + \prod_{i=1}^{m} (z - \alpha_i)^{p_i} \Phi_1^+(z), \\ \Phi^-(z) &= \frac{1}{z} Q(z) + \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\beta_k}{z}\right)^{q_k} \Phi_1^-(z) \quad (\Phi_1^-(\infty) = 0). \end{aligned} \tag{15.11}$$

Es fácil ver que las funciones determinadas satisfacen automáticamente las condiciones (15.9). Sustituyendo sus expresiones en la condición de contorno (14.2), obtendremos para $\Phi_1^{\pm}(z)$ un nuevo problema de contorno

$$\Phi_1^+(t) = G_1(t)\, \Phi_1^-(t) + g_1(t). \tag{15.12}$$

Para G_1, g_1 resulta fácil de obtener una expresión explícita y señalar que, en virtud de (15.10), Ind $G_1(t) = 0$. Por consiguiente, el problema (15.12) es resoluble incondicional y uniformemente. De aquí se desprende que el problema de Riemann inicial con las condiciones adicionales (15.9'), (15.9'') está planteado correctamente.

2°. $\varkappa < 0$. En este caso el problema de Riemann es resoluble sólo cuando se cumplen las condiciones adicionales. Para obtener un problema que sea incon-

dicionalmente soluble, existen dos caminos posibles: 1) introducir en el término independiente de la condición de contorno ciertos elementos arbitrarios, 2) ampliar la clase de soluciones, considerando admisibles singularidades polares en cierto número de puntos. Procedamos con la exposición del primer método.

Supongamos que $X(z)$ es una función canónica del problema y $Q(z) = \sum_{k=1}^{|\varkappa|} \frac{c_k}{z^k}$, un polinomio según potencias de $\frac{1}{z}$, cuyos coeficientes coinciden con los términos iniciales del desarrollo de $\Psi(z)$ según potencias de $\frac{1}{z}$. En este caso, si el término independiente en la condición de contorno (14.2) se toma en forma de una suma $g(t) + X^+(t)\, Q\left(\frac{1}{t}\right)$, entonces, para la solución única del problema las condiciones de resolubilidad irán cumpliéndose automáticamente.

Por consiguiente, si en la condición de contorno (14.2) añadimos al término independiente un sumando de tipo $X^+(t)\, Q\left(\frac{1}{t}\right)$, el problema de Riemann será planteado correctamente.

Indiquemos un método más del planteamiento correcto, cuando $\varkappa < 0$. Supongamos que en la solución buscada se admiten en D^+ los polos de órdenes r_i en ciertos puntos de γ_i, y en D^-, los polos de órdenes s_j en ciertos puntos δ_j $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$:

$$\sum_{i=1}^{m} r_i + \sum_{j=1}^{n} s_j = |\varkappa|. \tag{15.13}$$

Buscando la solución en la forma

$$\Phi^+(z) = \frac{\Phi_2^+(z)}{\prod_{i=1}^{m} (z-\gamma_i)^{r_i}}, \qquad \Phi^-(z) = \frac{\Phi_2^-(z)}{\prod_{j=1}^{n} \left(1-\frac{\delta_j}{z}\right)^{s_j}}, \tag{15.14}$$

llegamos al problema de contorno

$$\Phi_2^+(t) = G_2(t)\, \Phi_2^-(t) + g_2(t). \tag{15.15}$$

El índice del nuevo coeficiente es cero, por lo que el problema (15.15) es incondicional y uniformemente resoluble. Por consiguiente, un problema de Riemann de índice $\varkappa < 0$ en la clase de funciones con polos admisibles en cierto número finito de puntos, será planteado correctamente, si el orden sumario de los polos es igual a $|\varkappa|$.

§ 16. Problema de Riemann para un dominio múltiplemente conexo. Algunos resultados nuevos

16.1. Planteamiento del problema. Sea $L = L_0 + L_1 + \ldots + L_m$ un conjunto de $m + 1$ contornos disjuntos, con la particularidad de que el contorno L_0 contiene en su interior todos los demás contornos (fig. 13). Llamaremos D^+ al dominio $(m + 1)$-mente conexo dispuesto en el interior del contorno L_0 y fuera de los contornos

$L_1, \ldots, L_m$. Designaremos con D^- el complemento de $D^+ + L$ hasta el plano completo. Para concretar, convengamos en disponer el origen de coordenadas en el dominio D^+. Por recorrido positivo del contorno L tomaremos aquel que deja el dominio D^+ a la izquierda, es decir, el contorno L_0 se debe recorrer en el sentido contrahorario, y los contornos $L_1, \ldots, L_m$, en el sentido horario.

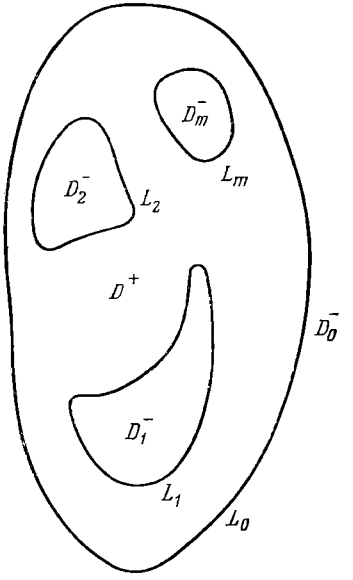


Fig. 13

Ante todo indiquemos que el problema sobre el salto

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t)$$

se resuelve con la ayuda de la misma fórmula

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)\,d\tau}{\tau - z}$$

que se ha usado en el caso de un dominio simplemente conexo. Esto se deduce de las fórmulas de Sojotski, las cuales, según probado en el p. 8. 7, tienen para un dominio multiplemente conexo la misma forma que para un dominio simplemente conexo.

El problema de Riemann (homogéneo y no homogéneo) se enuncia sumamente igual que en el p. 14.1 para un dominio simplemente conexo.

Designemos $\varkappa_k = \frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_{L_k}$ (todos los contornos se recorren en el sentido positivo que acabamos de establecer). Se denomina índice del problema a la magnitud

$$\varkappa = \sum_{k=0}^{m} \varkappa_k. \tag{16.1}$$

Si $\varkappa_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ *son nulos para los contornos interiores*, la solución del problema, lo que es fácil de advertir, tiene la misma forma que para un dominio simplemente conexo.

Con el objeto de reducir el caso general a un caso más simple, introduzcamos una función

$$\prod_{k=1}^{m} (t - z_k)^{\varkappa_k},$$

donde z_k son ciertos puntos que se ubican dentro de los contornos L_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$

Al tomar en consideración que $[\arg (t - z_k)]_{L_j} = 0$, si $k \neq j$, y $[\arg (t - z_j)]_{L_j} = -2\pi$, obtendremos con facilidad

$$\frac{1}{2\pi}\left[\arg \prod_{k=1}^{m} (t-z_k)^{\varkappa_k}\right]_{L_j} = \frac{1}{2\pi}\left[\arg (t-z_j)^{\varkappa_j}\right]_{L_j} = -\varkappa_j$$
$$(j = 1, 2 \ldots, m).$$

De aquí

$$\left\{\arg \left[G(t) \prod_{k=1}^{m} (t-z_k)^{\varkappa_k}\right]\right\}_{L_j} = 0 \quad (j = 1, 2 \ldots, m).$$

Calculemos la variación del argumento de la función

$G(t) \prod_{k=1}^{m} (t-z_k)^{\varkappa_k}$ a lo lagro del contorno L_0:

$$\frac{1}{2\pi}\left\{\arg \left[G(t) \prod_{k=1}^{m} (t-z_k)^{\varkappa_k}\right]\right\}_{L_0} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\arg G(t)\right]_{L_0} + \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m} \left[\varkappa_k \arg (t-z_k)\right]_{L_0} = \varkappa_0 + \sum_{k=1}^{m} \varkappa_k = \varkappa.$$

Puesto que el origen de coordenadas se dispone en el dominio D^+, entonces

$$[\arg t]_{L_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m), \quad [\arg t]_{L_0} = 2\pi.$$

Por esta razón

$$\left\{\arg \left[t^{-\varkappa} \prod_{k=1}^{m} (t-z_k)^{\varkappa_k} G(t)\right]\right\}_L = 0. \tag{16.2}$$

16.2. Resolución del problema.

1°. PROBLEMA HOMOGÉNEO. Escribamos la solución de contorno

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) \tag{14.1}$$

en la forma

$$\Phi^+(t) = \frac{t^{\varkappa}}{\prod_{k=1}^{m} (t-z_k)^{\varkappa_k}}\left[t^{-\varkappa} \prod_{k=1}^{m} (t-z_k)^{\varkappa_k} G(t)\right] \Phi^-(t). \tag{16.3}$$

Como que la función $t^{-\varkappa}\prod_{k=1}^{m}(t-z_k)^{\varkappa_k}G(t)$ tiene en cada uno de los contornos L_k $(k=0, 1, \ldots, m)$ el índice nulo, se puede representarla en forma de una razón

$$t^{-\varkappa}\prod_{k=1}^{m}(t-z_k)^{\varkappa_k}G(t)=\frac{e^{\Gamma^+(t)}}{e^{\Gamma^-(t)}}, \tag{16.4}$$

donde

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln\left[\tau^{-\varkappa}\prod_{k=1}^{m}(\tau-z_k)^{\varkappa_k}G(\tau)\right]}{\tau-z}\,d\tau. \tag{16.5}$$

La función canónica (p. 14.3) del problema se definirá por las fórmulas

$$X^+(z)=\prod_{k=1}^{m}(z-z_k)^{-\varkappa_k}e^{\Gamma^+(z)},\quad X^-(z)=z^{-\varkappa}e^{\Gamma^-(z)} \tag{16.6}$$

Ahora, a la condición de contorno (16.3) atribuyamos una forma

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)}=\frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}$$

Aplicando, como siempre, el teorema de la prolongación analítica y el teorema generalizado de Liouville, obtenemos

$$\begin{aligned}\Phi^+(z)&=\prod_{k=1}^{m}(z-z_k)^{-\varkappa_k}e^{\Gamma^+(z)}P_\varkappa(z),\\ \Phi^-(z)&=z^{-\varkappa}e^{\Gamma^-(z)}P_\varkappa(z).\end{aligned} \tag{16.7}$$

La solución, como se ve, se diferencia de la solución del problema obtenida anteriormente para un dominio simplemente conexo sólo en un factor $\prod_{k=1}^{m}(z-z_k)^{-\varkappa_k}$, que figura en la función $\Phi^+(z)$.

Si se tiene la condición adicional $\Phi^-(\infty)=0$, en las fórmulas (16.7) se debe tomar el polinomio $P_{\varkappa-1}(z)$.

En lo sucesivo (p. 21.2) necesitaremos las fórmulas para los valores límites en el contorno de la función canónica $X(z)$. Si en las fórmulas (16.5) tomamos los valores límites, según las fórmulas de Sojotski tendremos

$$\Gamma^{\pm}(t)=\pm\frac{1}{2}\ln\left[t^{-\varkappa}\Pi(t)G(t)\right]+\Gamma(t).$$

donde $\Gamma(t)$ es el valor principal de la integral (16.5) y

$$\Pi(t) = \prod_{k=1}^{m} (t - z_k)^{\varkappa_k}.$$

Ahora, pasando en las fórmulas (16.6) al límite, para $z \to t$, obtenemos

$$X^+(t) = \sqrt{\frac{G(t)}{t^{\varkappa}\Pi(t)}}\, e^{\Gamma(t)}, \quad X^-(t) = \frac{1}{\sqrt{t^{\varkappa}\Pi(t)\, G(t)}}\, e^{\Gamma(t)}. \tag{16.8}$$

El signo de la raíz se determina por la elección de la rama de la función $\ln [t^{-\varkappa}\Pi(t)\, G(t)]$, la cual puede escojerse arbitrariamente (véase el p. 14.3).

2°. PROBLEMA NO HOMOGÉNEO. Razonando por analogía con el p. 14.5, representemos la condición de contorno

$$\Phi^+(t) = G(t)\, \Phi^-(t) + g(t) \tag{14.2}$$

en la forma

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \Psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \Psi^-(t),$$

donde $\Psi(z)$ se define mediante la fórmula (14.14).

De aquí obtenemos una solución general

$$\Phi(z) = X(z)\, [\Psi(z) + P_{\varkappa}(z)] \tag{16.9}$$

o bien

$$\Phi(z) = X(z)\, [\Psi(z) + P_{\varkappa-1}(z)], \tag{16.10}$$

si sobre la solución está impuesta la condición $\Phi^-(\infty) = 0$.

Para $\varkappa < 0$ el problema no homogéneo es resoluble, cuando, y sólo cuando, se cumplen las condiciones

$$\int_L \frac{g(t)}{X^+(t)}\, t^{k-1}\, dt = 0, \tag{16.11}$$

donde k toma los valores de 1 hasta $-\varkappa - 1$, si se buscan las soluciones acotadas en el infinito, y de 1 hasta $-\varkappa$, si se considera que $\Phi^-(\infty) = 0$.

Siendo cumplidas las condiciones (16.11), la solución puede obtenerse de las fórmulas (16.9) ó (16.10), en las cuales se pone $P_{\varkappa}(z) \equiv 0$.

Señalemos cómo se debe cambiar la solución del problema, si el contorno exterior L_0 está ausente y el dominio D^+ representa en sí un plano agujereado. Ha de notarse que en este caso el punto infinitamente alejado está contenido en D^+, y no en D^-, como antes. Por esta razón, en el infinito debe tomarse en consideración el comportamiento de la función $\Phi^+(z)$, y no $\Phi^-(z)$.

La diferencia fundamental del caso anterior consiste en lo que ahora el índice nulo respecto de todos los contornos L_k ($k = 1, 2, \ldots, m$) lo tiene la función $\prod_{k=1}^{m} (t - z_k)^{\varkappa_k} G(t)$, en la que no figura el factor $t^{-\varkappa}$. Por ello, para obtener la solución del problema, basta repetir todos los razonamientos antecedentes, omitiendo dicho factor.

16.3. Algunos otros resultados. Las obras posteriores acerca del problema de contorno de Riemann tienen por objeto la ampliación de la clase de las funciones dadas y buscadas. Expondremos aquí los resultados principales obtenidos en este sentido.

1°. B. V. Jvedelidze en sus varias obras, cuya exposición completa se da en el artículo [30], investigó el problema de Riemann bajo el supuesto de que $G(t)$, como siempre, satisface la condición de Hölder [1]) y que $g(t) \in L_p$ (es integrable según Lebesgue en la potencia de p). A base de la teoría de la integral de tipo de Cauchy en la clase correspondiente (véase el p. 5.3) se ha obtenido la solución completa del problema de contorno. Los resultados obtenidos (tanto en el sentido cualitativo —el cálculo del número de soluciones y condiciones de resolubilidad en dependencia del índice —, como en el sentido algorítmico — el tipo de fórmulas que proporcionan la solución en la forma cerrada) son los mismos que en el caso de $g(t)$ que satisface la condición de Hölder. La única diferencia consiste en que aquí, como siempre cuando nos vemos obligados a tratar la cuestión de integración según Lebesgue, los correspondientes valores límites en el contorno existen sólo casi en todos los puntos (a excepción del conjunto de medida cero) y sólo a lo largo de las vías que no son tangentes al contorno.

2°. Recientemente se ha logrado liberarse de la restricción que obliga el coeficiente satisfacer la condición de Hölder, conservándose sólo la condición natural de continuidad. Este problema se ha madurado tanto que su solución fue dada simultáneamente por varios autores independientemente uno del otro. Primero daremos a conocer la solución propuesta por I. B. Simonenko 1)*.

En la base radica la siguiente idea sencilla. En el caso de $G(t) \equiv 1$ tenemos el problema sobre el salto que se resuelve incondicional y uniformemente en la clase L_p. Resulta que las pequeñas desviaciones del coeficiente no alteran el carácter de la solución. El paso al caso general se efectúa aproximándose la función continua mediante las funciones que satisfacen la condición de Hölder.

Supongamos que en la condición de contorno del problema de Riemann

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t)$$

$G(t)$ es una función continua, y $g(t) \in L_p$. La resolución puede dividirse esquemáticamente en cuatro etapas.

1. A base de los resultados obtenidos por B. V. Jvedelidze para la integral de tipo de Cauchy en la clase L_p (véase el p. 5.3) se deduce la acotación

$$\| \Phi^{\pm}(t) \| = \left\| \pm \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2} S\varphi \right\| \leqslant \frac{1 + M_p}{2} \| \varphi \|,$$

donde M_p es la norma del operador $S\left(S\varphi = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau\right)$.

---

[1]) Sobre la posibilidad de discontinuidades en ciertos puntos véase el p. 41.5.

2. Apoyándose en el principio de aplicaciones contraídas (el método de aproximaciones sucesivas) el autor demuestra que el problema de Riemann cuyo coeficiente es una función medible que satisface la condición

$$| G(t)-1 | < \frac{2}{1+M_p},$$

tiene única solución.

3. En el caso de índice cero se demuestra la resolubilidad unívoca del problema de una manera siguiente. Se toma la función $G_1(t)$ que satisface la condición de Hölder, no se reduce a cero en ningún punto y es suficientemente próxima a $G(t)$:

$$| G(t) G_1^{-1}(t)-1 | < \frac{2}{1+M_p};$$

para esta función se realiza una representación canónica

$$G_1 = X_1^+ (X_1^-)^{-1}$$

y se introducen las nuevas funciones incógnitas $\Phi_1^{\pm} = \Phi^{\pm} (X_1^{\pm})^{-1}$.

Al pasar a estas incógnitas, el problema (14.2) se transforma en el problema con coeficiente GG_1^{-1}.

4. El caso de índice cualquiera se investiga reduciéndolo a un índice nulo. El método que se emplea para este procedimiento difiere un poco del expuesto en los pp. 16.1—16.2.

Los resultados obtenidos son exactamente los mismos que obtuvo B. V. Jvedelidze para G que satisface la condición de Hölder. De este modo, hemos mostrado que la ampliación de la clase del coeficiente G hasta las funciones sencillamente continuas no hace más estrecha la clase de soluciones; ésta coincide, como antes, con la clase L_p del término independiente.

3°. La resolución del mismo problema propuesta por V. V. Ivanov 3)* y B. V. Jvedelidze 2)* está basada en el teorema de V. I. Smirnov que concede la estimación del orden de crecimiento de la integral singular de tipo de Cauchy con densidad continua. Esta integral, en general, no será acotada, pero, si crece infinitamente, este proceso es muy lento, de suerte que no sólo el propio $S\varphi$, sino también $e^{\pm S\varphi} \in L_r$, cualquiera que sea $r > 0$ [1]).

Sea $\varkappa = \operatorname{Ind} G(t) = 0$, $g(t) \in L_p$. Según lo dicho, la funcion canónica del problema de Riemann $X^{\pm}(t) = e^{\pm \frac{1}{2} \ln G + \frac{1}{2} S \ln G} \in L_r$. Reducimos, como siempre, la condición de contorno a la forma del problema del salto:

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} = \frac{g(t)}{X^+(t)}.$$

De acuerdo con así llamada desigualdad de Hölder [2]), el segundo miembro pertenecerá a la clase $L_{p-\varepsilon}$, donde ε es un número positivo tan pequeño como se

---

[1]) Conforme a los resultados del p. 8.2, en el caso de discontinuidad de primera especie $S\varphi$ tiene una singularidad logarítmica, razón por la cual $e^{S\varphi}$ posee singularidad potencial. El valor de salto puede elegirse de una manera tal que el orden de crecimiento sea tan grande como se quiera.

[2]) Véase, por ejemplo, Hardy G. H., Littlewood J. E., Pólya G., Inequalities. 1934.

quiera. La solución del problema cuyos valores de contorno se determinan mediante las fórmulas

$$\Phi^{\pm}(t) = X^{\pm}\left[\pm\frac{1}{2}\frac{g}{X^{+}} + \frac{1}{2}S\left(\frac{g}{X^{+}}\right)\right],$$

pertenece a la misma clase $L_{p-\varepsilon}$. El último resultado es menos exacto que el obtenido por el método de I. B. Simonenko según el que se ha establecido que se puede poner $\varepsilon = 0$.

La exposición muestra que aunque, al pasar del coeficiente de la clase de Hölder a la clase de funciones continuas, los resultados cualitativos (el número de soluciones linealmente independientes o de condiciones de resolubilidad) quedan inalterables, no obstante, cambia considerablemente el carácter de la solución: siendo continua, la solución puede hacerse discontinua en todos los puntos. Hasta ahora queda no resuelto el problema, sencillo en cuanto a su planteamiento: en qué clase más amplia puede elegirse el coeficiente G tal que la solución del problema de contorno de Riemann quede continua.

4°. Yu. I. Cherski 1)* examinó el problema de contorno de Riemann en el espacio abstracto, considerando que en la condición de contorno

$$\varphi^{+} = A\varphi^{-} + g$$

A es el operador lineal, y φ^{+}, φ^{-}, g son todos los elementos del espacio de Banach. El operador singular S se determina por procedimiento axiomático. La propiedad principal de determinación es $S^2 = I$ (I es el operador unidad) a la condición de que $S \neq \pm I$ (véase el p. 7.3). Los elementos $\varphi^{\pm}$ se forman a base del elemento arbitratio φ mediante las fórmulas $\varphi^{\pm} = \frac{1}{2}(\pm\varphi + S\varphi)$. El índice se determina por medio de un cierto operador. En tal planteamiento se ofrece la solución completa del problema.

La particularidad fundamental de esta obra consiste en la unidad de la investigación de los problemas de existencia de solución y de la construcción del algoritmo para su obtención real. Esta unidad aparece como resultado de que la teoría abstracta está construida sobre la base de resolución efectiva del problema de Riemann, expuesta arriba en los párrafos 14—17, en la que los operadores y las funciones concretos se sustituyen por los operadores abstractos y elementos de un espacio abstracto. El problema de contorno se considera en relación con la resolución de las ecuaciones integrales singulares (véase el p. 21.1)

5°. A título de una de las realizaciones de la teoría abstracta, Yu. I. Cherski 2)* propuso la solución del problema de Riemann en funciones generalizadas (en funcionales sobre cierto espacio de las funciones principales).

Más tarde este problema fue estudiado por V. S. Rogozhin desde varios puntos de vista. Entre gran número de obras publicadas por él sobre este problema las más importantes son 6), 7), 8)*.

6°. Las cuestiones de la resolución aproximada del problema de contorno de Riemann se han considerado en la obra de A. V. Batirev 1)* el cual señaló dos métodos. Ambos están basados en la aproximación del coeficiente de la condición de contorno por medio de una función racional. En el primer método el coeficiente $G(t)$ es aproximado por medio de la función $r_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k t^k$. El problema homogéneo con el coeficiente $r_n(t)$ se resuelve por el procedimiento del p. 14.6. Aplicado el segundo método, el problema homogéneo se reduce, tomando logaritmos, al problema del salto y, luego, por medio de la misma función $r_n(t)$ se aproxima $\ln G(t)$. Se da la acotación del error.

Las otras obras dedicadas a esta cuestión están relacionadas con el estudio de una ecuación integral singular. Serán expuestas en el p. 21.11.

§ 17. Problema de contorno de Riemann con traslación

17.1. Planteamiento del problema y observaciones generales. Sea dado un contorno cerrado simple L que divide el plano en el dominio interior D^+ y el exterior D^-. En este contorno están definidas dos funciones $G(t)$, $g(t)$, que satisfacen la condición de Hölder, y una función $\alpha(t)$ que aplica biunívocamente el contorno L sobre sí misma, manteniendo el sentido, y tiene derivada $\alpha'(t)$, la cual satisface la condición de Hölder y no se reduce a cero; llamaremos $\alpha(t)$ *función de traslación* (o también desplazamiento o traslado).

Hace falta determinar la función $\Phi^+(z)$, analítica en el dominio D^+, y la función $\Phi^-(z)$, analítica en el dominio D^-, cuyos valores límites en el contorno son continuos y satisfacen la correlación lineal

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\,\Phi^-(t) \quad \text{(problema homogéneo)} \tag{17.1}$$

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t) \quad \text{(problema no homogéneo)} \tag{17.2}$$

El problema enunciado representa en sí una generalización del problema de contorno de Riemann. En un caso particular, cuando $\alpha(t)$ es el valor de contorno de una función analítica en D^+, el problema puede ser reducido al de Riemann. Para ello será suficiente introducir una nueva función buscada analítica a trozos

$$\Phi_1^+(z) = \Phi^+[\alpha(z)], \quad \Phi_1^-(z) = \Phi^-(z).$$

El problema con traslación puede también reducirse, en el caso general, a un problema de contorno de Riemann ordinario. No obstante, se necesita previamente proporcionar la solución del problema del salto:

$$\Phi^+[\alpha(t)] - \Phi^-(t) = g(t). \tag{17.3}$$

Lo último está basado en la investigación de un problema más sencillo sobre el salto nulo:

$$\Phi^+[\alpha(t)] - \Phi^-(t) = 0. \tag{17.3'}$$

Como base para la resolución del problema de Riemann ordinario sirve un problema semejante

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = 0,$$

mas el último se resuelve directamente en virtud del teorema sobre la prolongación analítica y del de Liouville. A diferencia de este caso, (17.3') no se soluciona de un modo elemental y su consideración requiere que se atraiga la teoría de ecuaciones integrales de Fredholm.

17.2. Problema de salto nulo. Se necesita hallar una función analítica a trozos $\Phi(z)$ que satisfaga en el contorno la condición de contorno

$$\Phi^+[\alpha(t)] - \Phi^-(t) = 0 \tag{17.4}$$

y la condición complementaria $\Phi^-(\infty) = 0$.

Formemos la ecuación integral del problema, haciendo uso de las condiciones (4.11), (4.12) de que $\Phi^{\pm}(t)$ son valores de contorno de unas funciones analíticas en los dominios correspondientes. Teniendo en cuenta la investigación de resolubilidad de la ecuación que se obtiene, introduzcamos dos funciones analíticas nuevas, tomando las funciones buscadas por densidades de las integrales de tipo de Cauchy:

$$\Psi^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi^-(\tau)}{\tau - z}\,d\tau, \quad \Psi^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi^+(\tau)}{\tau - z}\,d\tau. \tag{17.5}$$

Según las fórmulas de Sojotski y las condiciones (4.11), (4.12), tendremos en el contorno:

$$\Psi^+(t) = \frac{1}{2}\Phi^-(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi^-(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = 0, \tag{17.6}$$

$$\Psi^-(t) = -\frac{1}{2}\Phi^+(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi^+(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = 0. \tag{17.7}$$

El segundo miembro de las igualdades queda lícito, cuando, y sólo cuando, $\Phi^{\pm}(t)$ son valores de contorno de unas funciones analíticas en $D^{\pm}$.

Compongamos una ecuación respecto de $\Phi^-(t)$, para lo cual se forma la expresión siguiente

$$\Psi^+(t) - \Psi^-[\alpha(t)] = \frac{1}{2}\{\Phi^-(t) + \Phi^+[\alpha(t)]\} + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi^-(\tau)}{\tau - t}\,d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi^+(\tau)}{\tau - \alpha(t)}\,d\tau = 0. \tag{17.8}$$

Eliminemos, ahora, en la última igualdad, la función Φ^+, recurriendo con este fin a la condición de contorno (17.4). Para esto, en la segunda integral hagamos la sustitución $\tau = \alpha(\tau_1)$, y luego, de nuevo designemos con τ la variable τ_1. De resultas obtendremos, para determinar $\Phi^-(t)$, una ecuación integral

$$\Psi^+(t) - \Psi^-[\alpha(t)] \equiv \\ \equiv \Phi^-(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t}\right]\Phi^-(\tau)\,d\tau = 0. \tag{17.9}$$

Probemos que el núcleo de la ecuación

$$K(t, \tau) = \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t}$$

tiene en el punto $\tau = t$ una singularidad de orden inferior a la unidad.

Restando una de la otra las evidentes igualdades

$$\alpha(t) - \alpha(\tau) = \int_{\tau}^{t} \alpha'(u)\, du,$$

$$\alpha'(\tau)(t - \tau) = \int_{\tau}^{t} \alpha'(\tau)\, du,$$

obtendremos

$$\alpha_+'(t) - \alpha_+'(\tau) - \alpha'(\tau)(t - \tau) = \int_{\tau}^{t} [\alpha'(u) - \alpha'(\tau)]\, du.$$

Para acotar la última integral, designaremos $|u - \tau| = r$, hagamos uso de la desigualdad (4.3) del p. 4.1: $|du| = |ds| < m dr$. Al tomar en consideración la condición de Hölder $|\alpha'(u) - \alpha'(\tau)| < A r_1^{\lambda}$, tendremos

$$|\alpha(t) - \alpha(\tau) - \alpha'(\tau)(t - \tau)| <$$

$$< Am \int_{0}^{\rho} r^{\lambda}\, dr = \frac{Am}{\lambda + 1} \rho^{1+\lambda} = \frac{Am}{1 + \lambda} |t - \tau|^{1+\lambda},$$

donde ρ es un cierto número suficientemente pequeño. De aquí

$$|K(t, \tau)| < M |t - \tau|^{\lambda - 1},$$

donde M es una constante.

De este modo, la ecuación integral (17.9) es una ecuación de Fredholm[1]). Es fácil ver que la función $\Phi^-(t)$, que satisface la condición de contorno (17.4) y la condición (17.6) (bajo la cual la función se hace analítica), satisface la ecuación integral (17.9). Esto se desprende del mismo método de formación de la ecuación. Por el

[1]) Puesto que nosotros no exigimos que las funciones $\Phi^{\pm}(t)$ satisfacieran la condición de Hölder, no podemos afirmar que las fórmulas de Sojotski para valores límites serán justas en todos los puntos del contorno; serán solamente justas en casi todo punto. Mas, en la ecuación (17.9) el primer término es una función continua, y el segundo término, en virtud de la propiedad demostrada del núcleo, es también una función continua. Si una igualdad, en la cual todos los términos son continuos, se satisface en casi todo punto, se satisface en todos los puntos. Así pues, la ecuación (17.9) se verifica en todo el contorno.

momento dejamos al lado la cuestión si toda solución de la ecuación integral es la solución del problema de contorno.

Demos a conocer el resultado fundamental para la cuestión en consideración.

LEMA I. *El problema generalizado con el salto nulo es insoluble para la condición adicional* $\Phi^-(\infty) = 0$[1]).

Admitamos lo contrario, es decir, que el problema es resoluble. Supongamos que la función analítica a trozos $\Phi(z)$ es su solución. De la forma de la condición de contorno (17.4) concluimos que las funciones

$$\Phi_k(z) = [\Phi(z)]^k$$

son también las soluciones del problema para cualquier k entero y positivo (no sería difícil demostrar que, en general, para todo k). Todas estas funciones son, evidentemente, linealmente independientes. Según ya hemos mostrado más arriba, las funciones $\Phi_k(t)$ satisfacen la ecuación integral (17.9), la cual tiene, por lo tanto, un conjunto infinito de soluciones. Puesto que una ecuación de Fredholm sólo puede tener un número finito de soluciones, la contradicción obtenida demuestra el lema.

Sin embargo, del lema demostrado no podemos sacar la deducción de que la ecuación (17.9) tampoco es resoluble, pues no hemos demostrado todavía que toda solución de esta ecuación es la solución del problema de contorno. Procedamos al estudio de esta cuestión.

LEMA II. *La ecuación integral de Fredholm homogénea* (17.9) *es insoluble.*

Supongamos que la ecuación integral de Fredholm homogénea (17.9) tiene la solución $\Phi^-(t)$ distinta de cero. Según esta solución construyamos una función nueva $\Phi^+(t) = \Phi^-[\beta(t)]$, donde $\beta(t)$ es la función inversa a $\alpha(t)$ ($\beta[\alpha(t)] \equiv t$). A continuación, sirviéndonos de las fórmulas (17.5), construyamos dos funciones analíticas $\Psi^+(z)$, $\Psi^-(z)$.

De la ecuación integral (17.9) se infiere

$$\Psi^+(t) = \Psi^-[\alpha(t)]$$

o bien

$$\Psi^+[\beta(t)] = \Psi^-(t), \tag{17.10}$$

para la condición adicional $\Psi^-(\infty) = 0$.

La función $\beta(t)$, al igual que $\alpha(t)$, aplica el contorno sobre sí misma. Por eso, el problema (17.10) es del mismo tipo que el (17.4), y, por lo tanto, en virtud del lema I, $\Psi^+(z) = \Psi^-(z) \equiv 0$.

---

[1]) Llamaremos, como antes, insolubles el problema de contorno homogéneo o la ecuación integral homogénea, si éstos no tienen ninguna otra solución, a excepción de trivial nula.

De lo último se deduce, si se toman en consideración las fórmulas (17.6), (17.7), que las funciones $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ son valores de contorno de unas funciones, analíticas en los dominios D^+, D^-, respectivamente. De aquí fluye que las funciones $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$ constituyen la solución del problema de contorno (17.4) y, según el mismo lema I, son idénticamente iguales a cero.

Por consiguiente, $\Phi^-(t) \equiv 0$, lo que se trataba de demostrar.

17.3. Problema de salto dado. Examinemos, ahora, el problema de contorno

$$\Phi^+[\alpha(t)] - \Phi^-(t) = g(t). \tag{17.3}$$

Teniendo en cuenta las aplicaciones ulteriores, generalicemos algo el planteamiento del problema, buscando su solución en la clase de funciones que admiten en el infinito el polo de orden prefijado n.

A base de las fórmulas (4.11)—(4.13), las condiciones analíticas en este caso, se escribirán así

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\Phi^+(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi^+(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = 0, \\ \frac{1}{2}\Phi^-(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi^-(\tau)}{\tau - t}\,d\tau - P_n(t) = 0, \end{aligned} \tag{17.11}$$

donde $P_n(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n$ es un polinomio que representa la parte principal de la función $\Phi^-(z)$ en el infinito.

Introduciendo, por analogía con lo anterior, una función analítica a trozos

$$\begin{aligned} \Psi^+(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi^-(\tau)}{\tau - z}\,d\tau - P_n(z), \\ \Psi^-(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi^+(\tau)}{\tau - z}\,d\tau, \end{aligned} \tag{17.12}$$

escribamos las condiciones (17.11) en forma de igualdades dobles

$$\begin{aligned} \Psi^+(t) &= \frac{1}{2}\Phi^-(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi^-(\tau)}{\tau - t}\,d\tau - P_n(t) = 0, \\ \Psi^-(t) &= -\frac{1}{2}\Phi^+(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi^+(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = 0. \end{aligned} \tag{17.13}$$

Procediendo de una manera igual que en el p. 17.2, llegaremos a una ecuación de Fredholm no homogénea respecto de $\Phi^-(t)$:

$$\Psi^+(t) - \Psi^-[\alpha(t)] \equiv$$
$$\equiv \Phi^-(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t}\right]\Phi^-(\tau)\,d\tau - P_n(t) +$$
$$+ \frac{1}{2}g(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)\,\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}\,d\tau = 0. \quad (17.14)$$

La correspondiente ecuación homogénea coincide con la ecuación (17.9), la cual, de acuerdo con el lema II, es insoluble. Por consiguiente, la ecuación (17.14) es resoluble para cualquier miembro segundo (véase a continuación el p. 20.2).

Sea $R(t, \tau)$ una resolvente de la ecuación (17.14). En este caso, como se sabe, la solución de dicha ecuación puede ser representada en la forma

$$\Phi^-(t) = g_1(t) + P_n(t) + \int_L R(t, \tau)\,[g_1(\tau) + P_n(\tau)]\,d\tau, \quad (17.15)$$

donde

$$g_1(t) = -\frac{1}{2}g(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)\,\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}\,d\tau, \quad (17.16)$$

No es difícil demostrar que para $g(t)$ que satisface la condición de Hölder la solución de la ecuación (17.14) también satisface esta condición. En efecto, la resolvente $R(t, \tau)$ de la ecuación puede representarse, según se conoce, como una suma de núcleos iterativos. La iteración de los núcleos no singulares mejora las propiedades de los mismos, por lo cual las propiedades funcionales de la resolvente son las mismas que del núcleo. En el § 5 hemos demostrado que una integral singular con núcleo de Cauchy transforma las funciones, que satisfacen la condición de Hölder, en sí mismas. Esto es justo con mayor razón para una integral con la singularidad débil[1]).

Razonando igual que en la demostración del lema II, llegamos a que la solución de la ecuación (17.14) es solución del problema de contorno (17.3). De la condición de contorno (17.3) determinemos el valor de contorno de $\Phi^+(t)$:

$$\Phi^+(t) = \Phi^-[\beta(t)] + g[\beta(t)] \quad (\beta[\alpha(t)] \equiv t), \quad (17.17)$$

después de lo cual construyamos las funciones $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$, sirviéndonos de las fórmulas de Cauchy.

Así pues, hemos obtenido el siguiente teorema.

[1]) De hecho, los núcleos de este tipo mejoran las propiedades de la función.

TEOREMA. *El problema del salto* (17.3) *en la clase de funciones, que tienen en el infinito la parte principal prefijada, es resoluble incondicional y unívocamente.*

Se podría fácilmente demostrar que al considerar arbitrarios los coeficientes del polinomio $P_n(z)$, la ecuación tendría $n+1$ soluciones linealmente independientes[1]).

17.4. Problema homogéneo de índice cero. Sea

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\,\Phi^-(t) \qquad (G(t) \neq 0). \tag{17.1}$$

Buscaremos la solución que satisface la condición $\Phi^-(\infty) = 1$. Procediendo igual que en el p. 14.3, se puede mostrar que en el caso $\varkappa = 0$ la solución no nula $\Phi^\pm(z)$ no se reduce a nulo en ningún punto, de suerte que las funciones $\ln \Phi^\pm(z)$ serán analíticas y uniformes. Hallando por logaritmos la correlación (17.1), obtenemos

$$\ln \Phi^+[\alpha(t)] - \ln \Phi^-(t) = \ln G(t).$$

Para la función analítica a trozos $\Gamma(z) = \ln \Phi(z)$ obtendremos la condición de contorno de tipo (17.3) con la condición adicional $\Gamma(\infty) = 0$.

La expresión explícita de las funciones $\Gamma^\pm(t)$ se da mediante las fórmulas (17.15), (17.17), en las cuales hay que poner $g(t) = \ln G(t)$ y $P_n(t) \equiv 0$.

Por consiguiente, el problema tiene la única solución que se determina mediante las fórmulas

$$\Phi(z) = e^{\Gamma(z)};\ \Gamma^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Gamma^\pm(\tau)}{\tau - z}\,d\tau, \tag{17.18}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^-(t) &= g_1(t) + \int R(t,\tau)\,g_1(\tau)\,d\tau, \\ \Gamma^+(t) &= \Gamma^-[\beta(t)] + \ln G[\beta(t)], \end{aligned} \tag{17.19}$$

donde $g_1(t)$ se define con la fórmula (17.16) para $g(t) = \ln G(t)$, mientras que $R(t, \tau)$ es la resolvente de la ecuación integral (17.14).

Resolvamos un problema particular que nos hará falta en lo sucesivo. Hállese una función analítica a trozos $\gamma^\pm(z)$ ($\gamma^-(\infty) = 1$), según la condición de contorno

$$\gamma^+[\alpha(t)] = \frac{1}{\alpha'(t)}\,\gamma^-(t). \tag{17.20}$$

Demostremos que $\alpha'(t)$ tiene el índice cero. Examinemos la razón $\frac{\alpha(\tau)-\alpha(t)}{\tau - t}$. Cuando el punto τ recorre el contorno L, el numerador y el denominador reciben un incremento igual a π.

[1]) Si el problema con traslación se resuelve directamente, sin reducirlo al de Riemann, este hecho se toma por base para el cálculo del número de soluciones linealmente independientes del problema.

El incremento del argumento de una fracción es nulo cualesquiera que sean t y τ desiguales entre sí. Pasando al límite para $\tau \to t$, obtendremos la función buscada. Además, conocemos que $\alpha'(t) \neq 0$. Por consiguiente, el problema (17.20) es resoluble incondicional y unívocamente.

17.5. Sobre la reducción del problema con traslación al problema de Riemann ordinario [1]). La profunda analogía que existe entre el problema con traslación y el problema de contorno de Riemann ordinario lleva a la idea de que entre dichos problemas debe haber una relación directa. Resulta que esta relación puede ser realmente establecida. Para ello es suficiente realizar una aplicación conforme biyectiva de los dominios $D^{\pm}$ sobre dos nuevos dominios $D_1^{\pm}$ que están divididos por un contorno común y completan uno a otro hasta el plano entero de tal modo que los puntos t y $\alpha(t)$ del contorno de partida L pasen a un mismo punto del nuevo contorno L_1. Después podemos, cambiando las variables, reducir el problema con traslación al problema de Riemann ordinario. Lo indicado se logra fundamentar a base de la resolución efectuada anteriormente del problema del salto y del problema homogéneo de índice cero.

Comencemos por la búsqueda de la aplicación conforme mencionada más arriba.

Resolvamos un problema auxiliar de salto nulo

$$\omega^+[\alpha(t)] - \omega^-(t) = 0 \qquad (17.4')$$

a condición de que $\omega^-(z)$ tiene en el infinito el polo simple:

$$\omega^-(z) = z + c_0 + \frac{c_1}{z} + \ldots \qquad (17.21)$$

Compongamos la ecuación integral del problema. Suponiendo en (17.14), $g(t) = 0$, $P_n(t) = t$ y $\Phi^-(t) = \omega^-(t)$, obtendremos la ecuación

$$\omega^-(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t}\right]\omega^-(\tau)\,d\tau = t, \qquad (17.22)$$

que es resoluble incondicional y unívocamente. Al determinar de aquí $\omega^-(t)$, y de la condición de contorno (17.4'), $\omega^+(t) = \omega^-[\beta(t)]$, obtendremos, según la fórmula de Cauchy, las funciones buscadas $\omega^{\pm}(z)$.

Sea $\sigma(t)$ una función inversa a $\omega^-(t)$ ($\omega^-[\sigma(t)] \equiv t$). Sustituyendo t en (17.4') por $\sigma(t)$, tendremos idénticamente

$$\omega^+\{\alpha[\sigma(t)]\} \equiv t. \qquad (17.23)$$

[1]) El procedimiento de reducción del problema con traslación al problema de contorno de Riemann está indicado por G. F. Mandzhavidze y B. V. Jvedelidze en la breve observación a la obra 1).* Sobre $\alpha(t)$ se imponía la condición de existencia de la segunda derivada de la clase de Hölder. El fundamento del procedimiento expuesto se ha tomado de la obra I. B. Simonenko 3)*.

Introduzcamos una función analítica a trozos $\Phi_1(z)$, empleando las igualdades

$$\Phi^+(z) = \Phi_1^+[\omega^+(z)], \quad \Phi^-(z) = \Phi_1^-[\omega^-(z)]. \qquad (17.24)$$

En las funciones nuevas la condición de contorno del problema con traslación (17.2) se escribirá así

$$\Phi_1^+\{\omega^+[\alpha(t)]\} = G(t)\,\Phi_1^-[\omega^-(t)] + g(t).$$

Al poner aquí $t = \sigma(t_1)$, tendremos

$$\Phi_1^+\{\omega^+[\alpha(\sigma(t_1))]\} + G[\sigma(t_1)]\,\Phi_1^-(t_1) + g[\sigma(t_1)].$$

Tomando en consideración la identidad (17.23) y denotando $G_1 = G$, $g_1 = g$, obtendremos el problema de contorno de Riemann

$$\Phi_1^+(t) = G_1(t)\,\Phi_1^-(t) + g_1(t). \qquad (17.25)$$

Así pues, el problema con traslación se ha reducido a un problema de contorno de Riemann ordinario. Para la resolución total de la cuestión hace falta demostrar, además, la equivalencia de ambos problemas, es decir, mostrar que a cada solución del problema con traslación (17.2) las correlaciones (17.24) le ponen en correspondencia cierta solución del problema de Riemann (17.25), y viceversa.

Supongamos que las funciones $\omega^{\pm}(z)$, analíticas en los dominios $D^{\pm}$, aplican los últimos sobre los dominios $D_1^{\pm}$, limitados, respectivamente, por los contornos $L_1^{\pm}$. Demostremos lo siguiente.

1°. Los dominios $D_1^{\pm}$ están privados de puntos comunes interiores y están separados por la frontera común L_1, completando uno al otro hasta un plano entero.

2°. La correspondencia de los dominios $D^{\pm}$, $D_1^{\pm}$ es biunívoca.

DEMOSTRACIÓN. Los contornos $L_1^{\pm}$ se definen, respectivamente, por las ecuaciones

$$\xi = \omega^+(t), \quad \zeta = \omega^-(t) \qquad (t \in L).$$

Pero, en virtud de la condición de contorno

$$\omega^-(t) = \omega^+[\alpha(t)] = \omega^+(t_1).$$

Al recorrer t una vez el contorno L, $t_1 = \alpha(t)$ también lo recorrerá una vez y en el mismo sentido. Por consiguiente, el contorno L_1^- coincide con el L_1^+. Designémoslo simplemente con L_1.

Para establecer la correspondencia biunívoca de los dominios, basta probar que esta propiedad es válida para los contornos; entonces, en virtud de las propiedades generales de la aplicación conforme[1]), lo mismo será válido también para los dominios.

Demos a conocer previamente que los valores de contorno de la solución del problema de contorno (17.4′) tienen derivada, que

[1]) Véase, por ejemplo, [22], 3, parte 2.

satisface la condición de Hölder. Examinemos una igualdad que se obtiene por la derivación formal[1]) de la condición de contorno (17.4'):

$$\alpha'(t)\,\gamma^+[\alpha(t)] = \gamma^-(t) \qquad \left(\gamma(z) = \frac{d\omega}{dz}\right). \tag{17.26}$$

El problema de contorno (17.26) ha de ser resuelto, en vista de la igualdad (17.21), bajo la condición $\gamma^-(\infty) = 1$. El último problema coincide, de hecho, con el (17.20), resuelto en el punto 17.4. Por ello, su solución existe y $\gamma^{\pm}(t)$ satisface la condición de Hölder.

Pasemos a la resolución del problema de partida (17.4'), empleando la integración. Sólo tendremos que convencernos de que la integración no introduce un término logarítmico, razón por la cual hemos de demostrar que el residuo respecto a un punto infinitamente alejado es nulo. En efecto,

$$\int_L \gamma^-(t)\,dt = \int_L \alpha'(t)\,\gamma^+[\alpha(t)]\,dt = \int_L \gamma^+(t_1)\,dt_1 = 0.$$

Integrando $\gamma(z)$ y escogiendo de modo correspondiente una constante arbitraria llegaremos a la solución del problema (17.4'), la cual, por lo tanto, de acuerdo con lo demostrado, tendrá en el contorno una derivada, que satisface la condición de Hölder.

Pasemos ahora a la parte principal de la demostración. Admitamos lo contrario, es decir, que para $t_1 \neq t_2$ se tiene

$$\omega^-(t_1) = \omega^-(t_2) = \omega_0.$$

Examinemos las diferencias $\omega_1^{\pm}(z) = \omega^{\pm}(z) - \omega_0$. Las funciones $\omega_1^{\pm}(z)$ satisfacen la condición de contorno (17.4') y para ellas se verifican las igualdades

$$\omega_1^-(t_1) = \omega_1^-(t_2) = \omega_1^+[\alpha(t_1)] = \omega_1^+[\alpha(t_2)] = 0.$$

Introduzcamos las funciones que en el contorno no se anulan:

$$\omega_2^-(z) = \frac{\omega_1^-(z)}{(z-t_1)(z-t_2)}, \qquad \omega_2^+(z) = \frac{\omega_1^+(z)}{[z-\alpha(t_1)][z-\alpha(t_2)]}. \tag{17.27}$$

Expresando las funciones $\omega_1^{\pm}(t)$ en la condición de contorno (17.4') mediante $\omega_2^{\pm}(t)$, llegaremos a la siguiente condición de contorno:

$$\omega_2^+[\alpha(t)] = \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{[\alpha(t)-\alpha(t_1)][\alpha(t)-\alpha(t_2)]}\,\omega_2^-(t).$$

Como el índice del coeficiente es nulo[2]) y, en virtud de (17.27) $\omega^-(\infty) = 0$, entonces, conforme al p. 17.4, $\omega_2^{\pm} \equiv 0$. De aquí

[1]) Aquí no hace falta argumentar la legitimidad de derivación, puesto que esta operación sirve sólo de razonamiento de inducción. En todos los razonamientos (17.26) puede tomarse por igualdad de partida.

[2]) Véanse los razonamientos al final del p. 17.4.

$\omega^{\pm}(z) = \omega_0 = \text{const}$, lo que es imposible, puesto que $\omega^{-}(z)$ en el infinito debe tener el polo. La uniformidad de la aplicación resulta pues plenamente demostrada.

El hecho establecido de que el problema con traslación se reduce al problema de Riemann permite enunciar el siguiente resultado.

TEOREMA. *El problema homogéneo con traslación tiene, para* $\varkappa \geqslant 0$, $\varkappa + 1$ *soluciones linealmente independientes. El problema no homogéneo es incondicionalmente resoluble y su solución depende linealmente de* $\varkappa + 1$ *constantes arbitrarias. Cuando* $\varkappa \leqslant -1$, *el problema homogéneo es insoluble y para la resolubilidad del problema no homogéneo se requiere que se cumplan* $-\varkappa - 1$ *condiciones.*

Ha de ser notada la importancia de principio de aquel hecho demostrado que los valores de contorno de la solución del problema (17.4′) tienen derivadas que satisfacen la condición de Hölder. De aquí se desprende que si en el problema inicial con traslación el contorno L era una curva de Liapunov, entonces, siendo este problema reducido al de Riemann ordinario, el contorno L_1 de este último será de la misma clase. Partiendo de este hecho, todos los resultados referentes a la ampliación de la clase de coeficientes, conocidos para el problema de Riemann (véase el p. 16.3), pueden ser extendidos sin argumentación adicional al problema con traslación.

El método aquí empleado que con ayuda de aplicación conforme reduce la condición de contorno, la cual liga los valores límites de funciones buscadas en diferentes puntos del contorno (problema con traslación), a otra condición de contorno que liga los valores límites en un punto común (problema de Riemann), lleva el nombre del principio de pegamiento conforme (véase más adelante el p. 53.5).

§ 18. Otros problemas generalizados

18.1. Planteamiento del problema. El problema considerado en el párrafo 17 admite una generalización sencilla. En lugar del requisito de que la función $\alpha(t)$ aplique el contorno L sobre sí misma, se puede admitir que ella aplica L sobre cierto otro contorno L_1. La teoría expuesta puede ser extendida, con unos cambios insignificantes, también en este caso. Este puede reducirse también al caso ya examinado con ayuda de la aplicación conforme (L. I. Chibrikova y V. S. Rogozhin 1)*).

A la par con los valores límites de las mismas funciones analíticas, se pueden introducir en la condición de contorno sus valores conjugados. Observemos que los problemas cuyas condiciones de contorno contienen funciones conjugadas a unas analíticas, surgen con frecuencia en las cuestiones de carácter aplicado. Se examinan también unos problemas con la condición de que una función $\alpha(t)$

aplica el contorno L sobre sí misma, cambiándose en éste el sentido del recorrido.

Enunciaremos cinco problemas de contorno del tipo mencionado suponiendo que L es un contorno cerrado simple de Liapunov, y que $G(t)$ y $g(t)$ son las funciones que satisfacen las mismas condiciones que se indicaron en el § 17.

PROBLEMA I. Hállense la función $\Phi^+(z)$, analítica en D^+, y la función $\Phi^-(z)$, analítica en D^-, según la condición de contorno dada en L

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\,\overline{\Phi^-(t)} + g(t),$$

donde $\alpha(t)$ cambia el sentido del recorrido.

PROBLEMA II. Hállense las funciones $\Phi_1^+(z)$ y $\Phi_2^+(z)$, analíticas en el dominio D^+, que satisfacen en L la condición de contorno

$$\Phi_1^+[\alpha(t)] = G(t)\,\Phi_2^+(t) + g(t),$$

con la particularidad de que $\alpha(t)$ cambia el sentido del recorrido.

PROBLEMA III. Hállense las funciones $\Phi_1^+(z)$ y $\Phi_2^+(z)$, analíticas en el dominio D^+, que satisfacen en L la condición de contorno

$$\Phi_1^+[\alpha(t)] = G(t)\,\overline{\Phi_2^+(t)} + g(t),$$

donde $\alpha(t)$ mantiene inalterables el sentido del recorrido.

PROBLEMA IV. Hállese la función $\Phi^+(z)$, analítica en el dominio D^+, que en el contorno L satisface la condición de contorno

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\,\Phi^+(t) + g(t),$$

con la particularidad de que $\alpha(t)$ cambia el sentido del recorrido y se somete a la condición $\alpha[\alpha(t)] \equiv t$ (problema de Carleman).

PROBLEMA V. Hállese la función $\Phi^+(z)$, analítica en el dominio D^+, que satisface en L la condición de contorno

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\,\overline{\Phi^+(t)} + g(t),$$

donde $\alpha(t)$ mantiene inalterable el sentido del recorrido y se somete a la condición $\alpha[\alpha(t)] \equiv t$ (problema de Hilbert con traslación).

Los problemas I—III pueden reducirse al problema, examinado en el § 17, mediante la aplicación conforme del dominio D^+ sobre el círculo unitario con la sustitución sucesiva de las funciones incógnitas y las variables (L. I. Chibrikova y V. S. Rogozhin 1)*). Los problemas IV y V verán considerados en los pp. 18.2 y 18.3.

Observemos que al resolver los problemas I—V una importancia esencial la tiene el sentido que se establece en el contorno L por la función $\alpha(t)$. Si admitimos que en las condiciones de contorno de estos problemas $\alpha(t)$ establece en L una orientación opuesta a la indicada, entonces surgen unos problemas esencialmente nuevos, los cuales pueden tener un conjunto infinito de soluciones lineal-

mente independientes. A título de ejemplo puede servir el problema $\Phi^+(-t) = \Phi^+(t)$, $|t| = 1$, cuya solución es una función analítica par arbitraria en $|z| < 1$. Esta condición de contorno no pertenece al tipo IV, puesto que la función $\alpha(t) = -t$ conserva en $|t| = 1$ el sentido del recorrido. En el caso general los problemas de este tipo se pueden reducir a las ecuaciones integrales de Fredholm de primera especie (E. I. Zveróvich y G. S. Litvinchuk 1)*).

Los problemas con traslación más complejos, en cuyas condiciones de contorno se conjuegan más de dos valores límites de las funciones buscadas, serán estudiados en el capítulo V.

18.2. Problema de contorno de Hilbert con traslación [1]). Examinemos el problema de contorno V:

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\,\overline{\Phi^+(t)} + g(t), \tag{18.1}$$

donde $\alpha(t)$ conserva el sentido del recorrido y satisface la condición

$$\alpha[\alpha(t)] \equiv t \quad \text{(condición de Carleman)}. \tag{18.2}$$

Suponemos que $\alpha(t)$ no se reduce idénticamente a t.

En la condición de contorno sustituyamos t por $\alpha(t)$, y, tomando en consideración (18.2), pasemos a los valores conjugados complejos. Eliminando de la igualdad obtenida y de (18.1) $\Phi^+[\alpha(t)]$, llegamos a la correlación

$$[G(t)\,\overline{G[\alpha(t)]} - 1]\,\overline{\Phi^+(t)} + \overline{G[\alpha(t)]}\,g(t) + \overline{g[\alpha(t)]} = 0. \tag{18.3}$$

Esta será satisfecha en dos casos:

1) La expresión $\dfrac{G[\alpha(t)]\,\overline{g(t)} + g[\alpha(t)]}{1 - G[\alpha(t)]\,\overline{G(t)}}$ es el valor de contorno de la función analítica en D^+. En este caso la propia función buscada se define en seguida según su valor de contorno por una integral de Cauchy.

2) La correlación (18.3) se degenera en una identidad. Por consiguiente,

$$\overline{G[\alpha(t)]}\,G(t) = 1,\ \overline{G[\alpha(t)]}\,g(t) + \overline{g[\alpha(t)]} = 0. \tag{18.4}$$

En lo sucesivo resolucionaremos el problema (18.1) suponiendo que las condiciones (18.4) están cumplidas.

Al resolverlo vamos a apoyarnos en una analogía de gran alcance con la solución del problema de contorno con traslación, dada en el § 17. Con la ayuda de una transformación conforme apliquemos previamente el dominio D^+ sobre el círculo unitario. De este modo,

[1]) Este punto está escrito a base de la obra de E. G. Jasabov [2])*. Obsérvese que el término «Problema de Hilbert con traslación» será justificado en los §§ 29, 30, donde el problema considerado aquí será resuelto para $\alpha(t) \equiv t$. El caso dado no se ha analizado en este punto.

sin restringir la generalidad del problema podemos considerar que D^+ es un círculo unitario.

Al igual que en el § 17, empezaremos por la resolución del problema de salto nulo.

LEMA. *La solución general de los problemas*

$$\Phi^+ [\alpha (t)] \pm \overline{\Phi^+ (t)} = 0 \tag{18.5}$$

es una constante arbitraria que es real para el signo inferior e imaginaria pura, para el signo superior.

Efectivamente, $\overline{\mp\Phi^+ (t)}$ puede considerarse como un valor de contorno de las funciones $\Psi^- (z) = \overline{\mp\Phi^+ \left(\frac{1}{z}\right)}$ que son analíticas en D^- (definición adicional según simetría (p. 12.1)). Por lo tanto, los problemas (18.5) se los puede considerar como el problema (17.4) sin la condición complementaria de reducción en el infinito a cero. De aquí se sigue el resultado del lema.

Examinemos a continuación el problema de salto dado

$$\Phi^+ [\alpha (t)] - \overline{\Phi^+ (t)} = g (t). \tag{18.6}$$

En este caso ($G (t) \equiv 1$) la primera de las condiciones de resolubilidad (18.4) se transformará en la identidad, mientras que la segunda nos dará la condición necesaria de resolubilidad del problema (18.6):

$$g [\alpha (t)] + \overline{g (t)} = 0. \tag{18.4'}$$

Probemos que es también suficiente. Busquemos la solución en forma de una integral de tipo de Cauchy

$$\Phi (z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi [\alpha (\tau)]}{\tau - z} d\tau, \tag{18.7}$$

cuya densidad satisface la condición

$$\varphi [\alpha (t)] + \overline{\varphi (t)} = 0. \tag{18.8}$$

Al pasar en (18.7), según las fórmulas de Sojotski, a los valores límites en el contorno y teniendo en cuenta (18.8), llegaremos de (18.6) a una ecuación integral

$$T\varphi \equiv \varphi (t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[\frac{\alpha' (\tau)\, \tau' (\sigma)}{\alpha (\tau) - \alpha (t)} - \frac{\overline{\tau' (\sigma)}}{\overline{\tau} - \overline{t}} \right] \varphi (\tau)\, d\sigma = g (t). \tag{18.9}$$

El núcleo de la ecuación puede ser representado en la forma

$$\tau' (\sigma) \left[\frac{\alpha' (\tau)}{\alpha (\tau) - \alpha (t)} - \frac{1}{\tau - t} \right] + \left[\frac{\tau' (\sigma)}{\tau - t} - \frac{\overline{\tau' (\sigma)}}{\overline{\tau} - \overline{t}} \right]. \tag{18.10}$$

En la circunferencia unitaria $\tau = e^{i\sigma}$, $\tau' = i\tau$, $\overline{\tau} = 1/\tau$, $\overline{t} = 1/t$, por lo cual el segundo sumando es una constante igual a i; el primer sumando, de acuerdo con los resultados del p. 17.2, es un núcleo fredholmiano; por consiguiente, la ecuación (18.9) es de Fredholm.

Se demuestra que la ecuación homogénea, correspondiente a (18.9), es insoluble y, consecuentemente, la ecuación no homogénea (18.9) es resoluble incondicional y unívocamente. Luego se establece que todas las soluciones satisfacen la condición (18.8). Los razonamientos son parecidos a los realizados en los pp. 17.2, 17.3 y por esta razón no los damos aquí. Teniendo en cuenta el lema I, obtenemos el siguiente teorema:

TEOREMA. *La solución general del problema de salto* (18.6) *se da mediante la fórmula*

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi[\alpha(\tau)]}{\tau - z} d\tau + a_0, \tag{18.11}$$

donde $\varphi(t)$ *es la solución de la ecuación integral* (18.9), *y* a_0, *una constante real.*

El siguiente paso consiste en la resolución del problema de salto (18.6) en la clase de funciones que tienen el polo de cierto orden m en el centro del círculo. Buscamos la función en la forma

$$\Phi^+(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{2k-1} + ia_{2k}}{z^k} + \Psi^+(z). \tag{18.12}$$

Sustituyendo la última expresión en (18.6) y designando

$$h_{2k-1} = \frac{1}{\bar{t}^k} - \frac{1}{\alpha^k(t)}, \quad h_{2k} = -\frac{i}{\bar{t}^k} - \frac{i}{\alpha^k(t)},$$

obtendremos la siguiente condición de contorno para determinar $\Psi^+(z)$:

$$\Psi^+[\alpha(t)] - \overline{\Psi^+(t)} = g(t) + \sum_{k=1}^{2m} a_k h_k(t).$$

Sea $\varphi(t)$ la solución de la ecuación integral (18.9), y sean $\varphi_{2k-1}(t)$, $\varphi_{2k}(t)$ las soluciones de la misma ecuación cuyos segundos miembros son h_{2k-1}, h_{2k}, respectivamente; entonces, según las fórmulas (18.11), (18.12), las soluciones del problema de contorno serán

$$\Phi_0(z) = 1, \quad \Phi_{2k-1}(z) = \frac{1}{z^k} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi_{2k-1}[\alpha(\tau)]}{\tau - z} d\tau,$$

$$\Phi_{2k}(z) = \frac{i}{z^k} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi_{2k}[\alpha(\tau)]}{\tau - z} d\tau.$$

La solución general se obtiene mediante la fórmula

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi[\alpha(\tau)]}{\tau - z}\, d\tau + \sum_{k=0}^{2\varkappa} a_k \Phi_k(z). \qquad (18.13)$$

Pasemos a la resolución del problema homogéneo

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\,\overline{\Phi^+(t)}. \qquad (18.14)$$

Aquí se debe satisfacer la condición de resolubulidad

$$G[\alpha(t)]\cdot\overline{G(t)} = 1. \qquad (18.4'')$$

Si es que $\varkappa = \operatorname{Ind}(G(t) = 0$, entonces los razonamientos son sumamente análogos a los del p. 17.4. Al tomar el índice de ambos miembros de la condición de contorno, con la ayuda del principio generalizado de argumento (12.2) nos convencemos de que la solución no tiene ceros en ningún punto del plano. Hallemos por logaritmos (18.14) y denotemos $\ln \Phi^+(z) = \Gamma^+(z)$. Teniendo en cuenta que $\ln \overline{\Phi} = \overline{\ln \Phi}$, obtendremos el problema de salto

$$\Gamma^+[\alpha(t)] - \overline{\Gamma^+(t)} = \ln G(t), \qquad (18.15)$$

cuya solución se define mediante la fórmula (18.11). De aquí la solución general del problema (18.14) se representa por la fórmula $\Phi^+(z) = ce^{\Gamma^+(z)}$, donde c es una constante real.

Pasando al caso de índice cualquiera, probemos primero, con la ayuda de la condición (18.4''), que el índice del problema es necesariamente un número par.

Sea t_1 un punto arbitrario de la circunferencia L, y $t_2 = \alpha(t_1)$. Estos puntos parten la circunferencia en dos partes, L_1 (de t_1 a t_2) y L_2 (de t_2 a t_1) que poseen la propiedad siguiente: cuando el punto t recorre L_1, el punto $\alpha(t)$ recorre L_2, y viceversa. De la igualdad (18.4'') se infiere que

$$\arg G[\alpha(t)] - \arg G(t) = 2\pi m, \qquad (18.4''')$$

de modo que $\arg G[\alpha(t)]$ y $\arg G(t)$ difieren en una constante, razón por la cual

$$[\arg G[\alpha(t)]]_{L_1} = [\arg G(t)]_{L_1}$$

o, que es lo mismo,

$$[\arg G(t)]_{L_2} = [\arg G(t)]_{L_1}.$$

Al sumar $[\arg G(t)]_{L_1}$ a los ambos miembros de la última igualdad, obtendremos

$$\pi\varkappa = [\arg G(t)]_{L_1},$$

donde $\varkappa = \operatorname{Ind} G(t)$. Por otra parte, de (18.4''') fluye que $[\arg G(t)]_{L_1} = \arg G(t_2) - \arg G(t_1) = 2\pi m$, y entonces $\varkappa = 2m$ es el número par.

Representemos $G(t)$ en la forma $G(t) = \dfrac{\alpha^{\frac{\varkappa}{2}}(t)}{t^{\frac{\varkappa}{2}}} G_0(t)$. Es evidente que $\operatorname{Ind} G_0(t) = 0$. Hagamos uso de la solución, obtenida anteriormente, del problema de índice nulo

$$X_0[\alpha(t)] = G_0(t)\,\overline{X_0(t)}, \quad X_0(z) = e^{\Gamma_0(z)},$$
$$\Gamma_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_0[\alpha(\tau)]}{\tau - z}\,d\tau, \quad T\varphi_0 = \ln G_0.$$

La función $X(z) = z^{\frac{\varkappa}{2}} X_0(z)$ satisface, evidentemente, la condición de contorno (18.14), por lo que tendremos $G(t) = \dfrac{X^+(t)}{X^-(t)}$, y la condición de contorno (18.14) puede representarse en la forma

$$\frac{\Phi^+[\alpha(t)]}{X^+[\alpha(t)]} = \left(\frac{\overline{\Phi^+(t)}}{X^+(t)}\right). \qquad (18.14')$$

Examinemos dos casos posibles:

1) $\varkappa \geqslant 0$. Aquí, $\dfrac{\Phi^+(z)}{\overline{X^+(z)}}$ tiene en el origen de coordenadas el polo cuyo orden no es superior a $\varkappa/2$. Empleando la solución (18.3) del problema de salto en la clase de funciones con singularidad polar (para $g(t) \equiv 0$, $\varphi(t) \equiv 0$), obtendremos la solución del problema (18.14) en la forma

$$\Phi(z) = X(z) \sum_{k=0}^{\varkappa} a_k \Phi_k(z).$$

Por consiguiente, el problema tiene $\varkappa + 1$ soluciones linealmente independientes.

2) $\varkappa < 0$. En este caso, obviamente, el problema homogéneo (18.14) no tiene soluciones que sean distintos de cero.

Pasemos a la resolución del problema no homogéneo inicial (18.1). Consideramos que las condiciones de resolubilidad (18.4) están cumplidas. La resolución es plenamente análoga a la del problema de Riemann expuesta en el § 14. Es por esto que no nos detendremos en detalles.

Con ayuda de la función canónica representemos la condición de contorno en la forma

$$\frac{\Phi^+[\alpha(t)]}{X^+[\alpha(t)]} - \left(\frac{\overline{\Phi^+(t)}}{X^+(t)}\right) = \frac{g(t)}{X^+[\alpha(t)]}.$$

Utilizando luego la solución del problema de salto en la clase de funciones con singularidad polar, obtendremos la solución en la forma

$$\Phi^+(z) = X^+(z)\,[\Psi^+(z) + \sum_{k=0}^{\varkappa} c_k \Phi_k(z)], \tag{18.16}$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\psi[\alpha(\tau)]}{\tau - z}\,d\tau, \quad T\psi = \frac{g(t)}{X^+[\alpha(t)]}, \tag{18.17}$$

siempre que $\varkappa \geqslant 0$, y

$$\Phi(z) = X(z)\,[\Psi(z) + a_0], \tag{18.18}$$

si $\varkappa < 0$ y el término independiente satisface las condiciones de resolubilidad

$$a_0 + \frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi[\alpha(\tau)]\frac{d\tau}{\tau} = 0, \tag{18.19}$$

$$\int_L \varphi[\alpha(\tau)]\,\tau^{-k}\,d\tau = 0 \quad (k = 2,\ 3,\ \ldots,\ -\varkappa),$$

donde $\varphi(t)$ es la solución de la ecuación $T\varphi = \frac{g(t)}{X^+[\alpha(t)]}$.

18.3. Problema de contorno de Carleman [1]). A título de un ejemplo más consideraremos el problema de contorno de Carleman en el contorno cerrado simple de Liapunov L (véase el p. 18.1, problema IV):

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\,\Phi^+(t) + g(t), \tag{18.20}$$

donde $\alpha(t)$ cambia el sentido del recorrido del contorno y $\alpha[\alpha(t)] \equiv t$. Razonando igual que en el p. 18.2, llegamos a la conclusión de que para nosotros es de interés el caso de que están cumplidas las condiciones

$$G[\alpha(t)]\,G(t) = 1, \quad G(t)\,g[\alpha(t)] + g(t) = 0. \tag{18.21}$$

Probemos que aplicando el método de pegamiento conforme, cercano al descrito en el p. 17.5, el problema de contorno (18.20) puede ser reducido al problema de Riemann en un arco abierto de Liapunov. He aquí el esquema de investigación sin pormenores.

Ante todo se obtiene, igual que en el § 17, una afirmación análoga al lema I de § 17.

LEMA. *Los problemas de contorno*

$$\Phi^+[\alpha(t)] = \lambda\Phi^+(t), \quad \lambda = \pm 1,$$

---

[1]) Este punto, como también el p. 43.4, donde se da por terminada la investigación del problema, está escrito a base de la obra de V. A. Chernetski 1)*.

no tienen otras soluciones salvo una constante arbitraria que, para $\lambda = -1$, *es igual a cero.*

Luego se resuelve el problema auxiliar de salto nulo

$$\omega^+ [\alpha (t)] - \omega^+ (t) = 0 \tag{18.22}$$

en la clase de funciones que poseen el polo simple en cierto punto $z_0 \in D^+$, es decir, en la clase de funciones de la forma

$$\omega^+ (z) = \frac{1}{z - z_0} + \Psi^+ (z), \tag{18.23}$$

donde $\Psi^+ (z)$ es una función analítica en D^+. En vista de (18.23), obtendremos para $\Psi^+ (z)$ la siguiente condición de contorno

$$\Psi^+ [\alpha (t)] - \Psi^+ (t) = \frac{1}{t - z_0} - \frac{1}{\alpha (t) - z_0}. \tag{18.24}$$

La solución del problema de contorno (18.24) se buscará en forma de la integral de tipo de Cauchy

$$\Psi^+ (z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\psi (\tau)}{\tau - z} d\tau, \tag{18.25}$$

cuya densidad satisface la correlación

$$\psi (t) + \psi [\alpha (t)] = 0. \tag{18.26}$$

Al calcular, mediante las fórmulas de Sojotski, $\Psi^+ [\alpha (t)]$ y $\Psi^+ (t)$ y al hacer uso de la condición (18.26), obtendremos la siguiente ecuación integral para determinar $\psi (t)$

$$\psi (t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha' (\tau)}{\alpha (\tau) - \alpha (t)} \right] \psi (\tau) \, d\tau = \frac{1}{\alpha (t) - z_0} - \frac{1}{t - z_0}, \tag{18.27}$$

cuyo núcleo tiene en el punto $\tau = t$ una singularidad de orden inferior a la unidad (véase el p. 17.2) y es, por esto, una ecuación de Fredholm; además, cualquier solución integrable de esta ecuación satisface la condición de Hölder.

Con ayuda de los métodos muy próximos a los usados en los pp. 17.3, 18.1, se demuestra que la ecuación integral homogénea, correspondiente a (18.27) , es insoluble (y, consecuentemente, la ecuación no homogénea es resoluble incondicional y unívocamente) y que también dicha solución satisface la condición (18.26). De aquí, sirviéndose de las fórmulas (18.25) y (18.23), se obtiene la solución del problema de contorno (18.22).

La función $\alpha (t)$ tiene, obviamente, dos puntos fijos, $t = A$ y $t = B$, que dividen el contorno L en dos arcos no coincidentes $L^+ = (A, B)$, $L^- = (B, A)$. La función $\omega^+ (z)$, que es una solución del problema (18.22) con la condición (18.23), aplica el dominio

D^+ sobre el plano con corte L_1 (el corte se define por la ecuación $w = \omega^+(t)$, $t \in L$) y tiene por extremos las imágenes $a = \omega^+(A)$ y $b = \omega^+(B)$ de los puntos fijos de la función $\alpha(t)$. Por razonamientos análogos a los realizados en el p. 17.5, se puede establecer que L_1 es la curva de Liapunov y que la aplicación conforme efectuada por la función $w = \omega^+(z)$ es biunívoca.

Tomemos por el sentido positivo en L_1 aquel que lleva de a hacia b. Entonces para la función $z(w)$, inversa a $w = \omega^+(z)$, tenemos

$$z^+(w) = t, \quad z^-(w) = \alpha(t), \quad w \in L_1, \quad t \in L^+, \tag{18.28}$$

o bien, que es lo mismo (en vista de la condición $\alpha[\alpha(t)] \equiv t$),

$$z^+(w) = \alpha(t), \quad z^-(w) = t, \quad w \in L_1, \quad t \in L^-. \tag{18.29}$$

Utilizando (18.28), para $t \in L^+$ escribamos la condición de contorno (18.20) en la forma

$$\Phi^+[z^-(w)] = G[z^+(w)]\,\Phi^+[z^+(w)] + g[z^+(w)].$$

Al introducir una nueva función

$$\Phi_1(w) = \Phi^+[z(w)], \tag{18.30}$$

analítica en el plano con corte L_1, obtendremos la condición de contorno del problema de Riemann:

$$\Phi_1^-(w) = G[z^+(w)]\,\Phi_1^+(w) + g[z^+(w)]. \tag{18.31}$$

Si hacemos uso de las fórmulas (18.29), se obtendrá

$$\Phi_1^+(w) = G[z^-(w)]\,\Phi_1^-(w) + g[z^-(w)]. \tag{18.32}$$

Las condiciones de contorno (18.31) y (18.32) coinciden, puesto que de las condiciones (18.21) y correlaciones (18.28) se deduce que

$$G[z^+(w)]\,G[z^-(w)] = 1, \quad G[z^+(w)]\,g[z^-(w)] + g[z^+(w)] = 0.$$

De este modo, el problema de Carleman (18.20) en el contorno cerrado L se ha reducido a un problema equivalente de Riemann (18.32) en el contorno abierto L_1. Los problemas de este género serán estudiados en el cap. VI, por lo cual la investigación ulterior del problema en consideración la determinaremos en el p. 43.4.

El método expuesto es aplicable también para resolver problemas en un dominio múltiplemente conexo a la condición de que una función de traslación $\alpha(t)$ aplica biunívocamente cada una de las curvas L_k del contorno sobre sí misma. En el caso más general, cuando $\alpha(t)$ traslada todo el contorno en sí misma, pero de una manera tal que las curvas sueltas del contorno puedan pasar una en la otra, el método de pegamiento conforme resulta insuficiente. Se emplea el así llamado *principio de pegamiento conforme local.*

En este caso para la investigación hemos de atraer la teoría de problemas de contorno en las superficies de Riemann. (Algunos pormenores de este método los daremos en el p. 53.5).

§ 19. Notas históricas

El problema de contorno (14.1), citado aquí como problema de Riemann [1]), se dio a conocer por primera vez en la obra de Riemann sobre ecuaciones diferenciales con coeficientes algebraicos ([21], pág 177). El problema (homogéneo) se enuncia por él para el caso de n pares de funciones buscadas en relación con el problema de la búsqueda de una ecuación diferencial cuyas integrales experimentan, en el recorrido alrededor de unos puntos singulares, la sustitución lineal prefijada (ecuación con el grupo prefijado de monodromía). Esta materia sale de los márgenes de este libro y no vamos a tocarla aquí. A los lectores, que revelan interés hacia esta cuestión, les recomendamos la obra [7].

Riemann no se esforzó para resolver el problema planteado por el mismo. La primera resolución del problema de contorno homogéneo (14.1) la ofreció Hilbert. Empleando las condiciones de que una función compleja arbitraria es el valor de contorno de una función analítica (véase el problema 24*, cap I), Hilbert obtuvo una ecuación integral de Fredholm, la cual la satisface la solución del problema. Analizando esta ecuación, él demostró la alternativa: uno de los dos problemas con el coeficiente $G(t)$ o $\overline{G(t)}$ es resoluble. Los autores que consideraban más tarde el caso general del problema de contorno (Picard [19], Priválov 1)*), seguían el mismo camino de reducción del problema a una ecuación integral, aprovechando a título del aparato matemático las integrales de tipo de Cauchy. En lugar de la alternativa de Hilbert se obtenía aquí la alternativa para los coeficientes $G(t)$ y $\frac{1}{G(t)}$. Este método se utiliza hasta ahora para la resolución del problema de Riemann con varias funciones incógnitas.

Se hallan aparte dos obras en las cuales se consideraba la solución del problema en forma cerrada. Plemelj 1)** muestra de paso que en el caso de ln $G(t)$ uniforme la solución del problema homogéneo puede obtenerse explícitamente en las integrales de tipo de Cauchy. Al resolver la ecuación integral singular con núcleo de Cauchy (véase el cap. III), Carleman 1)** soluciona, entre otras cosas, el problema de Riemann no homogéneo con coeficiente constante $G(t)$ para el caso en que el contorno está representado por un segmento del eje real $[0, 1]$. Los métodos de resolución, empleados por Plemelj y Carleman, son de hecho los mismos que se exponen en el presente capítulo, pero su aplicación está limitada or unos casos muy particulares, donde los rasgos característicos del problema no se ponen de manifiesto y no se utiliza, ante todo, el concepto de índice, el cual, como el lector ya sabe, es una característica fundamental tanto para el propio problema de Riemann, como para sus generalizaciones.

Debe mencionarse también la obra de Wiener y Hopf 1)**, dedicada a la resolución de las ecuaciones integrales singulares de tipo de convolución. Esta ›bra nunca se mencionaba en relación con el problema de Riemann, siendo, no obstante, íntimamente ligada a éste. La resolución de dichas ecuaciones integrales se reduce a un problema del mismo tipo que el problema de contorno de Riemann con la diferencia de que la correlación entre las funciones analíticas se define no en el contorno, sino en los puntos del plano entero (una banda limitada con dos rectas, paralelas al eje Ox). El método de resolución difiere del método de

[1]) Este mismo problema se denomina también « problema de Hilbert», «problema de conjugación lineal», «problema de conjugación», «problema de Hilbert — Priválov», «problema de Riemann — Priválov».

resolución del problema de contorno de Riemann sólo en detalles insignificantes. El concepto de índice aquí también está ausente.

La resolución completa del problema de Riemann para un dominio simplemente conexo, expuesta en una forma más o menos parecida a la dada aquí [1], fue propuesta por el autor en 1936 1). En 1941 B. V. Jvedelidze 1)* generalizó esta resolución para un dominio múltiplemente conexo. Los casos excepcionales del problema de Riemann (§ 15) se han considerado primeramente en las obras del autor 2)*, [6], y luego, en una forma más general, en la obra de L. A. Chíkin 1)*.

Haseman 1)** fue primero en proponer el problema de Riemann con traslación (§ 17). Por un procedimiento análogo al empleado por Hilbert para solucionar el problema de Riemann, Haseman redujo el problema con traslación a la ecuación integral de Fredholm y obtuvo la misma alternativa que se ha obtenido por Hilbert para el problema de Riemann.

La resolución completa del problema de Riemann con traslación, como también de algunas de sus modificaciones y del problema de Carleman, la dio D. A. Kveselava cuya primera obra 1)* data del año 1946. El resumen del material se da en la obra 2)*.

La reducción de los problemas I—III al problema de Riemann con traslación la encontramos en la obra de L.I. Chibrikova y V.S. Rogózhin 1)*. En los últimos quince años la teoría de problemas de contorno con traslación va intensamente desarrollándose. Se ha publicado un gran número de obras originales que se deben a varios autores, en primer lugar, a N. P. Vekua, E. I. Zveróvich, G. S. Litvinchuk, E. G. Jasábov, R. A. Kordzadze y otras, que adelantaron considerablemente dicha teoría.

Las notas históricas sobre el nacimiento y desarrollo de la teoría del problema de contorno de Riemann en los dominios multidimensionales han sido dadas en el texto.

Otra información sobre el problema de Riemann y problemas con traslación la daremos en los capítulos V, VI en relación con sus diferentes generalizaciones.

PROBLEMAS AL CAPITULO II

1*. Demuéstrese que el índice de la función $\xi(s) + i\eta(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant l)$ $(\xi(s+l) = \xi(s),\ \eta(s+l) = \eta(s))$ es igual a la semidiferencia entre el número de los casos cuando la función $\frac{\eta(s)}{\xi(s)}$ se reduce al infinito, pasando de los valores positivos a los negativos, y el número de los casos cuando ella se reduce al infinito, pasando de los valores negativos a los positivos.

Observación. Cauchy, al introducir el concepto de índice, lo definió como diferencia del número de casos cuando la función pasa por el infinito de los valores positivos a los negativos y de los negativos a los positivos. Por consiguiente, el índice en el sentido de Cauchy es igual al índice doble en el sentido de nuestra definición. El concepto de índice de Cauchy es aplicable también para funciones no periódicas. Además, por definición,

$$\operatorname{arctg}\frac{\eta(l)}{\xi(l)} - \operatorname{arctg}\frac{\eta(0)}{\xi(0)} \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}\right)$$

es desechado.

2*. Sean $\xi(t)$, $\eta(t)$ unos polinomios con relación a t $(a \leqslant t \leqslant b)$. Formemos una sucesión

$$\eta,\ \xi,\ -r_1,\ -r_2,\ \ldots,\ -r_{n-1},\ -r_n, \tag{1}$$

[1]) El concepto de función canónica se debe a N. I. Musjelishvili.

donde r_1 es el resto de la división de η por ξ; r_2, el resto de la división de ξ por r_1, etc. Demuéstrese que el índice de la función $\xi(s) + i\eta(s)$ es igual a la semidiferencia del número de cambio de los signos en la sucesión (1).

3*. Sean $\Phi(x, y)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ tres funciones de dos variables independientes x, y que tienen derivadas parciales continuas. Se supone que 1) las funciones Φ, φ, ψ no se reducen a cero simultáneamente, 2) su jacobiano tampoco se reduce a cero, 3) las curvas $\Phi = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$ están cerradas. Los puntos del plano, para los cuales $\varphi, \psi < 0$, se llamarán interiores, mientras que los puntos, donde $\varphi, \psi > 0$, serán exteriores. El paso del dominio exterior al interior se llama entrada y el paso en el sentido opuesto, salida.

La característica de las funciones Φ, φ, ψ — $\chi(\Phi, \varphi, \psi)$, según Kronecker, es la semidiferencia entre los números de puntos de entrada y salida de la curva $\Phi(x, y) = 0$, al atravesarse la curva $\varphi(x, y) = 0$, o, que es los mismo, al atravesarse la curva $\psi(x, y) = 0$. Pruébese que

1) la característica $\chi(\Phi, \varphi, \psi)$ coincide con el índice de la función $G(x + iy) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ a lo largo de la curva $\Phi(x, y) = 0$;

2) la característica no cambia a causa de la permutación cíclica de las funciones Φ, φ, ψ y cambia de signo, al permutarse dos de ellas (N. G. Chetáev, «Características de Kronecker»; Н. Г. Четаев, «Характеристики Кронекера», Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 98, кн. 9, 1938).

Observación. Kronecker ofreció el concepto de característica para el caso general de $n + 1$ funciones de n variables.

Siempre en lo sucesivo el contorno L es una curva cerrada simple que divide el plano en dos dominios: el interior D^+ y el exterior D^-; c_i denotan unas constantes arbitrarias.

4. Resuélvase el problema de contorno de Riemann

$$\Phi^+(t) = \frac{(t-i)(t-2i)}{(t+i)(t+2i)}\Phi^-(t) + \frac{2t}{(t+i)^2(t+2i)(t-i)},$$

considerando que los puntos i, $2i$ pertenecen al dominio D^+, y los puntos $-i$, $-2i$, al dominio D^-.

Respuesta.

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{(z+i)^2(z+2i)} + \frac{c_0 + c_1 z + c_2 z^2}{(z+i)(z+2i)},$$

$$\Phi^-(z) = -\frac{1}{(z-i)^2(z-2i)} + \frac{c_0 + c_1 z + c_2 z^2}{(z-i)(z-2i)}.$$

5. ¿Para qué valor del parámetro a será resoluble el problema de contorno de Riemann

$$\Phi^+(t) = \frac{(t-i)(t-2i)}{(t+i)(t+2i)}\Phi^-(t) + \frac{2t(t-2i)(at+1)}{(t+i)(t+2i)}, \qquad \Phi^-(\infty) = 0,$$

si el contorno L deja el punto $-i$ en el dominio D^+, y los puntos i, $2i$, $-2i$, en D^-? Resuélvase el problema para el valor encontrado de a.

Respuesta.

$$a = -i, \qquad \Phi^+(z) = \frac{-2iz(z-2i)}{z+2i}, \qquad \Phi^-(z) = 0.$$

6. Resuélvase el problema de contorno de Riemann

$$\Phi^+(t) = \frac{t}{\ln\dfrac{t}{t-1}}\Phi^-(t) + \operatorname{sen} t + e^{\frac{1}{t}}, \qquad \Phi^-(\infty) = 0$$

para el contorno L que deja los puntos 0, 1 en el dominio D^+.

Respuesta. $\Phi^+(z) = \operatorname{sen} z + c_0 + c_1 z$,

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{z} e^{\frac{1}{z}} \ln\left(1 - \frac{1}{z}\right) - \left(\frac{c_0}{z} + c_1\right) \ln\left(1 - \frac{1}{z}\right).$$

7. Resuélvase el problema de contorno de Riemann

$$\Phi^+(t) = (t-1)\,\Phi^-(t) + t^2 - 1$$

para las siguientes suposiciones:
a) el punto 1 pertenece a D^+;
b) el punto 1 pertenece a D^-;
c) el punto 1 pertenece a L.
Respuesta.
a) $\Phi^+(z) = z^2 - 1 + c_0 + c_1 z$, $\Phi^-(z) = (z-1)^{-1}(c_0 + c_1 z)$;
b), c) $\Phi^+(z) = z^2 - 1 + c_0(z-1)$, $\Phi^-(z) = c_0$.

8. Resuélvase el problema de contorno de Riemann

$$\Phi^+(t) = (t-1)^{-1}\,\Phi^-(t) + t + (t-1)^{-1}$$

para las mismas suposiciones que en el problema antecedente.
Respuesta.

a), c) $\Phi^+(z) = z$, $\Phi^-(z) = -1$;
b) $\Phi^+(z) = (z-1)^{-1}(z^2 - z + 1 + c_0)$, $\Phi^-(z) = c_0$.

9. Muéstrese que el problema de Riemann

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{(t-1)(t-2)}\,\Phi^-(t) + t + 1 + \frac{1}{t} - \frac{a}{t-3}$$

a la condición de que los puntos 0, 3 pertenecen a D^+, y los puntos 1, 2 se ubican en el contorno, es resoluble sólo para $a = 1$. Dése la solución para este caso.
Respuesta.

$$\Phi^+(z) = z + 1, \quad \Phi^-(z) = 3\,\frac{(z-1)(z-2)}{z(z-3)}$$

10. Resuélvase el problema de contorno de Riemann

$$\Phi^+(t) = \frac{(h-1)t + 3i}{(h+1)t - i}\,\Phi^-(t) + \frac{at + b}{(h+1)t - i}$$

(h es real, distinta de ± 1, $-\infty < t < \infty$).
Respuesta. Para $h < -1$

$$\Phi^+(z) = \frac{a}{2(h+1)} + \frac{b(h+1) + ai}{(h+1)[(h+1)z - i]} + c_0 + \frac{c}{(h+1)z - i},$$

$$\Phi^-(z) = \frac{(h+1)z - i}{(h-1)z + 3i}\left[-\frac{a}{2(h+1)} + c_0 + \frac{c}{(h+1)z - i}\right];$$

para $-1 < h < 1$

$$\Phi^+(z) = \frac{a}{2(h+1)} + c,$$

$$\Phi^-(z) = \frac{(h+1)z - i}{(h-1)z + 3i}\left[\frac{a}{2(h+1)} - \frac{az + b}{(h+1)z - i} + c\right];$$

para $h > 1$

$$\Phi^+(z) = \frac{3a + b(h-1)i}{4h+2},$$
$$\Phi^-(z) = \frac{b(h+1)i - a}{4h+2}.$$

11. Resuélvase el problema de contorno de Riemann

$$\Phi^+(t) = \frac{hi - t}{t + (h-2)i}\Phi^-(t) - \frac{fi}{t+(h-2)i}$$

(h es real, distinta de 0 y 2, $-\infty < t < \infty$).
Respuesta. Para $h < 0$

$$\Phi^+(z) = \frac{f}{2(1-h)}, \quad \Phi^-(z) = -\frac{f}{2(1-h)};$$

para $0 < h < 2$

$$\Phi^+(z) = c, \quad \Phi^-(z) = \frac{z+(h-2)i}{z-ih}\left[\frac{if}{z+(h-2)i} + c\right];$$

para $h > 2$

$$\Phi^+(z) = \frac{-if}{z+(h-2)i} + c_0 + \frac{c}{z+(2-h)i},$$
$$\Phi^-(z) = \frac{z+(h-2)i}{ih-z}\left[c_0 + \frac{c}{z+(h-2)i}\right].$$

12*. Demuéstrese que si a título de la solución se admiten funciones que en el contorno se reducen al infinito de orden integrable, tal admisión no hace más amplia la clase de soluciones. La clase de soluciones, para la cual se admiten en el contorno singularidades indicadas, coincide con la solución, obtenida en el § 14, que es continua hasta el contorno (F. D. Gajov [6]).

13*. Dése la solución del problema de Riemann con traslación en el caso excepcional, cuando el coeficiente del problema puede reducirse a cero o al infinito de orden entero,

$$\Phi^+[\alpha(t)] = \frac{\prod_{k=1}^{\mu}(t-a_k)^{m_k}}{\prod_{j=1}^{\nu}(t-b_j)^{p_j}} G_1(t)\Phi^-(t).$$

Pruébese que el número de soluciones es igual a $\operatorname{Ind} G_1(t) - \sum_{j=1}^{\nu} p_j$. (L. I. Chibrikova 1)*).

Indicación. Represéntese la condición de contorno en la forma

$$\frac{\Phi^+[\alpha(t)]}{\prod_{k=1}^{\mu}[\alpha(t)-a_k]^{m_k}}=\prod_{k=1}^{\mu}\left[\frac{t-a_k}{\alpha(t)-a_k}\right]^{m_k}G_1(t)\,\frac{\Phi^-(t)}{\prod_{j=1}^{\nu}(t-b_j)^{p_j}}.$$

Examínese el caso análogo del problema no homogéneo.

14. Muéstrese, aplicando el principio de simetría a la circunferencia unitaria, que la fórmula de Schwarz para la función analítica en el dominio $|z|>1$, tiene la forma:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re} f(e^{i\sigma})\,\frac{z+e^{i\sigma}}{z-e^{i\sigma}}\,d\sigma+i\operatorname{Im} f(\infty).$$

CAPITULO III

ECUACIONES INTEGRALES SINGULARES CON NUCLEO DE CAUCHY

En el presente capítulo daremos a conocer una de las aplicaciones teóricas más importantes del problema de contorno de Riemann —la investigación de las ecuaciones integrales singulares con núcleo de Cauchy. Puesto que el problema de contorno de Riemann se ha considerado hasta ahora sólo para unos contornos cerrados, el objeto de nuestra investigación serán las ecuaciones integrales, cuyas integrales se calculan en los contornos semejantes. En lo sucesivo, con relación a las generalizaciones en el planteamiento del problema de Riemann, serán estudiados, respectivamente, también otros tipos de ecuaciones integrales.

§ 20. Conceptos fundamentales y designaciones

20.1. Ecuación integral singular. Si en la ecuación integral lineal

$$\varphi(t) + \int_L K(t, \tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau = f(t)$$

el núcleo tiene la forma

$$K(t, \tau) = \frac{M(t, \tau)}{(\tau - t)^{\alpha}} \quad (0 \leqslant \alpha < 1),$$

donde $M(t, \tau)$ es una función continua, entonces, como se conoce, esta ecuación puede ser reducida, mediante una iteración, a una ecuación integral con núcleo continuo. Tal ecuación posee todas las propiedades de la ecuación de Fredholm y lleva el nombre de ecuación *casi fredholmiana* o, a veces simplemente *fredholmiana*.

Si $\alpha = 1$, la integral se hace singular y el método indicado de reducir la ecuación a una fredholmiana ya no sirve. Para las ecuaciones de esta índole debe construirse una teoría especial.

Vamos a examinar aquí unas *ecuaciones con núcleo de Cauchy* de tipo

$$K\varphi \equiv a(t)\,\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M(t,\tau)}{\tau - t}\,\varphi(\tau)\,d\tau = f(t). \qquad (20.1)$$

La integral, entendida en el sentido de valor principal, se calcula en el contorno L, que se compone, en el caso general, de $m+1$ curvas suaves cerradas $L = L_0 + L_1 + \ldots + L_m$, dispuestas tal como se indica en la fig. 13 (p. 16.1). Convengamos en considerar que las funciones $a(t)$, $f(t)$, $M(t, \tau)$, definidas en L, satisfacen la condición de Hölder, y la última, además, satisface esta condición según ambas variables.

La letra K (kappa) es un símbolo de la operación a que se somete la función $\varphi(t)$ en el primer miembro de la ecuación.

Al transformar con el núcleo

$$\frac{M(t,\tau)}{\tau - t} = \frac{M(t,\tau) - M(t,t)}{\tau - t} + \frac{M(t,t)}{\tau - t}$$

y al designar

$$M(t,t) = b(t),\quad \frac{1}{\pi i}\,\frac{M(t,\tau) - M(t,t)}{\tau - t} = k(t,\tau), \qquad (20.2)$$

escribamos la ecuación (20.1) en la forma

$$K\varphi \equiv a(t)\,\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \int_L k(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = f(t). \qquad (20.3)$$

De las fórmulas (20.2) se infiere que la función $b(t)$ satisface la condición de Hölder en todo el contorno L, mientras que $k(t, \tau)$ en todo punto, excepto los puntos $\tau = t$, donde para ella es válida la acotación

$$|k(t,\tau)| < \frac{A}{|\tau - t|^{1-\lambda}} \qquad (0 < \lambda \leqslant 1).$$

La ecuación (20.3) se llamará *ecuación integral singular completa*. Si $f(t)$ no es nula, la ecuación será no homogénea, de lo contrario, homogénea.

La expresión

$$K^0\varphi \equiv a(t)\,\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau \qquad (20.4)$$

se denomina parte *característica*, mientras que el término

$\int_L k(t, \tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau$ es la *parte regular*. La ecuación

$$K^0\varphi \equiv a(t)\,\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = f(t) \qquad (20.5)$$

la llamaremos la *ecuación característica*, correspondiente a la ecuación completa (20.3), y el operador K°, *operador característico*.

Introduciendo para la parte regular de la ecuación la designación

$$k\varphi \equiv \int_L k(t, \tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau,$$

podemos escribir la ecuación completa en la forma

$$K\varphi \equiv K^\circ\varphi + k\varphi = f(t).$$

La ecuación

$$K'\psi \equiv a(t)\,\psi(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{b(\tau)\,\psi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \int_L k(\tau, t)\,\psi(\tau)\,d\tau = 0, \quad (20.3')$$

que se obtiene de la ecuación homogénea $K\varphi = 0$ por medio de una permutación (transposición) de variables en el núcleo, se denomina ecuación *transpuesta*. K' recibe el nombre de operador *transpuesto* al operador K.

En particular, la ecuación

$$K^{0'}\psi \equiv a(t)\,\psi(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{b(\tau)}{\tau - t}\,\psi(\tau)\,d\tau = 0 \qquad (20.5')$$

será transpuesta a la ecuación característica (20.5). Notemos, ahora mismo, que el operador $K^{\circ\prime}$, transpuesto al operador característico K°, no coincide con el operador K'°, que es característico para el transpuesto. El último se determina[1]) mediante la fórmula

$$K'^0\psi \equiv a(t)\,\psi(t) - \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\psi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau. \qquad (20.6)$$

---

[1]) En la fórmula (20.3') se debe transformar

$$\int_L \frac{b(\tau)\,\psi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = \int_L \frac{b(\tau) - b(t)}{\tau - t}\,\psi(\tau)\,d\tau + b(t)\int_L \frac{\psi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau$$

y relacionar la primera integral con la parte regular.

En lo sucesivo siempre buscaremos las soluciones de ecuaciones singulares, que satisfacen la condición de Hölder.

20.2. Resultados principales de la teoría de las ecuaciones integrales de Fredholm. Daremos a conocer aquí, como información, los hechos fundamentales de la teoría de las ecuaciones integrales lineales de Fredholm de segundo género

$$a(t)\,\varphi(t)+\lambda\int_L K(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau=f(t),$$

unas de las cuales ya utilizamos en el p. 17.3.

Suponiendo que $a(t)$ no se reduce a cero, se puede considerar, sin restringir la generalidad, $a(t)\equiv 1$. Por esta razón, consideraremos en lo ulterior unas ecuaciones de Fredholm de tipo

$$\varphi(t)+\lambda\int_L K(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau=f(t) \quad \text{(no homogénea)} \qquad (20.7)$$

y

$$\varphi(t)+\lambda\int_L K(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau=0 \quad \text{(homogénea)}. \qquad (20.8)$$

DEFINICIÓN. Si, para cierto valor del parámetro $\lambda=\lambda_0$, la ecuación homogénea de Fredholm tiene una solución no trivial, entonces, λ_0 suele llamarse *valor propio*, mientras que las mismas soluciones (linealmente independientes) $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$, *funciones propias* del núcleo $K(t,\tau)$ o bien, que es lo mismo, de la ecuación homogénea (20.8).

1°. TEOREMAS DE FREDHOLM. Los siguientes teoremas se denominan, respectivamente, el teorema primero, segundo y tercero de Fredholm.

TEOREMA I. *Si $\lambda=\lambda_0$ no es el valor propio del núcleo, es decir, si la ecuación homogénea* (20.8) *es insoluble*[1]), *entonces la ecuación no homogénea* (20.7) *será soluble, cualquiera que sea el segundo miembro $f(t)$.*

La solución general se determina mediante la fórmula

$$\varphi(t)=f(t)-\int_L R(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau, \qquad (20.9)$$

donde la función $R(t,\tau)$, que es la *resolvente de la ecuación*, se expresa de un modo determinado mediante el núcleo $K(t,\tau)$.

---

[1]) Una ecuación homogénea se considera insoluble, si no tiene otras soluciones además de una trivial nula.

TEOREMA II. *Si* $\lambda = \lambda_0$ *es el valor propio de la ecuación homogénea* (20.8), *lo será también para la ecuación transpuesta*[1])

$$\psi(t) + \lambda \int_L K(\tau, t)\, \psi(\tau)\, d\tau = 0 \qquad (20.7')$$

con la particularidad de que ambas ecuaciones tienen el mismo número de las soluciones linealmente independientes (funciones propias que pertenecen al valor propio λ_0*).*

La solución general de una ecuación homogénea se presenta en la forma

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t),$$

donde $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ constituyen un sistema completo de funciones propias linealmente independientes que pertenecen al valor propio λ_0, y c_k son constantes arbitrarias.

TEOREMA III. *Si la ecuación homogénea es resoluble, la ecuación no homogénea, en el caso general, es insoluble. Será soluble, cuando, y sólo cuando, están cumplidas las condiciones*

$$\int_L f(t)\, \psi_k(t)\, dt = 0, \qquad (20.10)$$

donde $\psi_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *es un sistema completo de funciones propias de la ecuación transpuesta* (20.7'), *pertenecientes al valor propio dado* λ_0.

Si las condiciones (20.10) están cumplidas, la solución general de la ecuación no homogénea se define mediante la fórmula

$$\varphi(t) = f(t) - \int_L H(t, \tau)\, f(\tau)\, d\tau + \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t), \qquad (20.11)$$

donde $H(t, \tau)$ es una *resolvente generalizada* y $\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t)$, la solución general de una ecuación homogénea correspondiente.

---

[1]) En lugar de la ecuación (20.7') la ecuación $\psi(t) + \overline{\lambda} \int_L \overline{K(\tau, t)}\, \psi(\tau) \times$ $\times \overline{\tau'(\sigma)}\, d\sigma = 0$ $(\tau = \tau(\sigma))$ se llama frecuentemente ecuación transpuesta. Mediante unas transformaciones simples se puede probar que la última ecuación tiene el mismo número de soluciones que la ecuación (20.7') (véase el p. 24.4).

2°. ESPECTRO DE LA ECUACIÓN.

DEFINICIÓN. El conjunto de valores propios del parámetro λ de una ecuación integral se llama *espectro* de ésta.

He aquí teoremas que caracterizan el espectro de una ecuación de Fredholm.

TEOREMA IV. *El conjunto de valores propios de una ecuación integral de Fredholm no tiene puntos límites a una distancia finita. Si el conjunto de valores propios es infinito, su punto límite es un punto infinitamente alejado.*

En otras palabras, el espectro de la ecuación integral de Fredholm es un conjunto discreto. Esto se desprende del hecho de que los valores propios λ_k de la ecuación integral de Fredholm son raíces de una función analítica, la cual en el caso particular, cuando el núcleo de la ecuación esté degenerado ($K(t, \tau) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(t)\,\beta_j(\tau)$), se convierte en un polinomio y en los demás casos es la función entera transcendente.

TEOREMA V. *A todo valor propio le pertenece el número finito de funciones propias.*

La última propiedad ya fue usada en el teorema III.

§ 21. Ecuaciones características

21.1. Reducción al problema de contorno de Riemann. Examinemos un tipo más sencillo de la ecuación integral singular, es decir, la ecuación característica (20.5):

$$K^0\varphi \equiv a(t)\,\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = f(t). \qquad (21.1)$$

En este caso la resolución de la ecuación puede reducirse a la del problema de Riemann (cap. II) y la solución de la ecuación se da en la forma cerrada.

Introduzcamos una función analítica a trozos, definida por la integral de tipo Cauchy, de cuya densidad sirve la solución buscada de la ecuación característica

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau. \qquad (21.2)$$

De acuerdo con las fórmulas de Sojotski (4.9) y (4.10)

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t),$$
$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,dt = \Phi^+(t) + \Phi^-(t). \qquad (21.3)$$

Introduciendo los valores de $\varphi(t)$, $\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,dt$ en la ecuación (21.1)

y resolviéndola respecto de $\Phi^+(t)$, llegamos a que la función analítica a trozos $\Phi(z)$ tiene que ser la solución del problema de contorno de Riemann

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t), \tag{21.4}$$

donde

$$G(t) = \frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}, \quad g(t) = \frac{f(t)}{a(t)+b(t)}. \tag{21.5}$$

Debido a lo que la función buscada $\Phi(z)$ está representada mediante una integral de tipo Cauchy, ella debe satisfacer la condición complementaria

$$\Phi^-(\infty) = 0. \tag{21.6}$$

El índice del coeficiente $\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}$ del problema de Riemann (21.4) se llamará *índice de la ecuación integral* (21.1).

Al resolver el problema de contorno (21.4), encontraremos según la fórmula (21.3), la solución de la ecuación (21.1).

Así pues, la ecuación integral (21.1) se ha reducido al problema de contorno de Riemann (21.4). Para establecer la equivalencia existente entre la ecuación y el problema de contorno, es necesario demostrar que, viceversa, $\varphi(t)$, hallada del modo indicado a partir de la solución del problema de contorno, satisface la ecuación (21.1). Con este fin se debe probar que es válida también la segunda de las fórmulas (21.3). Demostremos esto.

Si la solución del problema (21.4) está representada por la integral de tipo Cauchy (21.2), serán válidas ambas fórmulas (21.3) y se puede realizar el paso uniforme del problema de contorno a la ecuación de partida. Supongamos, ahora, que se tiene otra función $\Phi_1(z)$, que satisface las mismas condiciones. En este caso, para la diferencia $\Phi_2 = \Phi - \Phi_1$ será lícita la igualdad

$$\Phi_2^+(t) - \Phi_2^-(t) = 0.$$

De acuerdo con el teorema de la prolongación analítica y el teorema de Liouville (teniendo en cuenta (21.6)), $\Phi_2(z) \equiv 0$. Por consiguiente, $\Phi_1(z) = \Phi(z)$, lo que se trataba de demostrar.

Consideremos primero un caso *normal* (no excepcional) cuando el coeficiente $G(t)$ del problema de Riemann (21.4) no se reduce a cero o al infinito, lo que, para la ecuación (21.1), corresponde a la condición

$$a(t) \pm b(t) \neq 0. \tag{21.7'}$$

Con el objeto de simplificar las fórmulas a seguir, toda la ecuación (21.1) la dividamos por $\sqrt{a^2(t) - b^2(t)}$ (normalicemos), es decir,

convengamos en que todos los coeficientes de esta ecuación satisfacen la condición

$$a^2(t) - b^2(t) = 1. \tag{21.7}$$

Los casos excepcionales serán considerados al final del capítulo (§ 25).

Observemos además que, viceversa, es fácil obtener una ecuación integral singular, correspondiente al problema de contorno dado (21.4). Sustituyendo en la condición de contorno (21.4) los valores límites de la integral de tipo Cauchy, obtendremos, según las fórmulas (4.8), la ecuación integral singular característica

$$\frac{1}{2}[1+G(t)]\varphi(t)+\frac{1-G(t)}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau = g(t). \tag{21.8}$$

De las soluciones de la última ecuación a base de la fórmula (21.2) obtenemos la solución del problema de contorno de Riemann. Puesto que no existe un procedimiento para resolver la ecuación característica independientemente de la solución del problema de Riemann, la ecuación (21.8) debe considerarse no como un nuevo método de resolución del problema de Riemann, sino como una fórmula que permite pronto construir una ecuación integral singular característica, correspondiente al problema de contorno de Riemann dado.

21.2. Solución de la ecuación característica. Escribamos, según las fórmulas (16.10), (16.8), la solución del problema de contorno de Riemann (21.4), tomando $\varkappa \geqslant 0$, y calculemos, valiéndonos de las fórmulas de Sojotski, valores límites de las funciones correspondientes

$$\Phi^+(t) = X^+(t)\left[\frac{1}{2}\frac{g(t)}{X^+(t)} + \Psi(t) - \frac{1}{2}P_{\varkappa-1}(t)\right],$$

$$\Phi^-(t) = X^-(t)\left[-\frac{1}{2}\frac{g(t)}{X^+(t)} + \Psi(t) - \frac{1}{2}P_{\varkappa-1}(t)\right],$$

donde $\Psi(t)$ es una integral singular que se obtiene, sustituyendo z por t en la fórmula (14.14). El polinomio arbitrario se ha tomado en la forma $-\frac{1}{2}P_{\varkappa-1}(t)$, lo que es más cómodo para las designaciones posteriores.

De aquí, según la fórmula (21.3),

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\left[1+\frac{X^-(t)}{X^+(t)}\right]g(t) + X^+(t)\left[1-\frac{X^-(t)}{X^+(t)}\right]\times$$
$$\times\left[\Psi(t) - \frac{1}{2}P_{\varkappa-1}(t)\right].$$

De acuerdo con la condición de contorno, hacemos la sustitución $\frac{X^-(t)}{X^+(t)} = \frac{1}{G(t)}$, y en lugar de $\Psi(t)$ ponemos su expresión según la fórmula (14.14). Entonces,

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{G(t)}\right] g(t) + \\ + X^+(t)\left[1 - \frac{1}{G(t)}\right]\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - t} - \frac{1}{2}P_{\varkappa-1}(t)\right].$$

Sustituyendo, por fin, en vez de $X^+(t)$ su expresión de la fórmula (16.8) y los valores de $G(t)$ y de $g(t)$, tomados de (21.5), obtenemos

$$\varphi(t) = a(t) f(t) - \frac{b(t) Z(t)}{\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - t} + b(t) Z(t) P_{\varkappa-1}(t), \quad (21.9)$$

donde

$$Z(t) = [a(t) + b(t)]\ X^+(t) = [a(t) - b(t)]\ X^-(t) = \frac{e^{\Gamma(t)}}{\sqrt{t^{\varkappa}\Pi(t)}}, \quad (21.10)$$

$$\Gamma(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln\left[\tau^{-\varkappa}\Pi(\tau)\frac{a(\tau) - b(\tau)}{a(\tau) + b(\tau)}\right]}{\tau - t}\, d\tau,$$

$$\Pi(t) = \sum_{k=1}^{m}(t - z_k)^{\varkappa_k} \quad (21.11)$$

y los coeficientes $a(t)$, $b(t)$ satisfacen la condición (21.7'). Aquí $\Pi(t) \equiv 1$ cuando L es un contorno simple que abarca un dominio simplemente conexo. Puesto que las funciones $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ satisfacen la condición de Hölder, entonces, en virtud de las propiedades de valores límites de la integral de tipo Cauchy, la función $\varphi(t)$ también satisfará dicha condición.

El último término de la fórmula (21.9) representa la solución general de la ecuación homogénea ($f(t) \equiv 0$), y los primeros dos términos, cierta solución particular de la ecuación no homogénea.

Comparando las fórmulas (21.9) y (20.11), vemos que la función $\frac{b(t)Z(t)}{\pi i Z(\tau)(\tau - t)}$ desempeña, para la ecuación característica, el papel de resolvente y las funciones propias de la ecuación serán $\varphi_k(t) = b(t) Z(t) t^{k-1}$ ($k = 1, 2, \ldots, \varkappa$). La solución particular de la ecuación (21.1) se anotará como Rf, donde R[1]) es el operador,

[1]) El operador R es inverso al operador K° en el sentido de que el último transforma la función φ en la función f, mientras que el operador R transforma f en φ.

definido por la ecuación

$$Rf = a(t)\, f(t) - \frac{b(t)\, Z(t)}{\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t}.$$

En este caso la solución general de la ecuación (21.1) toma la forma

$$\varphi(t) = Rf + \sum_{k=1}^{\varkappa} c_k \varphi_k(t). \tag{21.12}$$

Ha de notarse que en los casos, cuando el problema de Riemann (21.4) puede ser resuelto inmediatamente por medio de la prolongación analítica (véase p. 14.6), resulta más cómodo buscar la solución de la ecuación característica no a la base de la fórmula (21.9), sino que directamente según la fórmula (21.3).

Si $\varkappa < 0$, entonces, como sabemos, el problema de Riemann (21.4) es insoluble en el caso general. Las condiciones de su resolubilidad

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \tau^{k-1}\, d\tau = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, -\varkappa), \tag{16.11}$$

serán, al mismo tiempo, las condiciones de resolubilidad de la ecuación (21.1).

Sustituyendo $g(\tau)$ y $X^+(t)$ por sus expresiones (21.5) y (21.10), las condiciones de resolubilidad pueden escribirse en la forma

$$\int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)} \tau^{k-1}\, d\tau = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, -\varkappa). \tag{21.13}$$

Siendo observadas las condiciones de resolubilidad, la solución de la ecuación no homogénea (21.4) se determina por la fórmula (21.9) para $P_{\varkappa-1}(t) \equiv 0$.

Enunciaremos los resultados de la investigación.

1°. *Si* $\varkappa > 0$, *la ecuación homogénea* $K^\circ\varphi = 0$ *tiene* $\varkappa$ *soluciones linealmente independientes*

$$\varphi_k(t) = b(t)\, Z(t)\, t^{k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots, \varkappa).$$

2°. *Si* $\varkappa \leqslant 0$, *la ecuación homogénea es insoluble.* (La solución trivial nula no se toma en consideración.)

3°. *Si* $\varkappa \geqslant 0$, *la ecuación no homogénea es soluble cualquiera que sea el segundo miembro* $f(t)$, *y su solución general depende linealmente de* $\varkappa$ *constantes arbitrarias.*

4°. *Si* $\varkappa < 0$, *la ecuación no homogénea será soluble, cuando, y sólo cuando, su segundo miembro f satisfaga* $-\varkappa$ *condiciones*:

$$\int_L \psi_k(t)\, f(t)\, dt = 0. \tag{21.14}$$

donde $\psi_k(t) = \frac{1}{Z(t)}\, t^{k-1}$.

Comparando las propiedades mencionadas de la ecuación integral característica con las de la ecuación integral de Fredholm (p. 20.2), se pueden notar unas diferencias sustanciales entre ellas. Para una ecuación de Fredholm, cuando se resuelve la ecuación homogénea, la no homogénea, en el caso general, es insoluble y, viceversa, cuando la primera no es soluble, la segunda resulta ser incondicionalmente resoluble. En cambio, para una ecuación singular, en el caso de resolubilidad de la ecuación homogénea, se resuelve incondicionalmente la no homogénea; cuando la primera no es soluble, la segunda, en el caso general, tampoco es soluble.

Por analogía con la ecuación de Fredholm, introduzcamos en el núcleo de la ecuación característica el parámetro λ y examinemos la ecuación

$$K_\lambda^0 \varphi \equiv a(t)\, \varphi(t) + \frac{\lambda b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = 0.$$

Según lo probado anteriormente, la última ecuación es soluble, si

$$\varkappa = \operatorname{Ind} \frac{a(t) - \lambda b(t)}{a(t) + \lambda b(t)} > 0.$$

El índice de la función continua (p. 12.3) varía a saltos y sólo para aquellos valores de λ, para los cuales $a(t) \neq \lambda b(t) = 0$. Si en el plano complejo $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ trazamos unas curvas $\lambda = \pm \frac{a(t)}{b(t)}$, éstas dividirán el plano en los dominios, en cada uno de los cuales el índice será constante. De este modo, los valores propios de una ecuación integral singular característica llenan los dominios enteros y, por consiguiente, *su espectro, a diferencia del espectro de la ecuación de Fredholm, no es discreto, sino continuo.*

21.3. Solución de la ecuación transpuesta a la característica. La ecuación

$$K^{0'} \psi \equiv a(t)\, \psi(t) - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{b(\tau)\, \psi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = h(t), \tag{21.15}$$

transpuesta a $K^0\varphi = f$, no es por de sí característica. No obstante, mediante una sustitución

$$b(t)\, \psi(t) = \omega(t) \tag{21.16}$$

se convierte en la ecuación característica respecto de la función $\omega(t)$:

$$a(t)\,\omega(t) - \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = b(t)\,h(t). \qquad (21.17)$$

Al determinar de la última ecuación $\omega(t)$, valiéndonos de la fórmula

$$\psi(t) = \frac{1}{a(t) - b(t)}\left[\omega(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)\,d\tau}{\tau - t} + h(t)\right],$$

que se obtiene por adición de las igualdades (21.15) y (21.16), encontraremos la función buscada $\psi(t)$.

Introduciendo una función analítica a trozos

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - z}\,d\tau \qquad (21.18)$$

de un modo igual que en el p. 21.2, llegaremos al problema de contorno de Riemann

$$\Omega^+(t) = \frac{a(t) + b(t)}{a(t) - b(t)}\,\Omega^-(t) + \frac{b(t)\,h(t)}{a(t) - b(t)}. \qquad (21.19)$$

El coeficiente del último problema es una magnitud inversa al coeficiente del problema de Riemann (21.4), correspondiente a la ecuación $K^{\circ}\varphi = f$. Por consiguiente,

$$\varkappa' = \operatorname{Ind}\frac{a(t) + b(t)}{a(t) - b(t)} = -\operatorname{Ind}\frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)} = -\varkappa. \qquad (21.20)$$

Al recordar la fórmula (14.10) que define la función canónica del problema homogéneo de Riemann, observamos que las funciones canónicas $X'(z)$, para la ecuación (21.19), y $X(z)$, para (21.4), son inversas cuanto a su valor:

$$X'(z) = \frac{1}{X(z)}.$$

Procediendo igual que en el p. 21.2, obtenemos la solución de la ecuación integral singular (21.15), para $\varkappa' = -\varkappa \geqslant 0$, en la forma

$$\psi(t) = a(t)\,h(t) + \frac{1}{\pi i Z(t)}\int_L \frac{b(\tau)\,Z(\tau)\,h(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \frac{1}{Z(t)}\,Q_{\varkappa'-1}(t), \qquad (21.21)$$

donde $Z(t)$ se prefija por la fórmula (21.10), y $Q_{\varkappa'-1}(t)$ es un polinomio de grado $\varkappa' - 1$ de coeficientes arbitrarios. (Si $\varkappa' = 0$, entonces $Q(t) \equiv 0$).

En el caso de que $\varkappa' = -\varkappa < 0$, para la resolubilidad de la ecuación (21.15) es necesario y suficiente el cumplimiento de las condiciones

$$\int_L b(t) Z(t) h(t) t^{k-1} dt = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, -\varkappa'), \quad (21.22)$$

para las cuales, si se observan, la solución se da por la fórmula (21.21), en que se debe poner $Q_{\varkappa'-1}(t) = 0$.

Ha de ser notado que las condiciones de resolubilidad (21.13) y (21.22) tienen una forma tal que se requiere por el tercer teorema de Fredholm. Más adelante probaremos que lo mismo tiene lugar también en el caso general para una ecuación integral singular completa.

Los resultados de la investigación simultánea de las ecuaciones característica y transpuesta muestran una nueva digresión esencial de las propiedades de la ecuación de Fredholm. Contrariamente al segundo teorema de Fredholm, las ecuaciones características singulares homogéneas transpuestas nunca suelen ser resolubles al mismo tiempo. O bien ambas son insolubles ($\varkappa = 0$) o bien, cuando el índice no es nulo, es resoluble aquella que tiene índice positivo.

La diferencia entre los números de soluciones de las ecuaciones homogéneas característica y transpuesta es igual al índice $\varkappa$. Esta propiedad, válida, como veremos más abajo, también para las ecuaciones completas, es la más distintiva en el caso de las ecuaciones integrales singulares.

Las afirmaciones 1°, 2° y 3°, 4°, enunciadas en el p. 21.2, se denominan *primero* y *segundo teoremas de Noether* para la ecuación característica, mientras que la relación mencionada, que existe entre el índice de la ecuación y la cantidad de soluciones de las ecuaciones homogéneas $K^{\circ}\varphi = 0$ y $K^{\circ\prime}\psi = 0$, recibe el nombre de *tercer teorema de Noether*. En lo sucesivo (p. 23.2) estos teoremas serán extendidos a la ecuación singular completa.

21.4. Ejemplos. Como ya se ha observado, la dificultad fundamental en la resolución práctica del problema de Riemann y, por lo tanto, de la ecuación integral singular característica, consiste en el cálculo de unas integrales singulares que figuran en la fórmula (21.9). En el caso general, este cálculo puede ser llevado a cabo empleando los métodos de integración aproximada. En este caso, con más frecuencia la preferencia se da no a la fórmula definitiva (21.9), sino a la aplicación de los métodos aproximados directamente a la misma ecuación (21.1) (véase más abajo el p. 21.11).

Aquí nos limitemos a un ejemplo en que la solución del problema de contorno de Riemann (21.4), correspondiente a la ecuación integral, será hallada de un modo elemental, por medio de una prolon-

gación analítica (p. 14.6). La solución de la misma ecuación integral la obtendremos directamente por las fórmulas de Sojotski (21.3).

Sea dada una ecuación integral

$$K^0\varphi \equiv (t^2+t-1)\,\varphi(t)+\frac{t^2-t-1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau = 2\left(t^3-t+1+\frac{1}{t}\right).$$

Aquí

$$G(t)=\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}=\frac{t}{t^2-1}, \qquad g(t)=\frac{f(t)}{a(t)+b(t)}=\frac{t^3-t^2+1}{t^2-t}$$

y, por consiguiente, la condición de contorno (21.4) toma la forma

$$\Phi^+(t)=\frac{t}{t^2-1}\,\Phi^-(t)+\frac{t^3-t^2+1}{t^2-t}.$$

La solución de este problema de contorno que satisface la condición $\Phi^-(\infty)=0$, se ha obtenido en el p. 14.6 para diferentes contornos L.

1°. Si L es el contorno del ejemplo a) (p. 14.6), entonces

$$\Phi^+(z)=z+\frac{c}{z^2-1}, \qquad \Phi^-(z)=-\frac{z+1}{z^2}+\frac{c}{z}$$

y la solución de la ecuación integral dada será la función

$$\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\frac{t^3+t+1}{t^2}+c\,\frac{1+t-t^2}{t^3-t}.$$

2°. Si L es el contorno del ejemplo c), el índice es igual a -1; la condición de resolubilidad, como se ha mostrado, se cumple y

$$\Phi^+(z)=z, \qquad \Phi^-(z)=-\frac{z+1}{z^2}.$$

La solución de la ecuación integral se determina por la fórmula

$$\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\frac{t^3+t+1}{t^2}.$$

El análisis de los demás casos de la disposición del contorno se lo encargamos al lector.

21.5. Ecuaciones singulares completas que se resuelven en forma cerrada. [1]). En los puntos precedentes hemos investigado la ecuación característica y la transpuesta a ésta y hemos probado que estas ecuaciones se resuelven en forma cerrada. A diferencia de ellas, la ecuación singular completa no se resuelve, en el caso general, en forma cerrada y será reducida a la ecuación de Fredholm. Sin embargo, existe una serie de los casos cuando la ecuación completa también

[1]) La exposición de este punto sigue, en lo fundamental, el artículo de S. G. Samko 1)*.

puede resolverse en forma cerrada. Examinemos aquí algunos de estos casos. En lo ulterior (en el § 51) estudiaremos también otros tipos de las ecuaciones completas que se resuelven en forma cerrada con ayuda de las teorías más complejas.

Al resolver la ecuación completa

$$a(t)\,\varphi(t)+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M(t,\tau)}{\tau-t}\,\varphi(\tau)\,d\tau=f(t), \tag{21.23}$$

nos fundaremos en ciertas propiedades analíticas de la función $M(t, \tau)$.

LEMA 1. *Supongamos que la función $M(t, \tau)$, hölderiana según ambas variables en el contorno L, se prolonga analíticamente al dominio D^+ según cada una de las variables. Si $M(t, t) \equiv 1$, la solución de la ecuación*

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M(t,\tau)}{\tau-t}\,\varphi(\tau)\,d\tau=f(t) \tag{21.24}$$

se determina con la fórmula de inversión analógica a (7.13):

$$\varphi(t)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M(t,\tau)}{\tau-t}\,f(\tau)\,d\tau.$$

En efecto, empleando la fórmula de inversión de Poincaré—Bertrand (7.7), obtendremos

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M(t,\tau)}{\tau-t}\,d\tau\,\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M(\tau,\tau_1)}{\tau_1-\tau}\,f(\tau_1)\,d\tau_1=$$

$$=M(t,t)\,M(t,t)\,f(t)+\frac{1}{\pi i}\int_L f(\tau_1)\,d\tau_1\,\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M(\tau,\tau_1)\,M(t,\tau)}{(\tau_1-\tau)(\tau-t)}\,d\tau=$$

$$=f(t)+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{f(\tau_1)\,d\tau_1}{\tau_1-t}\left[\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M(\tau,\tau_1)\,M(t,\tau)}{\tau-1}\,d\tau-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M(\tau,\tau_1)\,M(t,\tau)}{\tau-\tau_1}\,d\tau\right]. \tag{21.25}$$

Puesto que la función $M(t, \tau)$ es analíticamente prolongable a D^+ según toda variable, tenemos, de acuerdo con la condición (4.11)

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M(\tau,\tau_1)\,M(t,\tau)}{\tau-t}\,d\tau=M(t,\tau_1)\,M(t,t)=M(t,\tau_1).$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M(\tau,\tau_1)\,M(t,\tau)}{\tau-\tau_1}\,d\tau=M(\tau_1,\tau_1)\,M(t,\tau_1)=M(t,\tau_1).$$

Por consiguiente, la expresión encerrada entre corchetes en (21.25), es igual a cero, lo que demuestra el lema.

La ecuación (21.24) puede ser resuelta sin que la función $M(t, \tau)$ sea limitada por la condición $M(t, t) \equiv 1$. A saber, sea la función $M(t, \tau)$ prolongable analíticamente a D^+ según toda variable, y sea $M(z, z) \neq 0$ para $z \in \overline{D^+}$. Entonces, la solución de la ecuación (21.24) se determina por la fórmula

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi i} \frac{1}{M(t, t)} \int_L \frac{M(t, \tau)}{M(\tau, \tau)} \frac{f(\tau)\, d\tau}{\tau - t} \tag{21.26}$$

Consideraremos, ahora, la ecuación (21.23). Escribámosla en la forma

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_L K(t, \tau)\varphi(\tau)\, d\tau = f(t). \tag{21.27}$$

donde, evidentemente, $b(t) = M(t, t)$.

Mostremos que la *ecuación* (21.27) *se resuelve en forma cerrada, siempre que a* (t) *y b* (t) *son constantes y K* (t, τ) *es una función cualquiera que puede ser analíticamente prolongada al dominio* D^+ *según cada variable.*

Para dichos suposiciones la ecuación (21.27) tiene por expresión

$$a\varphi(t) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{M(t, \tau)}{\tau - t} \varphi(\tau)\, d\tau = f(t). \tag{21.28}$$

donde $M(t, \tau) = b + \pi i (\tau - t) K(t, \tau)$, de modo que $M(t, t) = b = \text{const}$. Sea $b \neq 0$. Anotemos

$$\psi(t) = \frac{1}{b\pi i} \int_L \frac{M(t, \tau)}{\tau - t} \varphi(\tau)\, d\tau. \tag{21.29}$$

De acuerdo con el lema 1, la función $\varphi(t)$ se expresa en términos de $\psi(t)$ precisamente igual que $\psi(t)$ en términos de $\varphi(t)$. La ecuación (21.28) escribamos en la forma

$$a\varphi(t) + b\psi(t) = f(t). \tag{21.30}$$

Aplicando a los dos miembros la operación (21.29), obtendremos

$$a\psi(t) + b\varphi(t) = g(t), \tag{21.31}$$

donde

$$g(t) = \frac{1}{b\pi i} \int_L \frac{M(t, \tau)}{\tau - t} f(\tau)\, d\tau.$$

al resolver el sistema de ecuaciones (21.30) — (21.31), hallamos $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \frac{1}{a^2 - b^2}\left[af(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M(t, \tau)}{\tau - t} f(\tau)\, d\tau\right] \qquad (21.32)$$

A la condición de que $a \neq \pm b$.

Así pues, *cuando* $a \neq \pm b$ *y el núcleo* $K(t, \tau)$ *es analíticamente prolongable, la ecuación* (21.28) *es resoluble y tiene la única solución, definida por la fórmula* (21.32).

Hemos considerado la ecuación (21.27) para $b \neq 0$. Esta suposición es natural, en vista de que para $b \equiv 0$, la ecuación (21.27) deja de ser singular. Probemos, sin embargo, que la ecuación fredholmiana, que se obtiene para $b = 0$,

$$a\varphi(t) + \int_L K(t, \tau)\varphi(\tau)\, d\tau = f(t), \quad a = \text{const}, \qquad (21.33)$$

es también resoluble en forma cerrada, siempre que el núcleo $K(t, \tau)$ es analíticamente prolongable. Apliquemos el siguiente lema que nos hará falta también en lo ulterior.

LEMA 2. *Supongamos que la función* $K(t, \tau)$ *es analíticamente prolongable al dominio* D^+ *según toda variable y es continua para* t, $\tau \in L$. *En este caso,*

1) *la función*

$$\Phi^+(t) = \int_L K(t, \tau)\varphi(\tau)\, d\tau$$

es analíticamente prolongable al dominio D^+ *para cualquier función de Hölder* $\varphi(t)$;

2) *si la función de Hölder* $\varphi^+(t)$ *es analíticamente prolongable al dominio* D^+, *entonces*

$$\int_L K(t, \tau)\varphi^+(\tau)\, d\tau = 0. \qquad (21.34)$$

La afirmación del lema 1) se obtiene por una comprobación directa de la condición (4.11), mientras que la afirmación del lema 2) se desprende del teorema integral de Cauchy.

En virtud del lema 2

$$\int_L K(t, \tau)\, d\tau \int_L K(\tau, \tau_1)\varphi(\tau_1)\, d\tau_1 = 0 \qquad (21.35)$$

para cualquier función (de Hölder) $\varphi(t)$. Por esto, de (21.33) encontramos que

$$a\int_L K(t,\ \tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = \int_L K(t,\ \tau)\,f(\tau)\,d\tau$$

y en este caso

$$\varphi(t) = \frac{1}{a^2}\left[af(t) - \int_L K(t,\ \tau) f(\tau)\,d\tau\right] \qquad (21.36)$$

Por consiguiente, *si el núcleo* $K(t,\ \tau)$ *es analítico en el dominio* D^+ *según toda variable* y, *además, continuo para* $t,\tau \in L$, *la ecuación* (21.33) *será soluble, cualquiera que sea el segundo miembro, y su solución se determina por la fórmula* (21.36).

Pasemos, por fin, al caso general de resolubilidad de la ecuación (21.27) en forma cerrada, cuando la *función* $\frac{K(t,\ \tau)}{a(t)+b(t)}$ *es analítica según* τ *y meromorfa según* t *en el dominio* D^+.

Para brevedad designemos

$$K\varphi = \int_L K(t,\ \tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau$$

y notemos que

$$K\varphi^+ = 0 \qquad (21.37)$$

para toda función $\varphi^+(t)$ que sea analíticamente prolongable al dominio D^+. Suponiendo, conforme a (14.3), $\varphi(t) = \varphi^+(t) - \varphi^-(t)$, reducimos, teniendo en cuenta (21.37), la ecuación (21.27) a la correlación de tipo del problema de Riemann

$$\varphi^+(t) - \frac{1}{a(t)+b(t)}\,K\varphi^- = G(t)\,\varphi^-(t) + g(t), \qquad (21.38)$$

donde, como siempre

$$G(t) = \frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)},\quad g(t) = \frac{f(t)}{a(t)+b(t)}.$$

Según la hipótesis tenemos

$$\frac{K(t,\ \tau)}{a(t)+b(t)} = \frac{A^+(t,\ \tau)}{\prod^+(t)},\qquad \prod^+(t) = \prod_{k=1}^{n}(t-z_k)^{m_k}, \qquad (21.39)$$

donde $z_k \in D^+$, m_k son números enteros positivos, y la función $A^+(t,\ \tau)$ es analítica en D^+ según t y según τ.

La correlación (21.38) toma la forma

$$\Pi^+(t)\,\varphi^+(t) + A^+\varphi^- = \Pi^+(t)\,[G(t)\,\varphi^-(t) + g(t)], \qquad (21.40)$$

donde A^+ es un operador integral con núcleo $A^+(t, \tau)$. Como la función $A^+\varphi^-$ es analítica en D^+ (véase el lema 2), la última correlación representa un problema corriente de Riemann, del cual se determinan en forma cerrada las funciones $\Pi^+(t)\,\varphi^+(t) + A^+\varphi^-$ y $\varphi^-(t)$, y, por lo tanto, $\varphi(t)$. A saber, al escribir $G(t)$ en la forma $G(t) = \frac{X^+(t)}{X^-(t)}$, donde $X^{\pm}(z)$ es una función canónica del problema de Riemann, y al reducir la correlación (21.40) a la forma que admite la aplicación del teorema de Liouville, llegamos a un polinomio de grado $\varkappa - 1 + \sum_{k=1}^{n} m_k$ con coeficientes arbitrarios cuando $(\varkappa + \sum_{k=1}^{n} m_k > 0)$. Sin embargo, el hecho de que ante la $\varphi^+(t)$ figura el factor $\Pi^+(t)$ el cual se reduce a cero en D^+ con el orden sumario de ceros $\sum_{k=1}^{n} m_k$ disminuirá, evidentemente, el número de constantes arbitrarias en la solución general (la obtención de los resultados correspondientes se la encargamos al lector).

Observemos en conclusión, que análogamente puede ser considerado el caso en que el núcleo $K(t, \tau)$ es meromorfo también según τ. En este caso, la ecuación (21.27) puede reducirse al problema de Riemann de tipo (21.38) y cierto sistema algebraico lineal.

EJEMPLOS. Consideremos las ecuaciones

1. $$\lambda\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\cos(\tau - t)}{\tau - t}\,\varphi(\tau)\,d\tau = f(t).$$

2. $$\lambda\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\operatorname{sen}(\tau - t)}{(\tau - t)^2}\,\varphi(\tau)\,d\tau = f(t).$$

Vemos que las funciones $M(t, \tau) = \cos(\tau - t)$ y $M(t, \tau) = \frac{\operatorname{sen}(\tau - t)}{\tau - t}$ poseen la propiedad de $M(t, t) \equiv 1$. Por esto, nos queda aprovechar la fórmula (21.32), de modo que para 1 y 2 tenemos, respectivamente,

$$\varphi(t) = \frac{1}{\lambda^2 - 1}\left[\lambda f(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\cos(\tau - t)}{\tau - t} f(\tau)\,d\tau\right],$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{\lambda^2 - 1}\left[\lambda f(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\operatorname{sen}(\tau - t)}{(\tau - t)^2} f(\tau)\,d\tau\right].$$

Aquí, L es un contorno cerrado y $\lambda \neq \pm 1$.

3. La ecuación

$$P(t)\,\varphi(t) + \frac{Q(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \int_L \frac{p(t, \tau)}{R(t)}\,\varphi(\tau)\,d\tau = f(t),$$

donde $P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ y $p(t, \tau)$ son polinomios, pertenece al caso en consideración y, por consiguiente, se resuelve en forma cerrada para cualquier contorno cerrado L que no pase por los ceros del polinomio $R(t)$.

21.6. Ecuación en el eje real. Soluciones que desaparecen en el infinito [1]). La teoría de la integral de tipo Cauchy, expuesta en el capítulo I, muestra que si la densidad de la integral de tipo Cauchy, tomada en una curva infinita, es igual a cero en el infinito, entonces las propiedades de la integral coinciden en todo lo esencial tanto para un contorno finito, como para un infinito. En plena conformidad con esto, como será probado más abajo, la teoría de la ecuación integral singular en el contorno infinito en la clase de soluciones que desaparecen en el infinito coincide con la teoría, expuesta anteriormente, de la ecuación en el contorno finito. En el caso de que $\varphi(\infty) \neq 0$, las condiciones de representación de la función analítica a trozos para los contornos finito e infinito ((1.6) y (4.29), respectivamente) son distintas. Lo último conduce, como veremos más abajo, a una diferencia de gran alcance en la teoría de ecuaciones integrales singulares en los contornos infinito y finito.

Al igual que en el caso de un contorno finito, la ecuación integral singular

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = f(t) \tag{21.41}$$

la reduzcamos, con ayuda de la integral de tipo Cauchy

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\, d\tau \tag{21.42}$$

y las fórmulas (21.3), al problema de contorno de Riemann

$$\Phi^+(t) = \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}\Phi^-(t) + \frac{f(t)}{a(t) + b(t)} \quad (-\infty < t < \infty). \tag{21.43}$$

La condición de equivalencia de la ecuación singular y del problema de contorno puede presentarse de las fórmulas (21.3) en la forma

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi^+(\tau) - \Phi^-(\tau)}{\tau - 1}\, d\tau = \Phi^+(t) + \Phi^-(t). \tag{21.44}$$

[1]) El material de los pp.21.6—21.10 se debe a las obras de A. S.Mótkin 1)*, 2* y otros artículos suyos.

Esta es del mismo tipo que en el caso de un contorno finito y se satisface automáticamente, si la solución puede ser representada por la integral de tipo Cauchy. La condición de tal representación es, como fue mostrado en el p. 4.6, el cumplimiento de la igualdad (4.29). Por consiguiente, la correlación (4.29), es decir

$$\Phi^+(\infty) + \Phi^-(\infty) = 0,$$

constituye la condición de equivalencia de la ecuación integral (21.41) y el problema de contorno (21.43). Ella reemplaza aquí la condición analógica (1.6):

$$\Phi^-(\infty) = 0,$$

que es válida para un contorno finito.

Si se verifica (4.29), de la solución del problema de contorno (21.43) obtenemos, mediante la fórmula

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t), \tag{21.45}$$

la solución de la ecuación (21.41).

Para simplificar las fórmulas a seguir, convengamos en considerar cumplida la condición

$$a^2(t) - b^2(t) = 1. \tag{21.46}$$

Denotemos $\varkappa = \operatorname{Ind} \frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}$. Buscaremos primero la solución de la ecuación en la clase de funciones que desaparecen en el infinito.

Haciendo en la ecuación (21.14) $t = \infty$ y tomando en consideración (4.30) y la igualdad $\varphi(\infty) = 0$, llegamos a que se debe cumplir necesariamente la condición $f(\infty) = 0$. De (4.28) se infiere que $\Phi^+(\infty) = \Phi^-(\infty) = 0$. Por lo tanto, la condición (4.29) se cumple automáticamente (ella coincide aquí con la condición (1.6) para el contorno finito).

Al emplear las fórmulas (14.25) — (14.30) de la solución del problema de Riemann para un semiplano y al proceder de la manera igual que en el p. 21.2 para el contorno finito, obtendremos la solución de la ecuación integral para $\varkappa \geqslant 0$

$$\varphi(t) = a(t) f(t) - \frac{b(t) Z(t)}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{Z(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + b(t) Z(t) \frac{P_{\varkappa-1}(t)}{(t+i)^{\varkappa}}. \tag{21.47}$$

En el caso de que $\varkappa \leqslant 0$, hay que poner $P_{\varkappa-1}(t) \equiv 0$ y exigir, para $\varkappa < 0$, que se cumplan las condiciones de resolubilidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{Z(\tau)} \frac{d\tau}{(\tau+i)^k} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, -\varkappa). \tag{21.48}$$

Se puede también demostrar la validez de los teoremas de Noether, como lo hicimos en el p. 21.3.

Vemos, pues, que los resultados presentes son sumamente análogicos a los obtenidos para la ecuación en el contorno finito.

21.7. Ecuación en el eje real. Solución en la clase de funciones acotadas en el infinito. Analicemos, ante todo, cómo se cumplen las condiciones de equivalencia (4.29). Calculemos, aprovechando las fórmulas (4.28), los valores límites de la solución (14.27), (14.28) del problema de Riemann (21.43) en el punto infinitamente alejado. Realizadas algunas operaciones, obtenemos

$$\Phi^+(\infty) = \frac{f(\infty)}{2[a(\infty)=b(\infty)]} + \frac{c}{a(\infty)+b(\infty)}$$

$$\Phi^-(\infty) = -f(\infty)\frac{a(\infty)+b(\infty)}{2} + c[a(\infty)+b(\infty)].$$

Aquí, c es el coeficiente del término mayor en el polinomio $P_\varkappa(z)$, si $\varkappa \geqslant 0$, y

$$c = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{\chi^+(\tau)}\frac{a\tau}{\tau+i}, \quad \text{si } \varkappa < 0. \tag{21.49}$$

Resulta que $\Phi^+(\infty) + \Phi^-(\infty) = 2a(\infty)\cdot c - f(\infty)\cdot b(\infty)$, y la condición de equivalencia (4.29) de la ecuación integral (21.41) y del problema de Riemann (21.43) tomará la forma

$$2a(\infty)\cdot c = f(\infty)\cdot b(\infty). \tag{21.50}$$

De dichos razonamientos se deduce

TEOREMA. *La ecuación singular* (21.41) *y el problema de Riemann para un eje real con la condición complementaria* (21.50) *son equivalentes en el sentido siguiente: si* $\Phi(z)$ *es la solución general del problema de contorno* (21.43), *que satisface la condición* (21.50), *donde* c *es el coeficiente de grado mayor en el polinomio* $P_\varkappa(z)$, para $\varkappa \geqslant 0$, y $c = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{[a(\tau)+b(\tau)]\,X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau+i}$, para $\varkappa < 0$, *entonces, la función* (21.45) *es la solución de la ecuación* (21.41); *viceversa, si* $\varphi(t)$ *representa la solución general de la ecuación* (21.41), *la integral de tipo Cauchy* $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau$ *será la solución del problema de Riemann* (21.43) *que satisface la condición* (21.50).

Conviene distinguir dos casos esencialmente diferentes:

$$a(\infty) \neq 0, \quad a(\infty) = 0.$$

21.8. Caso en que $a(\infty) \neq 0$. Aquí c se determina de la condición (21.50) de única manera. Para la ecuación homogénea ($f \equiv 0$) $c = 0$. La solución general de la ecuación homogénea para $\varkappa > 0$ contiene un polinomio arbitrario $P_{\varkappa-1}(t)$, y, por lo tanto, la ecuación tiene $\varkappa$ soluciones linealmente independientes. Cuando $\varkappa \leqslant 0$, la ecuación homogénea es insoluble.

Para la ecuación no homogénea, de la condición (21.59) se tiene

$$c = \frac{f(\infty) \cdot b(\infty)}{2a(\infty)}.$$

La solución de la ecuación se puede obtener mediante la fórmula $\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t)$, si, para $\varkappa \geqslant 0$, en la solución del problema de contorno de Riemann (14.27) hacemos el coeficiente mayor del polinomio igual a

$$\frac{f(\infty) \cdot b(\infty)}{2a(\infty)},$$

y, para $\varkappa < 0$, a las condiciones de resolubilidad del problema de Riemann añadimos una condición complementaria

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{[a(\tau)+b(\tau)]\, X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau+i} = -\frac{f(\infty) \cdot b(\infty)}{a(\infty)}. \qquad (21.51)$$

Se puede probar que el tercer teorema de Noether sobre la diferencia entre los números de soluciones de las ecuaciones transpuestas ($n - n' = \varkappa$) queda válido; en lo que se refiere al segundo teorema acerca de la resolubilidad de la ecuación homogénea, éste será lícito (lo que se deduce de la igualdad (21.51)) sólo cuando $f(\infty) \cdot b(\infty) = 0$. Esto precisamente distingue la teoría de ecuación integral en el contorno infinito de la teoría en el contorno finito.

21.9. Caso en que $a(\infty) = 0$. Para la ecuación homogénea ($f \equiv 0$) la condición de equivalencia (21.50) se satisface automáticamente para los valores arbitrarios de c. La solución general de la ecuación homogénea para $\varkappa \geqslant 0$ contiene el polinomio arbitrario $P_\varkappa(t)$, y, por consiguiente, la ecuación homogénea tiene $\varkappa + 1$ soluciones linealmente independientes. Cuando $\varkappa < 0$, la ecuación homogénea es insoluble.

Tomando en consideración que, en virtud de (21.46), $b(\infty) = \pm i \neq 0$, entonces, para que existan las soluciones del problema de contorno que satisfagan la ecuación no homogénea (21.41) y, consecuentemente, sea resoluble la ecuación no homogénea, debe necesariamente verificarse la igualdad

$$f(\infty) = 0. \qquad (21.52)$$

La última condición de resolubilidad puede obtenerse directamente, al suponer en ambos miembros de la ecuación (31.41) $t = \infty$. Si

esta condición no está cumplida, la ecuación no homogénea (21.41) resulta insoluble, cualquiera que sea su índice.

Admitamos que la condición (21.52) está satisfecha. En este caso, la condición (21.50) se verifica para c arbitrario; por consiguiente, la solución de la ecuación no homogénea depende linealmente, para $\varkappa \geqslant -1$, de $\varkappa + 1$ constantes arbitrarias. Cuando $\varkappa < -1$, además de (21.52), se deben satisfacer $-\varkappa - 1$ condiciones de resolubilidad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{Z(\tau)} \frac{d\tau}{(\tau+i)^k} = 0 \quad (k = 2, \ldots, -\varkappa). \tag{21.53}$$

La ecuación homogénea, transpuesta a (21.41),

$$a(t)\,\psi(t) - \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(\tau)\,\psi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = 0 \tag{21.54}$$

se reduce de un modo habitual al problema de contorno de Riemann

$$\Psi^+(t) = \frac{a(t)+b(t)}{a(t)-b(t)}\, \Psi^-(t). \tag{21.55}$$

Si el índice de la ecuación de partida es $\varkappa$, entonces el de la ecuación transpuesta será $\varkappa' = -\varkappa$. Designemos con l y l' los números de soluciones linealmente independientes de las ecuaciones dada y transpuesta, respectivamente. Entonces tenemos:

Si $\varkappa = 0$, se tiene $\varkappa' = 0$, $l = l' = 1$, $l - l' = 0$.

Si $\varkappa > 0$, se tiene $\varkappa' < 0$, $l = \varkappa + 1$, $l' = 0$, $l - l' = \varkappa + 1$.

Si $\varkappa < 0$, se tiene $\varkappa' > 0$, $l = 0$, $l' = -\varkappa + 1$, $l - l' = \varkappa - 1$.

Por consiguiente, en el caso de que $a(\infty) = 0$, el tercer teorema de Noether se verifica sólo cuando el índice es nulo. En los demás casos se observa una desviación y ésta es distinta para el índice positivo y el negativo.

Naturalmente surge la pregunta ¿en qué radica la causa de la distinción tan grande entre la teoría de ecuación integral singular en el contorno infinito y la teoría semejante en el contorno finito? La respuesta completa a esta pregunta es bastante complicada y se apoya en la teoría de operadores abstractos de Noether (véase más adelante el p. 23.4). Sin entrar en detalles indiquemos lo fundamental.

Puesto que los valores en el infinito de las funciones prefijadas y buscadas influyen en el número de soluciones y condiciones de resolubilidad, la ecuación integral singular en consideración (21.41) no es, en la clase de soluciones que desaparecen en el infinito, un análogo de la ecuación en el contorno finito, aunque tiene las formas

iguales. Representa en sí un análogo de la ecuación completa. Para convencernos de esto, debemos dividir las funciones analizadas en dos componentes: una función que desaparece en el infinito, y una constante igual al valor de la función en el infinito ($\varphi(t) = \varphi_0(t) + \varphi(\infty)$, etc.). Conforme a esto, la ecuación se convertirá en un par de ecuaciones: una ecuación integral singular respecto de $\varphi_0(t)$ y una correlación numérica en el infinito. La ecuación conjugada también será un conjunto de una ecuación integral singular respecto de $\psi_0(t)$ y una correlación numérica en el infinito. El producto escalar de funciones se efectuará según la regla para el producto escalar de vectores $(\varphi, \psi) = (\varphi_0, \psi_0) + \varphi(\infty)\cdot\psi(\infty)$.

Para tal construcción de la teoría resultan válidos todos los teoremas de Noether y la teoría de ecuación integral singular en el contorno infinito forma parte de la teoría general de así llamados operadores *de Noether* (véase el p. 23.4).

21.10. Ecuación analógica a la ecuación característica. En el eje real el análogo de la ecuación característica será la ecuación de tipo

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(t-z_0)}{(\tau-z_0)}\,\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau = f(t),$$

donde z_0 es un punto dispuesto fuera del contorno; para esta ecuación serán válidos todos los resultados y fórmulas cualitativas que se han obtenido en los pp. 21.1—21.2 para la ecuación característica en el contorno finito cerrado. En particular, resultan válidas las fórmulas de inversión de la integral de tipo Cauchy, analógicas a las fórmulas (7.12), (7.13) para el contorno finito [1]:

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t-z_0}{\tau-z_0}\,\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau,$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t-z_0}{\tau-z_0}\,\frac{\psi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau.$$

Como conclusión observemos que todos los resultados obtenidos en los pp. 21.6—21.10, se extienden sin cambios algunos al caso de un contorno suave arbitrario que tiende al infinito teniendo una dirección asintótica general. El eje real, lo hemos tomado con el único fin de simplificar las enunciaciones. Si el contorno tiende al

[1]) D. Przeworska-Rolewiez en su obra «Sur l'integrale de Cauchy pour un arc fermé á l'infini. Ann. Polon. Math. 8, 1960 da las fórmulas de inversión en la misma forma que para un contorno finito. No obstante, esto no es así, lo que puede mostrarse con un ejemplo sencillo.

infinito teniendo dos direcciones asintóticas diferentes, conviene introducir la corrección para el hecho de que el punto infinitamente alejado será un punto angular del contorno.

21.11. Resolución aproximada La resolución de una ecuación integral singular característica equivale a la búsqueda de los valores de contorno de la solución del problema de contorno de Riemann. Por esta razón, todo método de la resolución de un problema de contorno (véase, por ejemplo, el p. 16.3, 6°) es, al mismo tiempo, un procedimiento para resolver una ecuación integral. No obstante, la sola búsqueda de los valores de contorno puede realizarse de una manera más sencilla que la búsqueda de toda la solución del problema de contorno. En esto, precisamente, están basados los métodos especiales de la resolución de la ecuación característica. Expongamos aquí esquemáticamente dos métodos, señalados por V. V. Ivanov 1), 2)*.

Sean

$$a(t)\,\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=f(t) \tag{21.1}$$

la ecuación dada y

$$\Phi^{+}(t)-G(t)\,\Phi^{-}(t)=g(t)\quad\left(G=\frac{a-b}{a+b},\ g=\frac{f}{a+b}\right) \tag{21.4}$$

el problema de Riemann que le corresponde. Convengamos en considerar que el contorno γ es circunferencia y que

$$\varkappa=\operatorname{Ind}\frac{a-b}{a+b}\geqslant 0.$$

1. MÉTODO DE LOS MOMENTOS. La fórmula (14.18′) muestra que existen $\varkappa$ soluciones linealmente independientes del problema de Riemann las cuales en el infinito tienen los órdenes $1, 2, \ldots, \varkappa$, respectivamente. Para concretar buscaremos una solución que tiene en el infinito el orden más alto posible. La solución aproximada la buscamos en la forma

$$\Phi^{+}(t)=\sum_{k=0}^{n}c_k t^k,\qquad \Phi^{-}(t)=\sum_{k=-1}^{-n}c_k t^{k-\varkappa}. \tag{21.56}$$

Sustituyendo (21.56) en (21.4), multiplicando, luego, de una manera sucesiva por $\bar{t}^{\,j+1}$ $(j=0,\pm1,\ldots,\pm n)$ y integrando respecto de γ, obtendremos $2n+1$ ecuaciones para determinar las constantes c_k[1)]

$$\int_{\gamma}\left[\sum_{k=0}^{n}c_k t^k-G(t)\,t^{-\varkappa}\sum_{k=-1}^{-n}c_k t^k\right]\bar{t}^{\,j+1}\,dt=\int_{\gamma}g(t)\,\bar{t}^{\,j+1}\,dt. \tag{21.57}$$

Al apoyarse en los métodos generales de los cálculos aproximados (L. V. Kantoróvich, G. P. Akílov, «Análisis funcional en los espacios normados», cap. XIV; Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, «Функциональный анализ в нормированных пространствах», Физматгиз, М., 1959) se puede demostrar que para n suficientemente grande, el sistema (21.57) se resuelve incondicional y unívocamente.

---

1) Esto es la igualación de los «momentos» de los miembros primero y segundo de (21.4). De aquí proviene la denominación del método.

2. MÉTODO MIXTO. Aquí la solución se busca también en la forma (21.56), mas las ecuaciones para determinar las constantes c_k se obtienen no por la igualación de los momentos, sino de un requisito de interpolación de la coincidencia de los miembros primero y segundo (21.4) en $2n+1$ puntos de la circunferencia. Para sencillez se puede tomarlos equidistantes ($t_j = e^{j\frac{\theta}{2n+1}i}$). El sistema se escribirá en la forma

$$\sum_{k=0}^{n} c_k t_j^k - G(t_j)\, t_j^{-\varkappa} \sum_{k=-1}^{-n} c_k t_j^k = g(t_j). \tag{21.58}$$

Se puede demostrar que para n suficientemente grande, el sistema se resuelve incondicional y unívocamente.

La solución de la ecuación (21.1) se determinará mediante la fórmula

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k - \sum_{k=-1}^{-n} c_k t^{k-\varkappa}. \tag{21.59}$$

En el caso de que $\varkappa < 0$, si las condiciones de resolubilidad (16.11) están cumplidas, la solución de la ecuación puede buscarse en la forma

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k - \sum_{k=-\varkappa-1}^{-n} c_k t^{k-\varkappa}. \tag{21.60}$$

Los mismos métodos con algunas modificaciones son aplicables también a la resolución de la ecuación completa (20.3).

La exposición de los métodos, actualmente usados, de la resolución aproximada de las ecuaciones integrales singulares se da, en una forma bastante completa, en la monografía [11].

21.12. Comportamiento de la solución en los puntos angulares. De las fórmulas de Sojotski para los puntos angulares (4.18), (4.19) obtenemos un par de fórmulas que son equivalentes a las primeras:

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t), \tag{21.61}$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = \frac{\alpha}{\pi}\Phi^+(t) + \left(2 - \frac{\alpha}{\pi}\right)\Phi^-(t). \tag{21.62}$$

Al analizar con atención la solución del problema de contorno de Riemann, puede revelarse que en ella se emplea sólo una de las fórmulas de Sojotski, a saber (21.61). Mas, esta fórmula tiene para un punto angular la forma sumamente igual que para un punto de suavidad del contorno. De aquí se deduce que la solución del problema de Riemann no varía en relación con el hecho de que en el contorno están presentes puntos angulares y todo lo obtenido para este problema en un contorno suave queda inalterable también para un contorno con puntos angulares [1]).

Veamos, ahora, qué sucede con la solución de la ecuación característica

$$a(t)\,\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = f(t). \tag{21.1}$$

[1]) Por el momento tenemos en cuenta sólo el número finito de puntos angulares.

En el punto de suavidad del contorno ($\alpha = \pi$), para la integral singular se verifica la fórmula $\frac{1}{\pi i}\int \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = \Phi^+(t) + \Phi^-(t)$. Para un punto angular aislado sus valores límites a la izquierda y a la derecha se expresarán por la misma fórmula. Pero, el propio valor de la integral singular en el punto angular tiene que calcularse mediante la fórmula (21.62). Por consiguiente, el punto angular para la integral singular será el punto de discontinuidad evitable. De aquí es fácil deducir que la ecuación (21.1) no puede, en el caso general, tener en el punto angular t_0 una solución continua. En efecto, si admitimos que $b(t_0) \neq 0$ y $\varphi(t_0)$ es continua, llegamos a una contradicción, puesto que un término de la ecuación será discontinuo, y los otros restantes, continuos.

Buscaremos la solución de la ecuación en la forma

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + \xi(t), \tag{21.63}$$

donde $\varphi_1(t)$ es una función que satisface la condición de Hölder, $\xi(t)$ es nula en todos los puntos, a excepción de los angulares. Introduciendo (21.63) en la ecuación y al notar que

$$\int_L \frac{\xi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau \equiv 0, \text{ obtenemos}$$

$$a(t)\,\varphi_1(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi_1(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = f(t) - a(t)\,\xi(t) \tag{21.64}$$

Aquí, φ_1 y ξ se eligen de una manera tal que la ecuación se satisfaga.

Al introducir la integral de tipo Cauchy $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi_1(\tau)}{\tau - z}\,d\tau$, y al tomar en consideración que en todos los puntos no angulares, para sus valores límites deben cumplirse las fórmulas corrientes de Sojotski y que, además, $\xi(t) = 0$, resulta que para los puntos de suavidad la ecuación (21.1) se reduce al problema corriente de contorno de Riemann, el cual escribiremos en la forma

$$[a(t) + b(t)]\,\Phi^+(t) - [a(t) - b(t)]\,\Phi^-(t) = f(t). \tag{21.65}$$

Todos los términos de la última igualdad son funciones continuas, por lo que ella, verificándose casi en todos los puntos, se cumple necesariamente en todos los puntos [1]). Por consiguiente, la condición de contorno (21.65) es justa para todo el contorno, sin excluir los puntos angulares. Mas, por otra parte, para los puntos angulares son válidas las fórmulas de Sojotski (21.61), (21.62) (en las cuales φ debe sustituirse por φ_1). Por esto, de (21.64) resulta que para los puntos angulares del contorno la condición de contorno tendrá por expresión

$$\left[a(t) + \frac{\alpha}{\pi}\,b(t)\right]\Phi^+(t) - \left[a(t) - \left(2 - \frac{\alpha}{\pi}\right)b(t)\right]\Phi^-(t) = f(t) - a(\ )\,\xi(\ ). \tag{21.66}$$

Eliminando de aquí $f(t)$, con ayuda de (21.65), obtendremos para $\xi(t)$ la expresión siguiente:

$$\xi(t) = \frac{b(t)}{a(t)}\left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right)[\Phi^+(t) - \Phi^-(t)]. \tag{21.67}$$

---

[1]) Nuestros razonamientos (en el § 5) acerca del carácter de valores límites de la integral de tipo Cauchy queda en vigor también para el contorno que tiene puntos angulares.

En este caso se supone que en el punto angular $a(t) \neq 0$. El caso de $a(t) = 0$ se considera excepcional.

De este modo, para todos los puntos no angulares la solución de la ecuación singular se obtiene de la solución del problema de contorno de Riemann (21.65) mediante una fórmula corriente

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t);$$

para los puntos angulares a la solución se debe añadir, además, la expresión (21.67.)

Si consideramos el ángulo, formado por los vectores tangentes izquierdo y derecho del contorno, como una función del punto $\alpha = \alpha(t)$ (para los puntos de suavidad $\alpha(t) = \pi$) podemos escribir la solución de la ecuación para todo el contorno en la forma de una fórmula [1])

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + \xi(t) = \left\{1 + \frac{b(t)}{a(t)}\left[1 - \frac{\alpha(t)}{\pi}\right]\right\}\left[\Phi^+(t) - \Phi^-(t)\right], \quad (21.68)$$

donde $\Phi^{\pm}(t)$ es la solución del problema de Riemann (21.65).

Hasta ahora se suponía que en el contorno existen sólo el número finito de puntos angulares. En este caso el problema se resuelve plena y únicamente con ayuda de los razonamientos elementales. Es natural plantear la pregunta ¿para qué clase más amplia de contornos dichos razonamientos quedan en vigor? La investigación de este problema requiere atraer el aparato de la teoría de funciones de la variable real. Enunciaremos los resultados obtenidos por A. D. Alexéiev 1), 2)*.

Si el contorno L es una curva cerrada, en cada punto de la cual existen las tangentes izquierda y derecha que son continuas a la izquierda y a la derecha, respectivamente, entonces para la solución de la ecuación (21.1) queda lícita la fórmula (21.68). Señalemos que los contornos mencionados (Alexéiev los llamó las curvas de la clase R) pueden tener un conjunto numerable de puntos angulares Pero, en este caso, el número de los puntos angulares, para los cuales el salto del ángulo que la tangente forma con el eje de abscisas supera al número prefijado $\varepsilon > 0$, es siempre solamente finito. Los contornos de la clase R comprenden, como su parte integrante, la clase de las curvas de revolución limitada, introducida por I. Radón [2])

§ 22. Regularización de la ecuación completa

22.1. Composición de los operadores singulares. Según lo mostrado en el § 21, ciertas ecuaciones integrales singulares más sencillas se resuelven en forma cerrada. En lo sucesivo (cap. VII) distinguiremos algunos tipos particulares de las ecuaciones integrales singulares completas que también pueden ser resueltas en forma cerrada. En lo que se atañe al caso general, la resolución de las ecuaciones integrales singulares se efectúa por reducción de éstas a la ecuación integral de Fredholm.

El procedimiento de la reducción de la ecuación integral singular a la ecuación de Fredholm (regular) recibe el nombre de *regulariza-*

[1]) Este resultado fue obtenido mediante otro método por D. A. Kveselava 3)*.

[2]) Véase «Exitos de las ciencias matemáticas» págs. 96—124 («Успехи матем. наук», Т. 1, вып. 3—4, 1946).

ción. Más adelante expondremos diferentes métodos de la regularización, los más importantes de ellos consisten en la aplicación a un operador singular de otro operador singular, especialmente elegido.

Sean K_1, K_2 unos operadores singulares:

$$K_1\varphi \equiv a_1(t)\,\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M_1(t,\tau)}{\tau - t}\,\varphi(\tau)\,d\tau, \tag{22.1}$$

$$K_2\omega \equiv a_2(t)\,\omega(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M_2(t,\tau)}{\tau - t}\,\omega(\tau)\,d\tau. \tag{22.2}$$

El operador $K = K_2K_1$, determinado mediante la fórmula $K\varphi = K_2(K_1\varphi)$, se denominará *composición* o *producto de los operadores* K_1 y K_2 (en el orden indicado: el producto de los operadores, en el caso general, no es permutable).

Compongamos la expresión para el operador K:

$$K\varphi = K_2K_1\varphi \equiv a_2(t)\left[a_1(t)\,\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M_1(t,\tau)}{\tau - t}\,\varphi(\tau)\,d\tau\right] +$$

$$+ \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M_2(t,\tau)}{\tau - t}\left[a_1(\tau)\,\varphi(\tau) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M_1(\tau,\tau_1)}{\tau_1 - \tau}\,\varphi(\tau_1)\,d\tau_1\right]d\tau \tag{22.3}$$

y separemos su parte característica. Con este fin realicemos las siguientes transformaciones:

$$\int_L \frac{M_1(t,\tau)}{\tau - t}\,\varphi(\tau)\,d\tau = M_1(t,t)\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau +$$

$$+ \int_L \frac{M_1(t,\tau) - M_1(t,t)}{\tau - t}\,\varphi(\tau)\,d\tau,$$

$$\int_L \frac{a_1(\tau)\,M_2(t,\tau)}{\tau - t}\,\varphi(\tau)\,d\tau = a_1(t)\,M_2(t,t)\int_L \frac{\varphi(t)}{\tau - t}\,d\tau +$$

$$+ \int_L \frac{a_1(\tau)\,M_2(t,\tau) - a_1(t)\,M_2(t,t)}{\tau - t}\,\varphi(\tau)\,d\tau, \tag{22.4}$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M_2(t,\tau)}{\tau - t}\,d\tau \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M_1(\tau,\tau_1)}{\tau_1 - \tau}\,\varphi(\tau_1)\,d\tau_1 =$$

$$= M_2(t,t)\,M_1(t,t)\,\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \varphi(\tau_1)\,d\tau_1 \frac{1}{\pi i}\times$$

$$\times \int_L \frac{M_2(t,\tau)\,M_1(\tau,\tau_1)}{(\tau_1 - \tau)(\tau - t)}\,d\tau.$$

(En la última línea hicimos uso de la fórmula de la inversión del orden de integración (77).).

Es fácil ver que todos los núcleos de las integrales en los últimos sumandos de los segundos miembros en las fórmulas (22.4) tienen en el punto $\tau = t$ una singularidad cuyo orden no es mayor que

$$|\tau - t|^{\lambda-1} \quad (\lambda < 1).$$

Esto es obvio para los primeros dos núcleos, al tomar en consideración que las funciones $a_1(t)$, $M_1(t, \tau)$, $M_2(t, \tau)$ satisfacen la condición de Hölder. En el último núcleo hagamos una transformación, introduciendo la designación $M_2(t, \tau) M_1(\tau, \tau_1) = M(t_1, \tau, \tau_1)$

$$\int_L \frac{M(t, \tau, \tau_1)}{(\tau_1 - \tau)(\tau - t)} d\tau =$$

$$= \frac{1}{\tau_1 - t}\left[\int_L \frac{M(t, \tau, \tau_1)}{\tau - t} d\tau - \int_L \frac{M(t, \tau, \tau_1)}{\tau - \tau_1} d\tau\right] = \frac{\omega_1(t, \tau_1) - \omega_2(t, \tau_1)}{\tau_1 - t}$$

donde

$$\omega_1(t, \tau_1) = \int_L \frac{M(t, \tau, \tau_1)}{\tau - t} d\tau, \quad \omega_2(t, \tau_1) = \int_L \frac{M(t, \tau, \tau_1)}{\tau - \tau_1} d\tau.$$

En virtud del p. 5.1, las funciones $\omega_1(t, \tau_1)$, $\omega_2(t, \tau_1)$ satisfacen la condición de Hölder y, además, $\omega_1(t, t) = \omega_2(t, t)$, razón por la cual el último núcleo también tiene, para $\tau = t$, una singularidad no superior a $|\tau - t|^{\lambda-1}$. Al denotar, como en el p. 20.1,

$$M_1(t, t) = b_1(t), \quad M_2(t, t) = b_2(t), \tag{22.5}$$

llegamos a que el operador característico K^0 de la composición (producto) K de los dos operadores singulares K_1 y K_2, se expresa mediante la fórmula

$$K^0\varphi = (K_2K_1)^0\varphi = [a_2(t) a_1(t) + b_2(t) b_1(t)]\varphi(t) + \\ + \frac{a_2(t) b_1(t) + b_2(t) a_1(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau. \tag{22.6}$$

Escribamos los operadores K_1, K_2 en la forma de (20.3) en la que la parte característica está explícitamente separada

$$K_1\varphi \equiv a_1(t)\varphi(t) + \frac{b_1(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_L k_1(t, \tau)\varphi(\tau) d\tau, \tag{22.7}$$

$$K_2\omega \equiv a_2(t)\omega(t) + \frac{b_2(t)}{\pi i} \int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_L k_2(t, \tau)\omega(\tau) d\tau. \tag{22.8}$$

De este modo, los coeficientes $a(t)$, $b(t)$ de la parte característica del producto de los operadores K_2K_1 se expresan mediante las fórmulas

$$a(t) = a_2(t)\, a_1(t) + b_2(t)\, b_1(t), \qquad (22.9)$$
$$b(t) = a_2(t)\, b_1(t) + b_2(t)\, a_1(t).$$

Estas fórmulas no contienen los núcleos regulares k_1, k_2 y son simétricas con relación a los índices 1 y 2. De aquí deducimos:

1°. *La parte característica del producto de operadores singulares no depende de su parte regular y tampoco depende del orden en que estos operadores están puestos en el producto.*

Así pues, el cambio del orden de los operadores, como también el cambio de su parte regular sólo influye en la parte regular del producto de operadores sin alterar su parte característica.

Calculemos el coeficiente del problema de Riemann que corresponde al operador característico $(K_2K_1)^\circ$. Según las fórmulas (21.5), (22.9) tenemos

$$G(t) = \frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)} = \frac{[a_2(t)-b_2(t)]\,[a_1(t)-b_1(t)]}{[a_2(t)+b_2(t)]\,[a_1(t)+b_1(t)]} = G_2(t)\, G_1(t), \qquad (22.10)$$

donde

$$G_1(t) = \frac{a_1(t)-b_1(t)}{a_1(t)+b_1(t)}, \quad G_2(t) = \frac{a_2(t)-b_2(t)}{a_2(t)+b_2(t)} \qquad (22.11)$$

son las designaciones de los coeficientes de los problemas de Riemann que corresponden a los operadores K_1^0, K_2^0. De aquí se infiere la siguiente conclusión importante:

2°. *El coeficiente del problema de Riemann del operador* $(K_2K_1)^\circ$ *es igual al producto de los coeficientes de los problemas de Riemann para los operadores* K_1^0 y K_2^0, *y, por consiguiente, el índices del producto de operadores singulares es igual a la suma de índices de los operadores que se multiplican*:

$$\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2. \qquad (22.12)$$

En la forma completa el operador K_2K_1 tendrá por expresión

$$K_2K_1\varphi \equiv a(t)\,\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \int_L K(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau,$$

donde $a(t)$, $b(t)$ se determinan por las fórmulas (22.9). Al tomar por base las fórmulas (22.4), resulta fácil escribir la expresión explícita para el núcleo regular $k(t, \tau)$, pero no la damos aquí, puesto que no haremos uso de ella en lo que sigue adelante.

22.2. Operador regularizador. Si el operador singular K_2 es tal que el operador K_2K_1 es regular (fredholmiano), es decir, no contiene la integral singular ($b(t) \equiv 0$), entonces K_2 lleva el nombre de *ope-*

rador regularizador respecto al operador singular K_1, o, simplemente, *regularizador*.

Observemos que si K_2 es un regularizador, entonces, en virtud de la primera propiedad de la composición de operadores, regular será también el operador K_1K_2.

Encontraremos la forma general de un operador regularizador. Por definición, se debe cumplir la igualdad

$$b(t) = a_2(t)\, b_1(t) + b_2(t)\, a_1(t) = 0, \tag{22.13}$$

de la cual se desprende que

$$a_2(t) = u(t)\, a_1(t), \quad b_2(t) = -u(t)\, b_1(t), \tag{22.14}$$

donde $u(t)$ es una función arbitraria que no se desaparece y satisface la condición de Hölder.

Por consiguiente, si K es un operador singular:

$$K\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau + \int_L k_1^0(t, \tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau, \tag{22.15}$$

la forma general de su regularizador, el cual designaremos mediante $\widetilde{K}$, será

$$\widetilde{K}\omega \equiv u(t)\, a(t)\, \omega(t) - \frac{u(t)\, b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - t}\, d\tau + \int_L \widetilde{k}(t, \tau)\, \omega(\tau)\, d\tau, \tag{22.16}$$

donde $\widetilde{k}(t, \tau)$ es un núcleo fredholmiano arbitrario y $u(t)$, una función arbitraria que satisface la condición de Hölder.

Como el índice del operador regular ($b(t) \equiv 0$) es, obviamente nulo, de la segunda propiedad del producto de operadores se desprende que *el índice del operador regularizador es igual en magnitud absoluta al índice del operador regularizado y es de signo opuesto*. Esta misma conclusión puede obtenerse directamente conforme a la forma del operador regularizador (22.16), partiendo de lo que

$$\widetilde{G}(t) = \frac{\widetilde{a}(t) - \widetilde{b}(t)}{\widetilde{a}(t) + \widetilde{b}(t)} = \frac{a(t) + b(t)}{a(t) - b(t)} = \frac{1}{G(t)}.$$

De este modo, para cualquier operador singular con núcleo de Cauchy (22.15) de tipo normal ($a(t) \pm b(t) \neq 0$), existe un conjunto innumerable de operadores regularizadores (22.16) cuya parte característica depende de la función arbitraria $u(t)$ y en que figura el núcleo regular arbitrario $\widetilde{k}(t, \tau)$.

Los elementos arbitrarios $u(t)$, $\widetilde{k}(t, \tau)$ pueden ser manejados, si es necesario, de una manera tal que el regularizador satisfaga ciertas condiciones complementarias. Se puede lograr, por ejemplo, que en una ecuación regularizada sea normado el coeficiente de φ, haciéndo-

lo igual a la unidad. Para ello hay que poner $u = 1/(a^2 - b^2)$. Si no se imponen ningunas condiciones, resulta natural hacer uso de los regularizadores más sencillos, los cuales obtendremos, si en la fórmula (22.16) ponemos:

1°. $u(t) \equiv 1$, $\widetilde{k}(t, \tau) \equiv 0$, después de lo cual el regularizador tomará la forma

$$\widetilde{K}\omega = K'^{\circ}\omega \equiv a(t)\,\omega(t) - \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\omega(t)}{\tau - t}\,d\tau; \qquad (22.17)$$

2°. $u(t) \equiv 1$, $\widetilde{k}(t, \tau) = -\frac{1}{\pi i}\frac{b(\tau) - b(t)}{\tau - t}$; entonces

$$\widetilde{K}\omega = K^{\circ\prime}\omega \equiv a(t)\,\omega(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{b(\tau)\,\omega(\tau)}{\tau - t}\,d\tau. \qquad (22.18)$$

Los operadores elementales K'° y $K^{\circ\prime}$ se emplean en calidad de regularizadores con la mayor frecuencia.

Puesto que la multiplicación de operadores no es permutable, conviene distinguir dos géneros de la regularización: *regularización a la izquierda*, cuando obtenemos, como resultado, el operador $\widetilde{K}K$, y *regularización a la derecha*, cuando ésta conduce al operador $K\widetilde{K}$. En virtud de la observación hecha más arriba, el regularizador a la derecha es simultáneamente regularizador a la izquierda, y viceversa. De este modo, la *operación de regularización es permutable.*

De la primera propiedad (p. 22.1) se influye que esta *operación es recíproca*, es decir, si el operador $\widetilde{K}$ es regularizador para el operador K, entonces, viceversa, el operador K será regularizador para el operador $\widetilde{K}$.

Los operadores K_1K_2 y K_2K_1 pueden diferir uno de otro sólo en la parte regular. Si designamos con T un operador regular (fredholmiano), la relación entre los productos de operadores singulares, los cuales se diferencian en el orden que siguen los factores, se escribirá simbólicamente así:

$$K_1K_2 - K_2K_1 = T.$$

22.3. Métodos de regularización. Sea dada una ecuación integral singular completa

$$K\varphi \equiv a(t)\,\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \int_L k(t, \tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = f(t). \qquad (22.19)$$

Según lo indicado anteriormente, la resolución (como también la investigación teórica) de tal ecuación se efectúa mediante la regularización[1]. Pueden usarse tres métodos de regularización. Los dos

[1]) Los métodos de la resolución inmediata (aproximada, en el caso general) de la ecuación singular completa hasta ahora no están suficientemente elaborados. Ultimamente aparecen muchas obras dedicadas a la elaboración de estos métodos (véase [11]).

primeros se basan en la composición del operador singular dado y su regularizador (regularización a la izquierda y a la derecha). El tercer método se diferencia considerablemente de los dos primeros: la eliminación de la integral singular se efectúa por la resolución de la ecuación característica correspondiente.

En la construcción de la teoría de ecuación singular (teorema de Noether) emplearemos sólo los dos primeros métodos de regularización, razón por la cual expondremos, en primer lugar, estos métodos, y la exposición del tercer método, la daremos, para no perturbar la conexión lógica, al final del § 24.

1°. REGULARIZACIÓN A LA IZQUIERDA. Elijamos un operador regularizador (22.16)

$$\widetilde{K}\omega \equiv u(t)\, a(t)\, \omega(t) - \frac{u(t)\, b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - t}\, d\tau + \int_L \widetilde{k}(t, \tau)\, \omega(\tau)\, d\tau. \tag{22.20}$$

Al sustituir la función ω en $\widetilde{K}\omega$ por la expresión $K\varphi - f$, llegamos a una ecuación integral

$$\widetilde{K}K\varphi = \widetilde{K}f. \tag{22.21}$$

Según la definición ($\widetilde{K}$ es regularizador), el operador $\widetilde{K}K$ es fredholmiano, por consiguiente, la ecuación (22.21) es de Fredholm. De este modo, hemos transformado la ecuación integral singular (22.19) en la ecuación integral de Fredholm (22.21) respecto a la misma función incógnita $\varphi(t)$.

En esto consiste el primer método de regularización, es decir, regularización a la izquierda. Observemos que este método ya se utilizó por los fundadores de la teoría de ecuaciones integrales singulares Hilbert y Poincaré (véase las notas históricas).

2°. REGULARIZACIÓN A LA DERECHA. Al sustituir la función buscada en la ecuación (22.19) por la expresión (22.20):

$$\varphi(t) = \widetilde{K}\omega, \tag{22.22}$$

donde $\omega(t)$ es una función incógnita nueva, llegamos a una ecuación integral

$$K\widetilde{K}\omega = f, \tag{22.23}$$

la cual es también fredholmiana. De este modo, de la ecuación integral singular (22.19) respecto a una función incógnita $\varphi(t)$ hemos llegado a la ecuación integral de Fredholm respecto a una nueva función incógnita $\omega(t)$.

Al haber resuelto la ecuación de Fredholm (22.23), hallamos mediante la fórmula (22.22), la solución de la ecuación de partida (22.19). La aplicación de la fórmula (22.22) sólo requiere calcular las cuadra-

turas (una integral corriente y una integral singular). En esto consiste el segundo método de regularización (regularización a la derecha).

22.4. Relación entre las soluciones de las ecuaciones singular y regularizada. En el proceso de la reducción de la ecuación integral singular a la regular, la primera fue sometida a una transformación funcional. Esta transformación, hablando en general, puede o bien introducir otras soluciones ajenas que no satisfacen la ecuación de partida o bien causar la pérdida de algunas de ellas. Es por esta razón, que la ecuación obtenida, en el caso general, no es equivalente a la de partida. Establezcamos la relación que existe entre las soluciones de estas ecuaciones.

1°. REGULARIZACIÓN A LA IZQUIERDA. Sea

$$K\varphi = f \tag{22.24}$$

la ecuación singular dada y sea

$$\widetilde{K}K\varphi = \widetilde{K}f \tag{22.25}$$

la ecuación regular que le corresponde. Escribamos (22.25) en la forma

$$\widetilde{K}(K\varphi - f) = 0. \tag{22.25'}$$

Puesto que el operador $\widetilde{K}$ es homogéneo, toda solución de la ecuación de partida (22.24) (la función que reduce la expresión $K\varphi - f$ a cero) satisface también la ecuación (22.25'). Por consiguiente, la regularización a la izquierda no lleva a la pérdida de soluciones.

Preguntemos, ahora, si toda solución de una ecuación regularizada será la solución para la ecuación de partida. Es fácil probar que esto no es siempre así.

Consideraremos una ecuación integral singular que corresponde al operador regularizante

$$\widetilde{K}\omega = 0. \tag{22.26}$$

Sea $\omega_1(t), \ldots, \omega_p(t)$ su sistema completo de soluciones, es decir, la totalidad de todas las funciones propias linealmente independientes del operador regularizador $\widetilde{K}$.

Al tomar la ecuación (22.25') por una ecuación singular de tipo (22.26) con la función buscada $\omega = K\varphi - f$, tendremos

$$K\varphi - f = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \omega_j, \tag{22.27}$$

donde α_j son ciertas constantes.

Así pues, la ecuación regularizada es equivalente no a la de partida (22.24), sino a la ecuación (22.27).

Si aplicamos el operador $\widetilde{K}$ a la ecuación (22.27), llegaremos a la ecuación (22.25) para α_j arbitrarias. De aquí podríamos hacer una conclusión de que la ecuación (22.25) es equivalente a la (22.27) para α_j arbitrarias. (Un primerizo siempre llega a esta deducción errónea.) En realidad esto tiene lugar sólo en el caso *en que la ecuación* (22.27) *sea soluble para* α_j *arbitrarias.* Si, para su resolubilidad, el término libre debe satisfacer ciertas condiciones, entonces, introduciendo en las condiciones de resolubilidad la expresión $f + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \omega_j$, obtendremos para las magnitudes de α_j un sistema de ecuaciones. Puede ocurrir que estas ecuaciones se satisfacen para α_j arbitrarias, puede ser que de ellas se determinará sólo una parte de las constantes, mientras que las demás quedarán arbitrarias, y también puede resultar que todas las α_j tomarán valores determinados. No es difícil construir los ejemplos en los cuales se realizará cualquiera de las posibilidades citadas. Por consiguiente, la ecuación (22.25) es equivalente a la (22.27), en la cual α_j son constantes arbitrarias o determinadas. Puede suceder que la ecuación (22.27) será resoluble sólo a la condición de que todas las $\alpha_j = 0$. En este caso la ecuación (22.25) será equivalente a la ecuación de partida (22.24) y el regularizador será equivalente. En particular, si el regularizador no tiene funciones propias, el segundo miembro de la ecuación (22.27) es idénticamente igual a cero, y el regularizador es necesariamente equivalente. Tal operador existe a ciencia cierta para $\varkappa \geqslant 0$; por ejemplo, el papel de éste puede desempeñar el regularizador K'°, el cual en el caso dado no tiene funciones propias[1]).

Los problemas de la regularización equivalente para el caso general serán considerados más adelante.

2°. REGULARIZACION A LA DERECHA. Sea

$$K\varphi = f \tag{22.24}$$

la ecuación singular de partida y sea

$$K\widetilde{K}\omega = f \tag{22.28}$$

una ecuación regularizada obtenida por sustitución

$$\widetilde{K}\omega = \varphi. \tag{22.29}$$

Si ω_j es una solución de la ecuación (22.28), de la fórmula (22.29) obtenemos la solución correspondiente de la ecuación de partida

$$\varphi_j = \widetilde{K}\omega_j.$$

[1]) Esto proviene de las deducciones del p. 21.2, puesto que el índice del regularizador K'° (característico) es igual a $-\varkappa \leqslant 0$.

Por consiguiente, la regularización a la derecha no puede conducir a las soluciones ajenas.

Sea, viceversa, φ_h una solución de la ecuación de partida. En este caso, la solución de la ecuación regularizada (22.28) puede obtenerse como solución de la ecuación singular no homogénea

$$\widetilde{K}\omega = \varphi_h.$$

la cual, no obstante, puede resultar insoluble.

Así pues, la regularización a la derecha puede llevar a la pérdida de soluciones. Tal pérdida no tendrá lugar, si la ecuación (22.29) es resoluble para cualquier miembro segundo. En este caso, el operador $\widetilde{K}$ será regularizador equivalente a la derecha.

OBSERVACIÓN. Al tener en cuenta el empleo de estos resultados para exponer el material posterior del libro, hablamos de la relación que existe entre las soluciones de una ecuación singular de partida y una ecuación obtenida de ésta por medio de regularización. Pero, los propios resultados tienen una significación más amplia. Siempre, cuando se trataba de una ecuación regularizada, podíamos hablar de una ecuación obtenida de la dada, multiplicándola por cierto operador a la izquierda o a la derecha. Las correlaciones obtenidas entre las soluciones de las ecuaciones de partida y transformada son válidas para el operador de transformación (a la izquierda o a la derecha) de cualquier tipo.

§ 23. Propiedades fundamentales de ecuaciones singulares

23.1. Algunas propiedades de los operadores transpuestos. En lo sucesivo emplearemos dos propiedades de los operadores transpuestos. Estas propiedades no son características para los operadores singulares, sino son propias a todos los operadores lineales. Para comodidad del lector daremos aquí la deducción de estas propiedades. Puesto que la presencia de una integral singular no lleva consigo algunas complicaciones en la demostración, entonces, para simplificar, denotaremos el núcleo singular sencillamente con $K(t, \tau)$.

Sea K un operador singular:

$$K\varphi \equiv a(t)\,\varphi(t) + \int_L K(t, \tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau;$$

y sea K′ su operador transpuesto:

$$K'\varphi \equiv a(t)\,\psi(t) + \int_L K(\tau, t)\,\psi(\tau)\,d\tau.$$

PRIMERA PROPIEDAD. *Para dos funciones cualesquiera* $\varphi(t)$ *y* $\psi(t)$, *que satisfacen la condición de Hölder, se verifica la identidad*

$$\int_L \psi K\varphi\, dt = \int_L \varphi K'\psi\, dt. \tag{23.1}$$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos[1])

$$\int_L \psi K\varphi\, dt = \int_L \psi(t)\left[a(t)\varphi(t) + \int_L K(t,\tau)\varphi(\tau)\, d\tau\right] dt =$$

$$= \int_L \varphi(t)\, a(t)\psi(t)\, dt + \int_L \varphi(\tau)\left[\int_L K(t,\tau)\psi(t)\, dt\right] d\tau.$$

Al designar en la integral doble la variable τ por t y t por τ, y agrupando a continuación los términos de un modo correspondiente, obtendremos la ecuación buscada (23.1).

Ha de notarse que la identidad (23.1) caracteriza plenamente el operador transpuesto y a veces la toman por la definición de este operador.

SEGUNDA PROPIEDAD. *Se verifica la identidad*

$$(K_2K_1)' = K_1'K_2', \tag{23.2}$$

DEMOSTRACIÓN. Compongamos, al igual que en el p. 22.1, una composición de los operadores singulares (22.3) y, al realizar unas transformaciones no complejas, entre las cuales figura el empleo de la fórmula de inversión del orden de integración (7.7), encontraremos

$$K_2K_1\varphi = [a_1(t)\, a_2(t) + b_1(t)\, b_2(t)]\varphi(t) +$$

$$+ \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{a_1(\tau)\, M_2(t,\tau) + a_2(t)\, M_1(t,\tau)}{\tau - t}\varphi(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{\pi i}\int_L \left[\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M_1(\tau_1,\tau)\, M_2(t,\tau_1)}{(\tau_1 - t)(\tau - \tau_1)}\, d\tau_1\right]\varphi(\tau)\, d\tau$$

De aquí, por definición de operador transpuesto (p. 20.1),

$$(K_2K_1)'\psi = [a_1(t)\, a_2(t) + b_1(t)\, b_2(t)]\psi(t) -$$

$$- \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{a_1(t)\, M_2(\tau,t) + a_2(\tau)\, M_1(\tau,t)}{\tau - t}\psi(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{\pi i}\int_L \left[\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M_1(\tau_1,t)\, M_2(\tau,\tau_1)}{(\tau_1 - t)(\tau - \tau_1)}\, d\tau_1\right]\psi(\tau)\, d\tau.$$

---

[1]) Recordemos que, de acuerdo con el lema del p. 7.1, es permisible la inversión de orden de integración en la integral doble en la cual sólo una integral es singular.

Al efectuar, ahora, la composición de los operadores

$$K_2'\varphi \equiv a_2(t)\,\varphi(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M_2(\tau, t)\,\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau$$

y

$$K_1'\psi \equiv a_1(t)\,\psi(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M_1(\tau, t)\,\psi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau$$

y comparando los resultados obtenidos, nos convencemos de que la identidad (23.2) se verifica.

23.2. Teoremas fundamentales sobre las ecuaciones integrales singulares (teoremas de Noether). Las propiedades fundamentales de las ecuaciones integrales de Fredholm se caracterizan por tres teoremas, conocidos como teoremas de Fredholm (p. 20.2). Al considerar en el § 21 las ecuaciones integrales singulares más simples —ecuaciones características— hemos notado que algunas de estas propiedades (condiciones de resolubilidad de una ecuación no homogénea) coincidían con las propiedades de la ecuación de Fredholm, mientras que las otras propiedades (por ejemplo, la interdependencia entre los números de soluciones de dos ecuaciones transpuestas) diferían considerablemente. Se ha observado en aquel entonces que las propiedades fundamentales de las ecuaciones características subsisten también para el caso general de una ecuación completa. Demostremos esto y de tal modo establezcamos las propiedades fundamentales de las ecuaciones singulares de tipo considerado.

Sea dada la ecuación integral singular completa

$$K\varphi = f. \tag{23.3}$$

Sabemos que el número de soluciones de una integral de Fredholm (el número de funciones propias que pertenecen al valor propio dado) es finito. Es fácil establecer que la misma propiedad tiene lugar también para las ecuaciones singulares.

TEOREMA I. *El número de soluciones de una ecuación integral singular* (23.3) *es finito.*

La demostración se deduce directamente de la posibilidad de regularizar la ecuación singular. Como se ha establecido (p. 22.4), la regularización a la izquierda no causa la pérdida de soluciones. Por consiguiente, el número de soluciones de la ecuación singular (23.3) no es mayor que el número de soluciones de la ecuación de Fredholm $\widetilde{K}K\varphi + \widetilde{K}f$. De aquí precisamente se desprende la afirmación del teorema, lo que se concuerda plenamente con el teorema V (p. 20.2).

Demostremos que las condiciones de resolubilidad de la ecuación singular son de la misma forma que las ecuaciones de Fredholm (tercer teorema de Fredholm).

TEOREMA II. *La condición necesaria y suficiente de resolubilidad de la ecuación singular* (23.3) *consiste en el cumplimiento de las igualdades*[1])

$$\int_L f(t)\,\psi_j(t)\,dt = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n'). \tag{23.4}$$

donde $\psi_1(t), \ldots, \psi_{n'}(t)$ *es un sistema completo de soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea transpuesta* $K'\psi = 0$.

La necesidad de las condiciones (23.4) es simplemente un corolario de la identidad (23.1). En efecto, haciendo en la integral (23.4) $f(t) = K\varphi$ y empleando la identidad (23.1) y también el hecho de que $K'\psi_j = 0$, obtenemos las igualdades (23.4):

$$\int_L f(t)\,\psi_j(t)\,dt = \int_L \psi_j K\varphi\,dt = \int_L \varphi K'\psi_j\,dt \equiv 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n').$$

La demostración de la suficiencia es válida para dos casos.

1. $\varkappa \geqslant 0$. Los operadores de regularización tienen el índice $-\varkappa \leqslant 0$, por lo cual del conjunto de estos operadores siempre puede elegirse tal operador $\widetilde{K}$ que no tenga funciones propias (por ejemplo, K'^0). Por esto, la ecuación de Fredholm

$$\widetilde{K}K\varphi = \widetilde{K}f \tag{23.5}$$

es equivalente a la ecuación de partida (23.2) y, por consiguiente, las ecuaciones (23.5) y (23.3) son al mismo tiempo solubles o insolubles.

Escribamos las condiciones de resolubilidad de la ecuación (23.5):

$$\int_L \chi_j \widetilde{K} f\,dt = 0, \tag{23.6}$$

donde $\chi_j(t)$ son las soluciones de la ecuación

$$K'\widetilde{K}'\chi = 0, \tag{23.5'}$$

la cual, en virtud de la identidad (23.2), es transpuesta a la ecuación (23.5).

Al aplicar la identidad (23.1), daremos a la condición (23.6) la forma siguiente

$$\int_L f\widetilde{K}'\chi_j\,dt = 0. \tag{23.6'}$$

---

[1]) Dado que las funciones en consideración son complejas, la condición (23.4) no puede interpretarse como una condición de ortogonalidad de las funciones $f(t)$, $\psi_j(t)$ (véase el p. 24.4).

Considerando la ecuación (23.5′) como una ecuación singular con el operador K′ y la función buscada $\widetilde{K}'\chi$, vemos que la función $\widetilde{K}'\chi$ es una función propia del operador K′. Al denotarla con $\psi_j(t)$, llegaremos a la condición (23.4).

2. $\varkappa < 0$. Efectuemos la regularización a la derecha[1]). Al realizar la sustitución

$$\varphi = K^{0\prime}\omega, \tag{23.7}$$

llegaremos a una ecuación de Fredholm

$$KK^{0\prime}\omega = f, \tag{23.8}$$

equivalente a la ecuación de partida (23.3) en el sentido de que ambas son simultáneamente solubles o insolubles y que a cada solución de la ecuación (23.8) se le pone en correspondencia, por medio de la fórmula (23.7), una solución determinada de la ecuación (23.3), y, viceversa, a toda solución de la ecuación (23.3) le corresponde, de acuerdo con la fórmula (23.7), ciertas soluciones de la ecuación (23.8) (véase el p. 22.4).

Escribamos las condiciones de resolubilidad de la ecuación (23.8):

$$\int_L f(t)\,\chi_j(t)\,dt = 0,$$

donde $\chi_j(t)$ es un sistema completo de soluciones de la ecuación

$$K^0K'\chi = 0, \tag{23.8′}$$

transpuesta a la ecuación (23.8).

Consideramos (23.8′) como una ecuación singular con el operador K^0 y una función buscada $K'\chi$. El operador K^0, siendo característico y de índice negativo, no tiene funciones propias, por lo cual

$$K'\chi = 0.$$

Lo último significa que $\chi_j(t)$ es una función propia del operador K′. Al designarla con $\psi_j(t)$, llegaremos de nuevo a las condiciones (23.4).

El teorema queda completamente demostrado.

Pasemos a la demostración del teorema que sirve de punto central en la teoría de ecuación singular con núcleo de Cauchy. De acuerdo con el segundo teorema de Fredholm, las ecuaciones transpuestas de Fredholm tienen un número igual de soluciones. Contrariamente a esta circunstancia, los números de soluciones de las ecuaciones singulares transpuestas, en el caso general, no coinciden. El teorema que sigue establece entre ellos una dependencia exacta.

---

[1]) En este caso el regularizador a la izquierda sin funciones propias no existe (véase el p. 23.3, corolario 2°).

TEOREMA III. *La diferencia entre el número n de soluciones linealmente independientes de la ecuación singular* $K\varphi = 0$ *y el número* n' *de soluciones linealmente independientes de la ecuación transpuesta* $K'\psi = 0$ *sólo depende de la parte característica del operador* K *y es igual a su índice, es decir,*

$$n - n' = \varkappa. \tag{23.9}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varkappa \geqslant 0$. Elijamos $K^{0\prime}$ en calidad de un operador regularizador. En este caso, la ecuación fredholmiana $K^{0\prime}K\varphi = 0$ será equivalente a la ecuación de partida $K\varphi = 0$, y, por lo tanto, tendrá también n soluciones. En virtud del segundo teorema de Fredholm, la ecuación transpuesta

$$K'K^0\psi = 0 \tag{23.10}$$

también tendrá n soluciones. La última ecuación es equivalente (véase el p. 22.4, 1°) a la siguiente ecuación característica

$$K^0\psi = \alpha_1\psi_1 + \ldots + \alpha_{n'}\psi_{n'}. \tag{23.11}$$

Como que $\varkappa \geqslant 0$, la última ecuación, en virtud de los resultados del p. 21.2, es resoluble para cualquier segundo miembro y, por consiguiente, todas las constantes en ella, α_j, serán arbitrarias. La ecuación (23.11) tendrá el mismo número de soluciones (es decir, n) que la (23.10). Mas, ella es una ecuación característica no homogénea de índice $\varkappa \geqslant 0$, y, según la fórmula (21.12), su solución tiene por expresión

$$\psi(t) = \sum_{j=1}^{n'} \alpha_j R\psi_j + \sum_{j=1}^{\varkappa} c_j\varphi_j(t).$$

No es difícil demostrar que $n' + \varkappa$ funciones, que figuran en el segundo miembro de la última ecuación, son linealmente independientes. En efecto, supongamos que la correlación

$$\sum_{j=1}^{n'} \alpha_j R\psi_j + \sum_{j=1}^{\varkappa} c_j\varphi_j(t) \equiv 0$$

se verifica cuando sea distinta de cero aunque una α_j. Esto lleva a una contradicción, puesto que el primer miembro de la última expresión es la solución de la ecuación no homogénea $K^0\varphi = \sum \alpha_j\psi_j$, y, por tanto, no puede ser nulo. La igualdad $\sum c_j\varphi_j(t) \equiv 0$ también puede satisfacerse sólo cuando todas las c_j son iguales a cero, debido a lo que las funciones $\varphi_j(t)$ son linealmente independientes por definicion [1]).

[1]) El resultado del razonamiento puede enunciarse así: si en el segundo miembro de la igualdad está contenida una combinación lineal de n' funciones linealmente independientes con coeficientes arbitrarias y la correspondiente ecuación homogénea tiene $\varkappa$ soluciones linealmente independientes, entonces la ecuación no homogénea tendrá $n' + \varkappa$ soluciones linealmente independientes. Este resultado es de amplio uso en diferentes razonamientos.

Por consiguiente, la ecuación (23.10) tiene $n' + \varkappa$ soluciones linealmente independientes. De aquí, $n = n' + \varkappa$, lo que conduce a (23.9).

El caso de $\varkappa < 0$ no requiere otra demostración. Puesto que la propiedad de los operadores de ser transpuestos es recíproca, tomemos en calidad de un operador de partida el operador transpuesto K′ cuyo índice es $\varkappa' = -\varkappa > 0$.

En virtud de lo demostrado tendremos

$$n' - n = -\varkappa,$$

de donde llegamos, de nuevo, a la igualdad (23.9). El teorema queda demostrado.

Tres teoremas demostrados en este punto suelen llamarse teoremas de Noether (véanse las notas históricas).

23.3. Algunos corolarios. El teorema III de Noether, que expresa, como ya se ha subrayado antes, la propiedad particularísima de la ecuación singular con núcleo de Cauchy, presta la posibilidad de deducir unos corolarios de importancia que se utilizan con frecuencia en las aplicaciones de estas ecuaciones.

1°. Todos los teoremas de Fredholm, enunciados en la forma indicada en el p. 20.2, resultan no válidos para la ecuación singular y deben ser sustituidos por los teoremas de Noether que acabamos de establecer. Sin embargo, dicha divergencia se pone de manifiesto de una manera que no es del todo igual. El segundo teorema de Fredholm, que afirma la igualdad de los números de soluciones de las ecuaciones transpuestas, contradice decididamente al teorema III de Noether y debe ser sustituido por este último. En lo que se refiere a los teoremas primero y segundo de Fredholm, éstos no se extienden a las ecuaciones singulares sólo en vista de la enunciación específica que les está atribuida. Se puede cambiarla de un modo tal que estos dos teoremas, quedando válidos para las ecuaciones de Fredholm, resulten lícitos también para las ecuaciones singulares. Con este fin es sólo necesario sustituir, en la enunciación de estos teoremas, la ecuación homogénea *dada* por una *transpuesta*.

TEOREMAS I y III DE FREDHOLM (unidos y modificados).

Si una ecuación homogénea, transpuesta a la dada, es insoluble, la ecuación no homogénea es incondicionalmente resoluble. Si en cambio, la ecuación homogénea transpuesta es soluble, la ecuación no homogénea será soluble sólo cuando se cumplan las condiciones

$$\int_L f(t)\,\psi_k(t)\,dt = 0,$$

donde $\psi_k(t)$ *es un sistema completo de funciones propias del operador transpuesto.*

Si el índice del operador $\varkappa = 0$, el teorema III de Noether coincide con el segundo teorema de Fredholm. En este caso los teoremas I y III de Fredholm son aplicables para la ecuación singular en la misma enunciación en la cual ellos fueron dados para la ecuación de Fredholm. De este modo, *para una ecuación singular de índice cero resultan válidos todos los teoremas de Fredholm.* Esto fue razón por la cual N. I. Musjelishvili ([16], pág. 236) denominó *casi fredholmianas*[1]) las ecuaciones integrales singulares de índice cero.

2°. Del teorema III de Noether puede deducirse un importante

COROLARIO. *De todas las ecuaciones singulares que tienen el índice dado $\varkappa$, las ecuaciones características poseen el número mínimo de soluciones.*

En efecto, el número de soluciones de una ecuación característica es igual exactamente a $\varkappa$, cuando $\varkappa > 0$, y es nulo, cuando $\varkappa \leqslant 0$. Puesto que el número de soluciones n' de la ecuación transpuesta es no negativo, entonces

$$n = \varkappa + n' \geqslant \varkappa,$$

donde n es el número de soluciones de la ecuación singular dada.

Así pues, cualquiera que sea la elección de la parte regular del núcleo en la ecuación completa, no se puede disminuir el número de sus soluciones en comparación con la ecuación característica. Viceversa, sin dificultad alguna puede demostrarse que con una elección adecuada de la parte regular se puede lograr que la ecuación completa tenga cualquier número prefijado de soluciones superior a $\varkappa$ (véase problema 15 al final del capítulo). No obstante, como probaremos más adelante (p. 24.6), los casos, cuando el número de soluciones de una ecuación completa no coincide con el de la ecuación característica correspondiente, son excepcionales. Una ecuación completa tiene, como regla, tantas soluciones, como las tiene su ecuación característica.

De lo demostrado se deduce que para el operador K de índice negativo no existe el operador regularizador $\widetilde{K}$ sin funciones propias.

Esto influye directamente del hecho de que el índice del regularizador tiene el signo opuesto al del índice del mismo operador, y también del corolario citado más arriba.

23.4. Teoría general de los operadores de Noether. Sobre la base de la teoría expuesta de operadores integrales con núcleo de Cauchy surgió la teoría abstracta de los operadores lineales, para los cuales son válidos los teoremas de Noether. El objeto de investigación en esta teoría son los operadores lineales abstractos en los espacios de

[1]) En la teoría abstracta de operadores lineales (véase el p. 23.4), que se considera en el análisis funcional, el operador de índice cero figura entre los operadores fredholmianos.

Banach, y los operadores de Noether, por definición, se denominan aquellos operadores lineales, para los cuales están en vigor las propiedades fundamentales de operadores singulares, obtenidas por nosotros como teoremas de Noether. Con ello, el teorema III que es fundamental en la teoría de operadores singulares (de Noether) y que los distingue de la teoría de operadores fredholmianos, sirve de axioma, de modo que, el índice se determina en seguida como la diferencia entre los números de los ceros del mismo operador y un operador conjugado a este último.

Enunciemos los resultados de esta teoría que usaremos en lo sucesivo.

TEOREMA A. *El producto de dos operadores de Noether es también un operador de Noether, con la particularidad de que el índice del producto de operadores es igual a la suma de sus índices*:

$$\operatorname{Ind}(N_1 \cdot N_2) = \operatorname{Ind} N_1 + \operatorname{Ind} N_2.$$

TEOREMA B. *Si N es el operador de Noether, y T es cierto operador continuo, entonces $N + T$ es un operador de Noether y*

$$\operatorname{Ind}(N + T) = \operatorname{Ind} N.$$

TEOREMA C. *Para todo operador de Noether N existe un número $\varepsilon > 0$ tal que para todos los operadores lineales V, para los cuales $\|V\| < \varepsilon$, el operador $N + V$ es un operador de Noether y*

$$\operatorname{Ind}(N + V) = \operatorname{Ind} N.$$

Suele decirse que el operador lineal N *admite una regularización izquierda (derecha)*, si existe tal operador acotado lineal $\widetilde{N}$, que $\widetilde{N} \cdot N$ ($N \cdot \widetilde{N}$) es un operador fredholmiano. En este caso, el operador $\widetilde{N}$ lleva el nombre de *regularizador izquierdo (derecho)* del operador N.

TEOREMA D. *Para que un operador lineal N sea de Noether, es necesario y suficiente que él admita las regularizaciones izquierda y derecha.*

Una exposición relativamente comprensible de los fundamentos de la teoría abstracta, se la puede encontrar en el libro de I. I. Danilúk «Conferencias acerca de los problemas de contorno de las funciones analíticas y acerca de las ecuaciones integrales singulares». Edición de la Universidad de Novosibirsk, 1964.

23.5. Ecuaciones integrales singulares con traslación de Carleman [1]

En el § 17 hemos considerado un problema de contorno de Riemann generalizado

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t), \qquad (23.12)$$

[1]) La exposición de este punto está basada, en lo esencial, en la obra de N. K. Karapetiants y S. G. Samko 1)*. Acerca de los teoremas de Noether para problemas de contorno con traslación véase el p. 37.4.

donde $\alpha(t)$ es un desplazamiento que aplica biunívocamente el contorno sobre sí, conservando la dirección. Al problema de contorno (23.12) se reduce la ecuación integral singular con traslación (véase el problema 16 al capítulo III).

Examinemos una ecuación más general

$$N\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + b(t)\varphi[\alpha(t)] + \frac{c(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \\ + \frac{d(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - \alpha(t)}\,d\tau + \int_L k(t, \tau)\varphi(\tau)\,d\tau = f(t), \quad (23.13)$$

donde $k(t, \tau)$ es un núcleo regular, suponiendo que la función de desplazamiento $\alpha(t)$ tiene derivada $\alpha'(t)$ que satisface la condición de Hölder y no se reduce a cero. En este caso, la traslación $\alpha(t)$ puede tanto conservar como cambiar la dirección en el contorno.

Si sobre la traslación $\alpha(t)$ no se imponen ningunas condiciones adicionales, el estudio de la ecuación (23.13) representa grandes dificultades y la cuestión sobre la investigación total de dicha ecuación queda no resuelta hasta ahora. Si la función de la traslación $\alpha(t)$ satisface una condición adicional

$$\alpha[\alpha(t)] \equiv t, \quad (23.14)$$

la ecuación (23.13) admite una investigación relativamente sencilla. El desplazamiento $\alpha(t)$, que satisface la condición (23.14), se denomina *traslación de Carleman*. Probaremos que la investigación de la ecuación (23.13), para el caso (23.14), puede reducirse a la investigación de una ecuación singular sin traslación, ya estudiada por nosotros. Esto permitirá obtener para la ecuación (23.13) los teoremas de Noether, analógicos a los expuestos en el p. 23.2. La reducción de la ecuación (23.13) a una ecuación sin traslación está basada en lo que la composición de operadores singulares (23.13) con traslación de Carleman es, de nuevo, un operador singular del mismo tipo. A saber, sean N_1 y N_2 los operadores de tipo (23.13):

$$N_1 = a_1 I + b_1 Q + c_1 S + d_1 QS + K_1,$$
$$N_2 = a_2 I + b_2 Q + c_2 S + d_2 QS + K_2,$$

donde, para sencillez, figuran las designaciones

$$Q\varphi = \varphi[\alpha(t)],$$
$$S\varphi = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{\tau - t}\,d\tau,$$

y K_1, K_2 son operadores integrales con núcleos regulares. La preparación de la composición $N_2 N_1$ se realiza de una manera distinta y de-

pende de comportamiento de la función $\alpha(t)$ en el contorno, a saber, conserva ésta la dirección en el contorno o la cambia.

CASO I. *La traslación $\alpha(t)$ conserva la dirección en el contorno.*

Preparemos la composición N_2N_1, aprovechando las siguientes propiedades del operador singular S y del operador de traslación Q: 1) $S^2 = I$, de acuerdo con el p. 7.3; 2) $Q^2 = I$, en vista de (23.14) 3) en virtud de la igualdad

$$(SQ - QS)\varphi = \frac{1}{\pi i}\int_L \left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}\right]\varphi(\tau)\,d\tau \qquad (23.15)$$

los operadores S y Q son permutables salvo el sumando con núcleo regular.

Tenemos

$$N_2N_1\varphi = m(t)\,\varphi(t) + p(t)\,Q\varphi + n(t)\,S\varphi + q(t)\,QS\varphi + K\varphi, \qquad (23.16)$$

donde K es un operador con núcleo regular y

$$\begin{aligned}
m(t) &= a_1(t)\,a_2(t) + b_1(t)\,b_2[\alpha(t)] + c_1(t)\,c_2(t) + d_1(t)d_2[\alpha(t)],\\
p(t) &= a_1(t)\,b_2(t) + b_1(t)\,a_2[\alpha(t)] + c_1(t)\,d_2(t) + d_1(t)c_2[\alpha(t)],\\
n(t) &= a_1(t)\,c_2(t) + b_1(t)\,d_2[\alpha(t)] + c_1(t)\,a_2(t) + d_1(t)b_2[\alpha(t)],\\
q(t) &= a_1(t)\,d_2(t) + b_1(t)\,c_2[\alpha(t)] + c_1(t)\,b_2(t) + d_1(t)a_2[\alpha(t)].
\end{aligned} \qquad (23.17)$$

(No damos aquí las operaciones del cálculo: el mismo lector puede hacerlas.)

Recordemos que en el § 22 la regularización del operador singular K_1 se basó en la posibilidad de elegir el operador singular K_2 de una manera tal que la composición K_2K_1 sea un operador fredholmiano. Surge, naturalmente, la pregunta, si es posible, para un operador dado N_1 con traslación, elegir otro operador N_2 de una manera tal que su composición (23.16) sea simplemente un operador singular que no contenga traslación, es decir, que en (23.16)

$$p(t) = q(t) \equiv 0.$$

Resulta que esto siempre es posible. A saber, si $N = N_1$ es el operador (23.13), entonces, a título de N_2 se puede tomar el operador

$$\widetilde{N}\varphi = a[\alpha(t)]\,\varphi(t) - b(t)\,\varphi[\alpha(t)] + c[\alpha(t)]\,(S\varphi)(t) - d(t)\,(S\varphi)[\alpha(t)].$$

En este caso, de acuerdo con (23.16)

$$N\widetilde{N}\varphi = m(t)\,\varphi(t) + n(t)\,(S\varphi)(t) + T_1\varphi \qquad (23.18)$$

y, por analogía,

$$\widetilde{N}N\varphi = m(t)\,\varphi(t) + n(t)\,(S\varphi)(t) + T_2\varphi, \tag{23.19}$$

donde T_1 y T_2 son operadores con núcleos regulares, y los coeficientes $m(t)$ y $n(t)$ tienen, conforme a (23.17) la forma siguiente:

$$m(t) = a(t)\,a[\alpha(t)] + c(t)\,c[\alpha(t)] - b(t)\,b[\alpha(t)] - \\ - d(t)\,d[\alpha(t)],$$

$$n(t) = a(t)\,c[\alpha(t)] + c(t)\,a[\alpha(t)] - b(t)\,d[\alpha(t)] - \\ - d(t)\,b[\alpha(t)].$$

Puesto que una ecuación singular con núcleo de Cauchy puede reducirse a la ecuación de Fredholm, entonces, en virtud de (23.18) — — (23.19), la ecuación (23.13) con traslación también puede ser reducida a una fredholmiana. La cuestión acerca de la equivalencia de tal reducción representa dificultades considerables y hasta ahora no está investigada.

Denotemos $\Delta_1(t) = m(t) - n(t)$, $\Delta_2(t) = m(t) + n(t)$, y convengamos en consideración que $\Delta_1(t) \neq 0$, $\Delta_2(t) \neq 0$. En este caso tiene lugar el siguiente

TEOREMA 1. *Para la ecuación* (23.13) *son válidos los tres teoremas de Noether y su índice se calcula mediante la fórmula*[1])

$$\varkappa(N) = \frac{1}{2}\operatorname{Ind}\frac{\Delta_1(t)}{\Delta_2(t)}. \tag{23.20}$$

Para demostrar las afirmaciones del teorema resulta conveniente hacer uso de los teoremas del p. 23.4, aunque se podría llegar a la demostración sin referirse a la teoría general de operadores lineales. La validez de los teoremas de Noether para la ecuación (23.13) se deduce del teorema D en el p. 23.4 sobre el regularizador, puesto que de las igualdades (23.18)—(23.19) fluye que el operador N admite las regularizaciones izquierda y derecha. De (23.18)—(23.19) se desprende también, en virtud del teorema A del p. 23.4, que

$$\varkappa(N) + \varkappa(\widetilde{N}) = \operatorname{Ind}\frac{\Delta_1(t)}{\Delta_2(t)}.$$

Por esto, para demostrar la fórmula (23.20), será suficiente mostrar que $\varkappa(N) = \varkappa(\widetilde{N})$. Con este objeto introduzcamos los operadores

$$A\varphi = a(t)\,\varphi(t) + c(t)\,S\varphi,\quad \widetilde{A}\varphi = a[\alpha(t)]\,\varphi(t) + c[\alpha(t)]\,S\varphi$$

[1]) Observemos que el segundo miembro en (23.20) es un número entero, puesto que el índice de la función $\frac{\Delta_1(t)}{\Delta_2(t)}$, que no cambia al sustituir t por $\alpha(t)$, es par.

y designemos con U el operador de multiplicación por la función

$$u(t) = \alpha(t) - t.$$

Como la traslación conserva su dirección en el contorno, de la condición (23.14) proviene que $\alpha(t)$ no tiene en el contorno puntos inmóviles[1]). Por consiguiente, $u(t) \neq 0$. Por una comprobación inmediata podemos convencernos de la justeza de la igualdad

$$U\widetilde{A}N\varphi = \widetilde{N}AU\varphi + T_3\varphi, \tag{23.21}$$

donde T_3 es el operador con núcleo regular. Si $a^2(t) - c^2(t) \neq 0$, entonces los operadores A y $\widetilde{A}$ son de tipo normal y $\varkappa(A) = \varkappa(\widetilde{A})$. En virtud del teorema B del p. 23.4, de (23.21) se infiere que

$$\varkappa(U\widetilde{A}N) = \varkappa(\widetilde{N}AU),$$

de donde $\varkappa(N) = \varkappa(\widetilde{N})$, lo que se trataba de demostrar. Si la condición $a^2(t) - c^2(t) \neq 0$ no está cumplida, procedamos de la manera siguiente. Aproximemos las funciones $a(t)$, $c(t)$, por medio de las funciones próximas $a_\varepsilon(t)$, $c_\varepsilon(t)$, de tal modo que sea $a_\varepsilon^2(t) - c_\varepsilon^2(t) \neq 0$. Entonces, conforme a lo anterior, $\varkappa(N_\varepsilon) = \varkappa(\widetilde{N}_\varepsilon)$, es decir, los índices de los operadores correspondientes N_ε, $\widetilde{N}_\varepsilon$ son iguales, siempre que ε es suficientemente pequeño. Puesto que para las alteraciones pequeñas el índice queda estable (teorema C del p. 23.4) llegamos a que también $\varkappa(N) = \varkappa(\widetilde{N})$. Lo último demuestra en definitiva la fórmula (23.20).

CASO II. *La traslación $\alpha(t)$ cambia de dirección en el contorno.* En este caso la composición N_2N_1 de los operadores con desplazamiento se hace de un modo analógico, mas, a diferencia de (23.15), el núcleo regular aquí tiene a título de operador $SQ + QS$. El operador $\widetilde{N}$ conviene tomar en la forma

$$\widetilde{N}\varphi = a[\alpha(t)]\,\varphi(t) - b(t)\,\varphi[\alpha(t)] - c[\alpha(t)]\,(S\varphi)(t) - d(t)\,(S\varphi)[\alpha(t)].$$

Al razonar según el esquema indicado arriba, llegaremos al siguiente

TEOREMA 2. *Sea*

$$\Delta(t) = \{a[\alpha(t)] + c[\alpha(t)]\}[c(t) - a(t)] - [b(t) + d(t)]\{d[\alpha(t)] - b[\alpha(t)]\} \neq 0.$$

---

[1]) En efecto, supongamos lo contrario, que $\alpha(t_0) = t_0$ para un punto t_0, dispuesto en el contorno. Elijamos otro punto t_1 tal que $\alpha(t_1) \neq t_1$. La terna de puntos t_0, t_1, $\alpha(t_1)$ determina la dirección del recorrido en el contorno. Sin imágenes $\alpha(t_0)$, $\alpha(t_1)$, $\alpha[\alpha(t_1)]$, es decir, los puntos t_0, $\alpha(t_1)$, t_1 determinan el sentido opuesto en el contorno, lo que contradice a la hipótesis de que $\alpha(t)$ conserva su dirección en el contorno.

Resulta, pues, que para la ecuación (23.13) *son válidos todos los tres teoremas de Noether y el índice de la ecuación es*

$$\varkappa = \operatorname{Ind} \Delta(t).$$

La demostración del teorema 2 es analógica a la del teorema 1, con la única diferencia de que en lugar de U en la ecuación (23.21) se debe tomar el operador S.

23.6. Ecuaciones integrales singulares con función incógnita conjugada compleja [1]). Examinemos una ecuación singular de tipo

$$N\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + b(t)\overline{\varphi(t)} + \\ + \frac{c(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + d(t)\,\frac{1}{\pi i}\overline{\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau} + \\ + \int_L k(t, \tau)\varphi(\tau)\,d\tau + \overline{\int_L l(t, \tau)\varphi(\tau)\,d\tau} = f(t), \qquad (23.22)$$

donde $k(t, \tau)$ y $l(t, \tau)$ son núcleos regulares. Según veremos más adelante, tal ecuación es en mucho analógico a la ecuación con desplazamiento de Carleman que cambia de dirección en el contorno.

Igual que en el p. 23.5, podemos reducir la ecuación (23.22) a una ecuación singular sin conjugación compleja y, mediante una comprobación directa, convenceremos de que la composición de dos operadores de tipo (23.22) es, otra vez, el mismo operador. A saber, si

$$N_1\varphi = a_1\varphi + b_1\overline{\varphi} + c_1 S\varphi + d_1\overline{S\varphi} + K_1\varphi + \overline{L_1\varphi},$$
$$N_2\varphi = a_2\varphi + b_2\varphi + c_2 S\varphi + d_2\overline{S\varphi} + K_2\varphi + \overline{L_2\varphi},$$

donde K_1, L_1, K_2, L_2 son los operadores con núcleos regulares, entonces

$$N_2N_1\varphi = m\varphi + p\varphi + nS\varphi + q\overline{S\varphi} + T\varphi + \overline{V\varphi}, \qquad (23.23)$$

donde T y V son los operadores con núcleos regulares, y

$$\begin{aligned} m(t) &= a_1(t)a_2(t) + \overline{b_1(t)}\,b_2(t) + c_1(t)c_2(t) - \overline{d_1(t)}\,d_2(t), \\ p(t) &= b_1(t)a_2(t) + \overline{a_1(t)}\,b_2(t) - d_1(t)c_2(t) + \overline{c_1(t)}\,d_2(t), \\ n(t) &= c_1(t)a_2(t) + \overline{d_1(t)}\,b_2(t) + a_1(t)c_2(t) - \overline{b_1(t)}\,d_2(t), \\ q(t) &= d_1(t)a_2(t) + \overline{c_1(t)}b_2t - b_1(t)c_2(t) + \overline{a_1(t)}d_2(t). \end{aligned} \qquad (23.24)$$

[1]) Este punto está escrito a base de las obras de N. K. Karapetians y S. G. Samko. Acerca de la propiedad de ciertos problemas de contorno, que contienen funciones incógnitas conjugadas complejas, de ser noetherianos, véanse los pp. 37.3, 37.4.

Elijamos los coeficientes del operador N_2 de un modo tal que la ecuación (23.23) no contenga una conjugación de su parte principal, es decir, que

$$p(t) \equiv 0, \quad q(t) \equiv 0.$$

Para esto será suficiente poner

$$a_2(t) = \overline{a_1(t)}, \qquad b_2(t) = -b_1(t)$$
$$c_2(t) = -\overline{c_1(t)}, \qquad d_2(t) = -d_1(t)$$

Así pues, si N es un operador arbitrario de tipo (23.22), entonces, al poner

$$\widetilde{N}\varphi = \overline{a(t)}\varphi(t) - b(t)\,\overline{\varphi(t)} - \overline{c(t)}S\varphi - d(t)\,\overline{S\varphi},$$

tendremos

$$\widetilde{N}N\varphi = m(t)\,\varphi(t) + n(t)\,S\varphi + T_1\varphi + \overline{V_1\varphi}$$

y, por analogía,

$$N\widetilde{N}\varphi = m(t)\varphi(t) + n(t)S\varphi + T_2\varphi + \overline{V_2\varphi},$$

donde los operadores T_1, V_1, T_2, V_2 tienen núcleos regulares y, de acuerdo con (23.24),

$$m(t) = |a(t)|^2 - |b(t)|^2 - |c(t)|^2 + |d(t)|^2,$$
$$n(t) = \overline{a(t)}\,c(t) - a(t)\,\overline{c(t)} + \overline{b(t)}\,d(t) - b(t)\,\overline{d(t)}.$$

De este modo, lo mismo que en el punto 23.5, hemos llegado a una ecuación singular con núcleo de Cauchy. Procediendo por analogía con los razonamientos del p. 23.5, obtendremos los teoremas de Noether para la ecuación (23.22) y la fórmula de índice. Sin detenernos en este punto, enunciaremos el resultado definitivo. Ha de ser notado, previamente, que al considerar la independencia lineal de las soluciones de una ecuación homogénea, correspondiente a (23.22) y al obtener su solución general, se emplean sólo las constantes reales. Por esta razón el índice de la ecuación (23.22) resultará ser doblado (véase la fórmula (23.25)).

TEOREMA. *Sea*

$$m(t) - n(t) = [a(t) - c(t)]\,[\overline{a(t)} + \overline{c(t)}] - [b(t) + d(t)]\,[\overline{b(t)} - \overline{d(t)}] \neq 0.$$

En este caso para la ecuación (23.22) *son válidos los teoremas de Noether, y su índice es*

$$\varkappa = 2\mathrm{Ind}\,[m(t) - n(t)] \tag{23.25}$$

mientras que las condiciones de resolubilidad tienen la forma

$$\mathrm{Re}\int_L f(t)\,\psi_j(t)\,dt = 0,$$

donde $\psi_j(t)$ *es el sistema completo de soluciones de la ecuación conjugada.*

23.7. Ecuación bisingular. 1°. Una ecuación bisingular característica

$$S^a\,\varphi \equiv a_0\varphi + a_1S_1\varphi + a_2S_2\varphi + a_{12}S_{12}\varphi = g, \qquad (23.26)$$

en la cual S_1, S_2 y S_{12} son los operadores, introducidos en el p. 9.5, y a_0, a_1, a_2, a_{12}, g son todas las funciones, que satisfacen la condición de Hölder en la armazón $L = L_1 \times L_2$, es equivalente al problema de contorno de Riemann (14.36)—(14.37), donde

$$\left.\begin{matrix} A \\ C \end{matrix}\right\} = a_0 \pm a_1 \pm a_2 + a_{12},$$

$$\left.\begin{matrix} D \\ B \end{matrix}\right\} = a_0 \pm a_1 \mp a_2 - a_{12}.$$

La solución de la ecuación característica (23.26) en forma cerrada puede ser obtenida para todos los casos en que en la misma forma será obtenida la solución del problema de Riemann correspondiente.

Al operador

$$\widetilde{S}^a\psi \equiv a_0\psi - S_1\,(a_1\psi) - S_2\,(a_2\psi) + S_{12}\,(a_{12}\psi),$$

que es transpuesto al operador S^a, corresponde el problema de contorno

$$(A\Psi)^{++} - (B\Psi)^{-+} - (C\Psi)^{+-} + (D\Psi)^{--} = h.$$

Su estructura se diferencia esencialmente de la del problema (14.36)—(14.37). En esto precisamente consiste una de las distinciones entre un operador característico bidimensional y un operador unidimensional. La segunda distinción consiste en lo que la diferencia $S^aS^b - S^bS^a$ de las composiciones de dos operadores característicos S^a y S^b no es un operador regular, como fue en el caso unidimensional. Además de la parte regular, ella tiene los operadores de tipo K_1S_2, donde

$$K_1\varphi = \int_{L_1} k_1\,(t_1,\, t_2,\, \tau_1)\,\varphi\,(\tau_1,\, t_2)\,d\tau_1$$

es un operador con núcleo de singularidad débil. (De lo dicho más arriba véanse F. D. Gájov, V. A. Kakichev 1)* y V. A. Kakichev 6)*, 7)*.) En la obra 7)* de V. A. Kakichev están indicadas, además, las condiciones suficientes para que la diferencia entre dos distintas composiciones de dos operadores singulares bidimensionales completos sea regular. Estas condiciones se reducen a la resolubilidad de dos sistemas completos de ecuaciones singulares, cada uno de los cuales contiene dos funciones buscadas y depende de la segunda variable, considerada como un parámetro.

2°. PROPIEDAD NOETHERIANA DE LOS OPERADORES BISINGULARES Y DE LOS PROBLEMAS DE CONTORNO. Examinemos un operador bisingular

$$K\varphi \equiv k_0(t_1, t_2)\varphi(t_1, t_2) + \int_{L_1} \frac{k_1(t_1, t_2, \tau_1)}{\tau_1 - t_1}\varphi(\tau_1, t_2)\,d\tau_1 + \int_{L_2} \frac{k_2(t_1, t_2, \tau_2)}{\tau_2 - t_2}\varphi(t_1, \tau_2)\,d\tau_2 + \int_{L} \frac{k_{12}(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2)}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)}\varphi(\tau_1, \tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2, \tag{23.27}$$

que de una manera natural generaliza al operador (20.1). Si L es un toro y si las funciones k_0, k_1, k_2, k_{12} satisfacen la condición de Hölder según todas las variables, entonces el operador (23.27) será noetheriano en el espacio de funciones sumables con cuadrado, cuando, y sólo cuando, son invertibles cuatro operadores que tienen una estructura igual con la del operador (20.1), pero que dependen de una variable más, considerada a título de un parámetro. Este resultado, que pertenece a I. B. Simonenko 5)*, está extendido por V. S. Pilidi 2)* a las funciones sumables con la potencia de $p > 1$ en $L_1 \times L_2$, donde L_j son simples curvas cerradas suaves de Liapounov. Estos mismos autores calcularon el índice del operador noetheriano (23.27), y también el índice del problema (14.36)—(14.37), cuyas condiciones de la propiedad noetheriana están definidas en el teorema de 3° del p. 14.10.

Como conclusión ha de notarse que la investigación de la propiedad noetheriana de los operadores bisingulares está basada en el empleo del método local de estudio de operadores lineales, elaborado por I. B. Simonenko 6).*

§ 24. Regularización equivalente. Tercer método de regularización

24.1. Planteamiento del problema. Distintas interpretaciones del concepto de regularización equivalente. En el p. 22.4 se ha indicado ya que la operación de regularización conduce a una ecuación que, en el caso general, no es equivalente a la de partida. Puede tener lugar tanto la aparición de las soluciones ajenas (al regularizar a la izquierda) como las pérdidas de soluciones (al regularizar a la derecha). Resulta ser de mayor interés, teórico y práctico, la respuesta a la pregunta *en qué condiciones y cómo una ecuación singular puede reducirse a una ecuación fredholmiana equivalente*, es decir, a una ecuación que, por una parte, contenga todas las soluciones de la ecuación de partida y cuyas soluciones, por otra parte, satisfagan la ecuación de partida. El problema puede considerarse desde diferentes puntos de vista y su planteamiento, pues, necesita ser precisado.

La equivalencia de las ecuaciones dada y regularizada puede exigirse para cualquier miembro derecho. En este caso se trata de la regularización equivalente no de una ecuación individual elegida con el segundo miembro determinado, sino de toda la clase de ecuaciones con el operador singular prefijado K. De este modo, aquí se resuelve, de hecho, la cuestión de la regularización equivalente del operador K. La misma cuestión puede ser levantada para cierta ecuación determinada con el segundo miembro prefijado. En este último caso ya se tendrán en cuenta también las propiedades del segundo miembro y resulta posible una situación en que una ecuación con el mismo operador admita la regularización equivalente para un miembro derecho y no la admita para otro miembro derecho.

La resolución del problema planteado depende considerablemente también de lo siguiente: ¿exigir o no que la ecuación regularizada contenga la misma función buscada, que la de partida, o se admite formar la ecuación regular respecto de una función nueva? Con arreglo a los métodos de regularización esto significa, si exigimos necesariamente la regularización a la izquierda o aceptamos también la regularización a la derecha.

Resolvamos primero un problema más simple acerca de la regularización equivalente de un operador.

24.2. Regularización equivalente de un operador. 1°. Convengamos en considerar admisible sólo la regularización a la izquierda.

LEMA. *Para que el operador* $\widetilde{K}$ *sea un regularizador equivalente para la ecuación singular* $K\varphi = f$, *cualquiera que sea el miembro derecho* f, *es necesario y suficiente que no tenga funciones propias.*

DEMOSTRACIÓN. Si la condición está cumplida, de $\widetilde{K}(K\varphi - f) = 0$ se desprende inmediatamente que $K\varphi - f = 0$, lo que confirma su suficiencia.

Demostremos, ahora, la necesidad.

De acuerdo con la hipótesis, existe un operador $\widetilde{K}$ que regulariza del modo equivalente la ecuación $K\varphi = f$, cualquiera que sea f. Supongamos, contrariamente a la condición del lema, que el operador $\widetilde{K}$ tiene una función propia ω y hagamos $f = \omega$. Entonces, por hipótesis, las ecuaciones $K\varphi = \omega$ y $\widetilde{K}K\varphi = \widetilde{K}\omega = 0$ serán equivalentes. Más, la última ecuación y, consecuentemente, la primera tienen solución nula. De aquí resulta necesario que $\omega \equiv 0$, lo que se trataba de demostrar.

Según lo demostrado en el § 23, un operador de índice no negativo tiene un regularizador privado de funciones propias, mientras que un operador de índice negativo no posee regularizador de este género. De la unión de este resultado con el lema demostrado se deduce el siguiente

TEOREMA. *Para que una ecuación integral singular* $K\varphi = f$ *admita la regularización equivalente, cualquiera que sea el segundo*

miembro f, es necesario y suficiente que el índice del operador K *sea no negativo.*

El teorema establecido resuelve enteramente la cuestión acerca de la regularización equivalente del operador a la izquierda.

La exigencia de emplear sólo la regularización a la izquierda hace imposible, como lo muestra el resultado obtenido, la regularización equivalente de toda la clase de operadores que tienen índice negativo.

2°. Convengamos en considerar admisible, ahora, la regularización tanto a la izquierda como a la derecha. Además, consideremos equivalente una regularización a la izquierda, si a cada solución φ de la ecuación de partida $K\varphi = f$ le corresponde, por la fórmula de sustitución $\widetilde{K}\omega = \varphi$, una solución determinada ω de la ecuación regularizada $K\widetilde{K}\omega = f$, y viceversa. En este caso, es fácil mostrar que todas las restricciones dejan de ser de rigor y se hace posible la regularización equivalente de toda la clase de operadores singulares.

Todo lo necesario para fundamentar esta afirmación está contenido en el p. 22.4 y aquí nos limitamos sólo a las deducciones definitivas.

El operador $\widetilde{K} = K'^{0}$ *es un regularizador equivalente para cualquier índice, con la particularidad de que*

si $\varkappa \geqslant 0$, *se debe emplear la regularización a la izquierda,*

si $\varkappa \leqslant 0$, *la regularización a la derecha.*

En el último caso se obtiene una ecuación respecto de nueva función ω, pero si ésta se conoce, se puede hallar todas las soluciones de la ecuación de partida por medio de cuadraturas, con la particularidad de que, según la propiedad de la regularización a la derecha, las soluciones ajenas no pueden aparecer. De este modo, si no hay restricciones respecto al método de regularización y el concepto de equivalencia está generalizado, entonces podemos regularizar de la manera equivalente todo operador singular. Este hecho ya lo hemos aprovechado, sin enunciar en calidad de una propiedad singular, en la demostración de los teoremas de Noether.

24.3. Regularización equivalente a la izquierda de una ecuación singular. Condición necesaria. Examinemos el problema siguiente que es de importancia práctica. Sea dada la ecuación singular

$$K\varphi = f \tag{24.1}$$

cuyo miembro segundo está definido de un modo determinado. Hace falta establecer a qué condiciones existe para esta ecuación el regularizador a la izquierda $\widetilde{K}$, que la lleva a la ecuación equivalente de Fredholm

$$\widetilde{K}K\varphi = \widetilde{K}f, \tag{22.4}$$

y construir tal operador $\widetilde{K}$, si existe.

Si el índice $\varkappa \geqslant 0$, existe, como sabemos, un operador que no tiene funciones propias (por ejemplo, K'^0). Será, evidentemente, un regularizador equivalente a la izquierda para f cualquiera. Es de interés, por esto, el caso en que $\varkappa < 0$, cuando no existe regularizador sin funciones propias.

Es fácil encontrar la condición necesaria para que la ecuación dada tenga un regularizador equivalente. Según lo establecido en el p. 22.4, 1°, la ecuación (24.2) será equivalente a la ecuación

$$K\varphi = f + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \omega_j, \tag{24.3}$$

donde $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ representan un sistema completo de funciones propias del operador $\widetilde{K}$, y $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ son ciertas constantes arbitrarias o determinadas.

Por definición, la ecuación (24.2) será equivalente a la de partida (24.1) cuando, y sólo cuando, todas las α_j resulten ser nulas. Veamos cómo esto puede suceder.

Sea $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_q$ el sistema completo de funciones propias del operador transpuesto K'. Al multiplicar sucesivamente la ecuación (24.3) por $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_q$ y al integrar a lo largo del contorno L, obtendremos, tomando en consideración las identidades $\int_L K\varphi\psi_j\, dt = 0$, el sistema de ecuaciones

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\alpha_j = -f_i \quad (i = 1, 2, \ldots, q), \tag{24.4}$$

donde

$$a_{ij} = \int_L \psi_i \omega_j\, dt, \quad f_i = \int_L f\psi_j\, dt.$$

Es obvio que el sistema (24.4) pede satisfacerse con valores nulos de α_j sólo si todas las $f_i = 0$. Pero las últimas igualdades son las condiciones de resolubilidad de la ecuación (24.1). De aquí tenemos el siguiente resultado:

Si el operador regularizador tiene funciones propias distintas de cero, entonces para que la ecuación integral singular dada (24.1) *pueda ser reducida a la ecuación equivalente de Fredholm* (24.2), *es necesario que ella sea resoluble.*

¿Será suficiente esta condición? La respuesta es positiva, pero no es fácil demostrarla. Para la demostración se necesitan algunas consideraciones auxiliares y, por esto, procedamos con la exposición de éstas.

24.4. Ecuación conjugada. Otra forma de las condiciones de resolubilidad de la ecuación no homogénea. El concepto de operador

transpuesto, introducido en el p. 20.1, es distinto del concepto análogico de operador conjugado que se utiliza en la teoría de operadores lineales complejos. En esta relación la condición de resolubilidad también adquirió otra forma. Por ejemplo, nunca pudimos enunciarla como condición de ortogonalidad del término independiente a la solución de una ecuación conjugada. Ahora introduzcamos el concepto de operador conjugado y daremos a conocer la nueva forma de las condiciones de resolubilidad de la ecuación no homogénea.

Basándonos en los mismos razonamientos que en el p. 23.1, la singularidad del núcleo no la destacaremos explícitamente.

Sea K un operador singular definido mediante la fórmula

$$K\varphi \equiv a(t)\,\varphi(t) + \int_L K(t, \tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau, \tag{24.5}$$

y sea

$$\tau = \tau(\sigma) \quad (0 \leqslant \sigma \leqslant l) \tag{24.6}$$

la ecuación del contorno L, donde σ es una abscisa de arco. Cuando σ toma el valor particular s, denotaremos con $t(s)$ la ordenada compleja correspondiente t.

Convengamos en designar las funciones de variables reales s, σ, que se obtienen por la sustitución de variables (24.6), con las mismas letras que las funciones de partida de las variables complejas t, τ. Por ejemplo,

$$\varphi(t) = \varphi[t(s)] \sim \varphi(s),$$
$$K(t, \tau) = K[t(s), \tau(\sigma)] \sim K(s, \sigma), \text{ etc.}$$

Entonces el operador (24.5) puede escribirse en la forma

$$K\varphi \equiv a(s)\,\varphi(s) + \int_0^l K(s, \sigma)\,\tau'(\sigma)\,\varphi(\sigma)\,d\sigma.$$

Llamaremos el operador K*, determinado mediante la fórmula

$$K^*\psi^* \equiv \overline{a(s)}\,\psi^*(s) + \int_0^l \overline{K(\sigma, s)\,t'(s)}\,\psi^*(\sigma)\,d\sigma, \tag{24.7}$$

operador *conjugado* del operador K.

Las ecuaciones $K\varphi = 0$ y $K^*\psi^* = 0$ se denominarán *conjugadas*. El operador conjugado satisface, evidentemente, a la condición

$$(K^*)^* = K.$$

Llamaremos la expresión

$$(\varphi, \psi) = \int_0^l \varphi(s)\,\overline{\psi(s)}\,ds \tag{24.8}$$

producto escalar de dos funciones φ y ψ.

Es evidente que

$$(\psi, \varphi) = \int_0^l \psi(s)\,\overline{\varphi(s)}\,ds = \overline{(\varphi, \psi)}.$$

Si $(\varphi, \psi) = 0$, las funciones φ y ψ se denominan *ortogonales*.

Por analogía con el p. 23.1 podemos demostrar la identidad

$$(K\varphi, \psi) = (\varphi, K^*\psi). \tag{24.9}$$

Establezcamos la relación entre las soluciones de una ecuación transpuesta

$$K'\psi \equiv a(t)\,\psi(t) + \int_L K(\tau, t)\,\psi(\tau)\,d\tau = 0 \tag{24.10}$$

y una ecuación conjugada

$$K^*\psi^* \equiv \overline{a(s)}\,\psi^*(s) + \int_0^l \overline{K(\sigma, s)\,t'(s)}\,\psi^*(\sigma)\,d\sigma = 0. \tag{24.11}$$

Pasando a las magnitudes conjugadas complejas y empleando las designaciones del p. 12.1, obtendremos

$$\overline{K}^*\overline{\psi}^* \equiv t'(s)\left[a(t)\,\frac{\overline{\psi^*(t)}}{t'(s)} + \int_L K(\tau, t)\,\frac{\overline{\psi^*(\tau)}}{\tau'(\sigma)}\,d\tau\right] = 0. \tag{24.11'}$$

De la comparación de las ecuaciones (24.10) y (24.11') se infiere que las soluciones de las ecuaciones transpuesta y conjugada se encuentran entrelazadas del modo siguiente

$$\frac{\overline{\psi^*(t)}}{t'(s)} = \psi(t) \quad \text{ó} \quad \overline{\psi^*(t)} = t'(s)\,\psi(t). \tag{24.12}$$

De aquí se deduce, entre otras cosas, que las ecuaciones conjugada y transpuesta a la dada, tienen el mismo número de soluciones.

Al hacer uso de las fórmulas (24.12), podemos comunicar otra forma a la condición de resolubilidad de la ecuación singular no homogénea (24.1)

$$K\varphi = f.$$

De (23.4) tenemos

$$\int_0^l f(t)\,\psi_j(t)\,t'(s)\,ds = 0.$$

Por consiguiente, tomando en consideración (24.12), obtenemos

$$(f, \psi_j^*) = \int_0^l f(t)\,\overline{\psi_j^*(t)}\,ds = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n'). \tag{24.13}$$

Las condiciones de resolubilidad se pueden enunciar en la forma siguiente:

Para que la ecuación singular no homogénea (24.1) *sea resoluble, es necesario y suficiente que el término independiente de la ecuación sea ortogonal a todas las soluciones de la ecuación homogénea conjugada* (24.11)

Obtendremos una identidad auxiliar más

$$(K^*K\omega, \omega) = (K\omega, K\omega) = \int_0^l |K\omega|^2\,ds. \tag{24.14}$$

Al considerar la función $K^*K\omega$ como resultado de la aplicación del operador K^* a la función $K\omega$, obtendremos el primer miembro de la igualdad a partir de la identidad (24.9), y el segundo miembro, conforme a la definición del producto escalar (24.8).

Volveremos, ahora, al problema de la regularización equivalente de la ecuación.

24.5. Teorema de la regularizacion equivalente de la ecuación. Resolvente singular. Solución singular.

1°. LEMA. *Supongamos que la ecuación integral singular no homogénea*

$$K\varphi = f \tag{24.1}$$

es soluble. En este caso será equivalente a la ecuación

$$K^*K\varphi = K^*f. \tag{24.15}$$

Por hipótesis del teorema existe una función $\varphi_1(t)$, que satisface la ecuación (24.1). Por ser el operador K^* homogéneo, esta función será también la solución de la ecuación (24.15). Demostremos que toda otra función $\varphi_2(t)$ la cual satisface la ecuación (24.15), también satisfará la ecuación (24.1).

Se tiene

$$K^*K\varphi_1 = K^*f,$$
$$K^*K\varphi_2 = K^*f.$$

Sustrayendo la primera igualdad de la segunda, llegamos a que la función $\omega = \varphi_2 - \varphi_1$ es una solución de la ecuación homogénea

$$K^*K\omega = 0.$$

Formemos, ahora, un producto escalar de las funciones $K^*K\omega$ y ω. Al hacer uso de la última igualdad y la identidad (24.14), obtendremos

$$0 = (K^*K\omega, \omega) = \int_0^l |K\omega|^2 ds.$$

De aquí, $K\omega = 0$ ó

$$K\varphi_2 = K\varphi_1.$$

Pero, $K\varphi_1 = f$, por lo cual

$$K\varphi_2 = f,$$

lo que se trataba de demostrar.

Ahora podemos proceder a la obtención del resultado principal.

Mediante un cálculo directo es fácil mostrar que K^*, en el caso general, no es operador regularizador para el operador K (será regularizador sólo en el caso si el operador K sea real). Por consiguiente, la ecuación (24.15) no será fredholmiana. El índice del operador conjugado K^* será coincidente con el del operador transpuesto K', por eso, es igual al índice del operador dado K de signo contrario. Puesto que el índice de la composición de dos operadores es igual a la suma de índices de los operadores componentes (p. 22.1), por consiguiente, *la ecuación* (24.15) *es una ecuación integral singular cuyo índice es nulo.* Mas, tal ecuación, como sabemos (p. 22.4), posee un regularizador sin funciones propias, por ejemplo, el operador $(K^*K)'^0$.

De este modo queda establecido el siguiente resultado principal acerca de la regularización equivalente de la ecuación.

TEOREMA. *Si el segundo miembro f (t) en la ecuación singular*

$$K\varphi = f$$

es tal que ésta es soluble, entonces existe un operador regularizador a la izquierda que la reduce a una ecuación equivalente de Fredholm.

De acuerdo con la demostración realizada más arriba, a título de tal regularizador equivalente puede ser elegido el operador

$$\widetilde{K} = (K^*K)'^0K^*, \qquad (24.16)$$

donde K^* es un operador conjugado que se determina mediante la fórmula (24.7), y $(K^*K)'^0$ es el operador característico, determinado según el operador K^*K mediante la fórmula (20.6).

Por consiguiente, aunque, cuando $\varkappa < 0$, no existe (como se ha probado en el p. 24.2), operador que realice una regularización para cualquier miembro segundo, no obstante, si el término independiente f satisface la condición de resolubilidad de la ecuación singular $K\varphi = f$, para el operador existe y puede ser eficazmente construido un operador regularizador equivalente. Llama la atención el hecho de que la forma de este operador no depende del segundo miembro, de modo que para todas las ecuaciones solubles con el operador prefijado K se puede elegir el mismo regularizador equivalente.

Un regularizador equivalente, determinado mediante la fórmula (24.16), de ninguna manera es el único que posee tal propiedad. El producto de dos operadores fredholmianos, es, evidentemente, el operador de Fredholm. De aquí se deduce que al multiplicar el regularizador equivalente (24.16) por un operador fredholmiano arbitrario sin funciones propias, obtendremos, otra vez, un regularizador equivalente. Por consiguiente, para toda ecuación integral singular soluble puede construirse un conjunto infinito de regularizadores a la izquierda que la reduzcan a una ecuación equivalente de Fredholm.

2°. RESOLVENTE SINGULAR. Sea

$$K\varphi = f \tag{20.3}$$

la prefijada ecuación integral singular soluble, y sea $\widetilde{K}$ uno de sus regularizadores equivalentes. En este caso $\widetilde{K}K\varphi = \widetilde{K}f$ es una ecuación fredholmiana, equivalente a la ecuación de partida (20.3). Al resolver según la fórmula (20.11), obtenemos

$$\varphi(t) = \widetilde{K}f + \int_L H(t, \tau)\, \widetilde{K}f\, d\tau + \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t).$$

Conforme a los razonamientos del p. 22.2, el operador $\widetilde{K}$ se determina mediante la fórmula (22.16). Para normalizar, hagamos en ella $u = \frac{1}{a^2 - b^2}$ y designemos

$$\frac{a}{a^2 - b^2} = A, \quad \frac{b}{a^2 - b^2} = B.$$

Entonces tendremos

$$\varphi(t) = A(t) f(t) - \frac{B(t)}{\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{\tau - t}\, d\tau + \int_L \gamma(t, \tau) f(\tau)\, d\tau + \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t),$$

donde $\gamma(t, \tau)$ es cierto núcleo freholmiano bien determinado. Escribamos la última fórmula en la forma

$$\varphi(t) = A(t) f(t) + \int_L \Gamma(t, \tau) f(\tau)\, d\tau + \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t). \qquad (24.17)$$

El núcleo

$$\Gamma(t, \tau) = -\frac{B(t)}{\pi i (\tau - t)} + \gamma(t, \tau)$$

se denomina *resolvente singular de la ecuación integral singular* (20.3). De la comparación de las fórmulas (24 17) y (20 11) se deduce que el núcleo $\Gamma(t, \tau)$ desempeña el mismo papel en la resolución de la ecuación integral singular que la resolvente de la ecuación de Fredholm.

L. Berg 1)*, 2)*, quien fue primero en obtener la resolvente singular (por medio de un procedimiento más complejo en comparación con el expuesto más arriba), señaló una serie de sus propiedades, análogicas a las propiedades de la resolvente fredholmiana; en particular, él obtuvo dos ecuaciones integrales, que entrelazan la resolvente singular y el núcleo de la ecuación singular y que son enteramente analógicas a las ecuaciones correspondientes en la teoría de la resolvente fredholmiana.

3°. SOLUCIÓN SINGULAR. Una de las aplicaciones importantes de la resolvente singular, propuesta por L. Berg 2)*, es la determinación de las condiciones de existencia de las así llamadas soluciones singulares.

La teoría de ecuaciones integrales singulares con coeficientes de la clase de Hölder, expuesta en el presente capítulo, permite lograr que todas sus soluciones obtenidas sean de la clase de Hölder. La admisión, a título de soluciones, de la clase más amplia de funciones con singularidades integrables no ensancha, en realidad, la clase de soluciones. Las mismas soluciones integrables de las ecuaciones integrales singulares con coeficientes de la clase de Hölder pertenecen necesariamente a la clase de Hölder.

Resulta natural plantear la cuestión, ¿si puede obtener nuevas soluciones, admitiendo las singularidades integrables? Al considerar admisibles sólo las singularidades, para las cuales se conserva la integrabilidad en el sentido de valor principal, tendremos la solución en la form .

$$\varphi(t) = \frac{m(t, t_1)}{t - t_1}$$

donde t_1 es un punto del contorno y $m(t, t_1)$ satisface la condición de Hölder.

Al sustituir φ en la ecuación (20.3) y tomando en consideración que el segundo miembro es una función acotada y el término integral, de acuerdo con los razonamientos del p. 7.2, tendrá en el punto t_1 una singularidad de orden inferior a la unidad, llegamos a que para que $\varphi(t)$ satisfaga la ecuación, es necesario que sea

$$a(t_1) = 0.$$

De este modo, las soluciones singulares pueden engendrar sólo tales puntos t_1 que son raíces del coeficiente $a(t)$.

Es fácil obtener la segunda condición necesaria de resolubilidad. Introduzcamos $\varphi(t)$ en la ecuación integral (20.3), después de multiplicar ambos miembros por las soluciones ψ_j de la ecuación transpuesta $K'\psi = 0$, la integramos. Al invertir en la integral singular reiterada el orden de integración, rigiéndose de la fórmula de Poincaré—Bertrand (7.7), y al tomar en cuenta la identidad (23.1), llegamos a las igualdades

$$b(t_1)\, m(t_1, t_1)\, \psi_j(t_1) + \int_L f(t)\, \psi_j(t)\, dt = 0,$$

que deben cumplirse para el sistema completo de soluciones de la ecuación transpuesta $K'\psi = 0$.

Al hacer uso de la resolvente singular, L. Berg 2)* probó que la última condición, junto con la igualdad $a(t_1) = 0$, es también suficiente para que exista la solución singular $\varphi(t)$.

En relación con lo expuesto fijemos la atención en la diferencia que existe entre las ecuaciones integrales de primer género y de segundo género. Para las ecuaciones fredholmianas, según se sabe, las propiedades de estos dos tipos de ecuaciones son substancialmente distintas. La causa radica en que para los núcleos de Fredholm el operador $\int_L k(t, \tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau$ traslada la función $\varphi(t)$ en una función de otra clase más estrecha; por ello, para que se cumpla la igualdad $\int_L k(t, \tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau = f(t)$ (la ecuación de primer género), el segundo miembro se debe elegir de una clase más estrecha, lo que conduce a unas condiciones complementarias para la función $f(t)$ (condición de Picard). En una ecuación singular la función $\varphi(t)$ y la integral singular de ésta pertenecen a una misma clase, y, por consiguiente, la ausencia en la ecuación de un término, que contenga la propia función, no cambia la clase del primer miembro; por esta razón, cuando se buscan las soluciones corrientes, las propiedades de las ecuaciones de primer y segundo géneros no se diferencian.

Otra cosa es cuando se buscan las soluciones singulares. Para la ecuación de primer género, $a(t) \equiv 0$, por lo cual la condición necesa-

ria se satisface idénticamente y, consecuentemente, cualquier punto t_1 del contorno puede hacerse fuente de una solución singular. Por ejemplo, una ecuación más sencilla de primer género $\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = 0$ ($a = k = f = 0$, $b = 1$) se satisface con la función $\frac{1}{t - t_1}$ para cualquier t_1 (véase el p. 7.3.). Por lo tanto, esta ecuación tiene un continuo de soluciones singulares.

24.6. Regularización mediante la solución de la ecuación característica (método de Carleman — Vekua). En la teoría de ecuación singular, construida más arriba, sólo se utilizaba la regularización, basada en la composición de operadores singulares; el tercer método de regularización, que se ha mencionado en el p. 22.3 y que consiste en el empleo de la solución explícita de una ecuación característica, estaba hasta ahora a un lado.

Expondremos, ahora, este método que es de importancia tanto en el sentido práctico, como teórico.

Al trasladar el término regular de la ecuación singular al miembro derecho, escribámoslo en la forma siguiente:

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t) - \int_L k(t, \tau)\varphi(\tau) d\tau \qquad (24.18)$$

o, en la forma simbólica,

$$K^0\varphi = f - k\varphi. \qquad (24.18')$$

Resolvamos la última ecuación como característica, considerando temporalmente el segundo miembro en calidad de una función conocida[1]). Al aplicar la fórmula (21.9), obtenemos

$$\varphi(t) = \left[a(t) f(t) - \frac{b(t) Z(t)}{\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + b(t) Z(t) P_{\varkappa-1}(t)\right] -$$

$$-\left[a(t)\int_L k(t, \tau)\varphi(\tau) d\tau - \frac{b(t) Z(t)}{\pi i}\int_L \frac{d\tau_1}{Z(\tau_1)(\tau_1 - 1)}\int_L k(\tau_1, \tau)\varphi(\tau) d\tau\right]; \qquad (24.19)$$

cuando $\varkappa \leqslant 0$, se debe poner $P_{\varkappa-1}(t) \equiv 0$. Cambiando en la integral doble el orden de integración, escribamos la expresión, encerrada

[1]) La idea en que se basa el último método de regularización se usa con frecuencia de la física matemática con el fin de reducir los problemas de contorno a las ecuaciones integrales (véase, por ejemplo, la reducción del problema de Sturm — Liouville a una ecuación integral, o bien la reducción del problema de contorno de la ecuación de tipo elíptico a las ecuaciones integral o integral diferencial).

entre corchetes, en la forma siguiente

$$\int_L \left[a(t)\, k(t, \tau) - \frac{b(t)\, Z(t)}{\pi i} \int_L \frac{k(\tau_1, \tau)}{Z(\tau_1)(\tau_1 - t)}\, d\tau_1 \right] \varphi(\tau)\, d\tau.$$

Dado que $Z(t)$ satisface la condición de Hölder (por consiguiente, es acotada) y no se reduce a cero, mientras que $k(\tau_1, \tau)$, cerca de $\tau_1 = \tau$, tiene la acotación $|k(\tau_1, \tau)| < \frac{c}{|\tau_1 - \tau|^{\lambda}}$, es fácil ver que también toda la integral

$$\int_L \frac{k(\tau_1, \tau)}{Z(\tau_1)(\tau_1 - t)}\, d\tau_1$$

tiene la misma acotación que $k(\tau_1, \tau)$. Por consiguiente, el núcleo $K(t, \tau) = R_t k(t, \tau) =$

$$= a(t)\, k(t, \tau) - \frac{b(t)\, Z(t)}{\pi i} \int_L \frac{k(\tau_1, \tau)}{Z(\tau_1)(\tau_1 - t)}\, d\tau_1 \qquad (24.20)$$

es fredholmiano. Trasladando todos los términos con $\varphi(t)$ al miembro izquierdo, obtenemos

$$\varphi(t) + \int_L K(t, \tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau = f_1(t), \qquad (24.21)$$

donde $K(t, \tau)$ es el núcleo fredholmiano, determinado mediante la fórmula (24.20), y $f_1(t)$, un término independiente que tiene la forma

$$f_1(t) = a(t)\, f(t) - \frac{b(t)\, Z(t)}{\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + b(t)\, Z(t)\, P_{\varkappa - 1}(t). \qquad (24.22)$$

Si el índice de la ecuación (24.19) $\varkappa < 0$, entonces, de acuerdo con el p. 21.2, la fórmula (21.9), en la cual se debe poner $P_{\varkappa-1}(t) \equiv 0$, se verifica sólo cuando se cumplen las condiciones (21.13). En el caso dado se debe sustituir $f(t)$ de la última condición por

$$f(t) - \int_L k(t, \tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau.$$

Por consiguiente, cuando $\varkappa < 0$, a la par con la ecuación de Fredholm (24.21), la función tendrá que satisfacer las correlaciones

$$\int_L \left[\int_L \frac{k(t, \tau)}{Z(t)}\, t^{k-1}\, dt \right] \varphi(\tau)\, d\tau = \int_L \frac{f(t)}{Z(t)}\, t^{k-1}\, dt \qquad (24.23)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, -\varkappa).$$

Enunciaremos el resultado obtenido.

Cuando $\varkappa \geqslant 0$, *la solución de la ecuación integral singular completa* (24.18) *se reduce a la solución de la ecuación integral de Fredholm* (24.21). *Cuando* $\varkappa < 0$, *la ecuación* (24.18) *se reduce a la ecuación* (24.21) (*en la que se debe poner* $P_{\varkappa-1}(t) \equiv 0$) *justamente con las condiciones funcionales* (24.23), *las cuales pueden escribirse en la forma*

$$\int_L \rho_k(\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = f_k \quad (k = 1, 2, \ldots, -\varkappa) \tag{24.24.}$$

donde $\rho_k(\tau) = \int_L \frac{k(t, \tau)}{Z(t)}\, t^{k-1}\,dt$ *son funciones conocidas y* $f_k = \int_L \frac{f(t)}{Z(t)}\, t^{k-1}\,dt$ *son números conocidos.*

Las igualdades (24.24) constituyen las condiciones de resolubilidad de la ecuación regularizada (24.21). No obstante, no todas ellas son las condiciones de resolubilidad de la ecuación integral singular de partida (24.18); puede suceder que una parte de ellas sean las condiciones de equivalencia de estas dos ecuaciones. Examinemos por separado las condiciones de dos tipos mencionados.

Supongamos que entre las funciones ρ_k se tienen h linealmente independientes. Podríamos elegir la numeración de una manera tal que estas últimas sean $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_h$. En este caso tendremos

$$\int_L \rho_k(t)\,\varphi(t)\,dt = f_k \quad (k = 1, 2, \ldots, h). \tag{24.24'}$$

Además se cumplirán $\nu = |\varkappa| - h$ correlaciones linealmente independientes

$$\alpha_{j1}\rho_1 + \ldots + \alpha_{j|\varkappa|}\rho_{|\varkappa|} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Multipliquemos sucesivamente las igualdades (24.24) por $\alpha_{j1}, \ldots, \alpha_{j|\varkappa|}$ y sumemos. Tomando en consideración las últimas igualdades e introduciendo la designación

$$\psi_j(t) = [Z(t)]^{-1} \sum_{k=1}^{|\varkappa|} \alpha_{jk} t^{k-1}, \text{ obtendremos}$$

$$\int_L f(t)\,\psi_j(t)\,dt = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, \nu). \tag{24.24''}$$

Estas igualdades, privadas de la función buscada φ, serán las condiciones de resolubilidad, las cuales deben satisfacer necesariamente el término independiente f para que la ecuación singular de partida y su ecuación regularizada sean solubles. Las igualdades (24.24') serán las condiciones de equivalencia de las ecuaciones singular de partida, por una parte, y regularizada, por otra parte.

De las soluciones de la ecuación fredholmiana (24.21) satisfacen la ecuación singular dada (24.18) sólo aquellas que satisfacen las condiciones (24.24').

De este modo, cuando $\varkappa \geqslant 0$, la ecuación regularizada (24.21) es equivalente a la ecuación singular de partida. Cuando $\varkappa < 0$, la ecuación de partida será equivalente a la regularizada (junto con las condiciones de resolubilidad (24.24'') que son comunes para ellas) y a las condiciones (24.24').

I. N. Vekua 2)* señaló una sustitución lineal tal que para una nueva función buscada las condiciones (24.24') se cumplen automáticamente. La ecuación regularizada con tal función ya será enteramente equivalente a la ecuación de partida.

En la base del método expuesto de regularización se puede construir la teoría completa de ecuación integral singular (véase I. N. Vekua 2)*.

Volveremos, en conclusión, a la cuestión (que ya hemos tocado al final del p. 23.3) acerca de la correlación entre los números de soluciones de una ecuación completa y una ecuación característica que le corresponde. Por analogía con lo hecho en la teoría de ecuaciones de Fredholm, introduzcamos en la parte regular del núcleo de la ecuación integral singular un parámetro arbitrario λ, a título de factor. En este caso la ecuación (24.18') tendrá por expresión

$$K^0\varphi = f - \lambda k\varphi, \tag{24.18''}$$

y, después de la regularización, la ecuación correspondiente de Fredholm tomará la forma

$$\varphi(t) + \lambda \int_L K(t, \tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = f_1(t), \tag{24.21'}$$

donde K y f_1 se determinan, como antes, mediante las fórmulas (24.20), (24.22) (suponemos que $\varkappa \geqslant 0$). Puesto que en el segundo miembro están contenidas $\varkappa$ constantes arbitrarias independientes, entonces, en el caso en que λ no sea un valor propio del núcleo K, la ecuación (24.21') y, consecuentemente en virtud de la equivalencia, la ecuación de partida (24.18'') también tienen $\varkappa$ soluciones que serán linealmente independientes (véanse los razonamientos al final del p. 23.2). Por consiguiente, el número de soluciones de una ecuación completa puede superar el número de soluciones de una ecuación característica correspondiente sólo en el conjunto de valores propios del parámetro λ que es discreto. De este modo, *del continuo bidimensional de valores, el cual puede adquirir el parámetro* λ, *sólo en el conjunto discreto de sus valores con el único punto límite posible en el infinito los números de soluciones de las ecuaciones completa y característica pueden no coincidir*. Esto demuestra la afirmación (p. 23.3) de que los casos de no coincidencia son excepcionales.

24.7. Ejemplo. Con el objeto de ilustrar la teoría expuesta realicemos, a título de ejemplo, la regularización de la siguiente ecuación integral singular, empleando métodos diferentes:

$$K\varphi \equiv (t+t^{-1})\,\varphi(t) + \frac{t-t^{-1}}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int_L (t+t^{-1})(\tau+\tau^{-1})\,\varphi(\tau)\,d\tau = 2t^2, \qquad (24.25)$$

donde L es una circunferencia unidad.

La parte regular del núcleo es degenerada, por lo cual, mediante el mismo método que se usa en la resolución de las ecuaciones de Fredholm con núcleo degenerado, la ecuación puede ser reducida a un conjunto de la ecuación característica y la ecuación algebraica lineal y, consecuentemente, resuelta en la forma cerrada. De este modo, en el caso dado no hay necesidad de una regularización. Sin embargo, la ecuación en consideración resulta cómoda para ilustrar con ella los métodos generales, puesto que aquí todos los cálculos pueden llevarse a cabo hasta el fin.

Para hacer más cómodos los razonamientos posteriores, resolvamos previamente la ecuación dada. Al denotar

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L (\tau+\tau^{-1})\,\varphi(\tau)\,d\tau = A, \qquad (24.26)$$

escribámosla en la forma de una ecuación característica:

$$(t+t^{-1})\,\varphi(t) + \frac{t-t^{-1}}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = 2t^2 + A\,(t+t^{-1}).$$

Para el correspondiente problema de contorno de Riemann

$$\Phi^+(t) = t^{-2}\Phi^-(t) + t + \frac{A}{2}(1-t^{-2}) \qquad (24.27)$$

el índice $\varkappa = -2$ y las condiciones de resolubilidad (véase el p. 21.2) se cumplirán sólo para $A = 0$. Con ello

$$\Phi^+(z) = z, \quad \Phi^-(z) = 0.$$

De aquí obtenemos la solución de la ecuación (24.25)

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t) = t.$$

Sustituyendo la última expresión en la igualdad (24.26), nos convencemos de que se satisface cuando $A = 0$. Por consiguiente, la ecuación dada es soluble y tiene la única solución

$$\varphi(t) = t.$$

1°. REGULARIZACIÓN A LA IZQUIERDA. Como el índice de la ecuación $\varkappa = -2 < 0$, su cualquier operador regularizador tendrá fun-

ciones propias (no menos que dos), por lo cual la regularización a la izquierda conduce, en el caso general, a una ecuación que no es equivalente a la de partida

Examinemos, al principio, la regularización a la izquierda por medio del regularizador más simple K'°. Hallemos las funciones propias de la ecuación

$$K'^{0}\omega \equiv (t + t^{-1})\,\omega(t) - \frac{t - t^{-1}}{\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = 0.$$

El correspondiente problema de contorno de Riemann

$$\Phi^+(t) = t^2\Phi^-(t)$$

tiene, ahora, el índice $\varkappa = 2$. Al hallar, mediante las fórmulas del p. 21.2, las funciones propias del operador K'°, obtenemos

$$\omega_1(t) = 1 - t^{-2}, \quad \omega_2(t) = t - t^{-1}.$$

En virtud de la teoría general (p. 22.4, 1°), la ecuación regular $K'^{\circ}K\varphi = K'^{\circ}f$ será equivalente a la ecuación singular

$$K\varphi = f + \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2, \tag{24.28}$$

donde α_1, α_2 son ciertas constantes que pueden resultar tanto arbitrarias como determinadas. Al tomar en consideración (24.26), escribamos la ecuación (24.28) en la forma de una ecuación característica:

$$(t + t^{-1})\,\varphi(t) + \frac{t - t^{-1}}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau =$$
$$= 2t^2 + A\,(t + t^{-1}) + \alpha_1(1 - t^{-2}) + \alpha_2(t - t^{-1}).$$

El problema de contorno de Riemann que le corresponde será

$$\Phi^+(t) = t^{-2}\Phi^-(t) + t + \frac{A}{2}(1 + t^{-2}) + \frac{\alpha_1}{2}(t^{-1} - t^{-3}) + \frac{\alpha_2}{2}(1 - t^{-2}).$$

Su solución formalmente se representa así:

$$\Phi^+(z) = z + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\alpha_2,$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{2}z^2[\alpha_1 z^{-3} + (\alpha_2 - A)\,z^{-2} - \alpha_1 z^{-1}].$$

Las condiciones de resolubilidad nos darán

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = A.$$

La solución de la ecuación (24.28) se determinará en este caso mediante la fórmula

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t) = t + A.$$

Sustituyendo el valor determinado de φ en la ecuación (24.26), obtenemos la identidad $A = A$. Por lo tanto, la constante $\alpha_2 = A$ queda arbitraria y la ecuación regularizada es equivalente no a la ecuación de partida sino a la ecuación

$$K\varphi = f + \alpha_2 \omega_2,$$

que tiene por solución $\varphi(t) = t + A$, donde A es una constante arbitraria. La última solución satisface la ecuación de partida sólo cuando $A = 0$.

Vamos a encontrar ahora el regularizador equivalente a la izquierda. Como la ecuación dada es soluble, tal regularizador para ella existe y puede eficazmente construirse según el teorema del p. 24.5.

Construyamos, ante todo, el operador conjugado K*. Por definición,

$$K^*\psi^* \equiv (\bar{t} + \bar{t}^{-1})\,\psi^*(t) - \frac{1}{\pi i}\int_0^{2\pi} (\bar{\tau} - \bar{\tau}^{-1})\,\frac{\psi^*(\tau)}{\bar{t} - \bar{\tau}}\,\bar{t}'\,d\sigma + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} (\bar{\tau} + \bar{\tau}^{-1})(\bar{t} + \bar{t}^{-1})\,\psi^*(\tau)\,\bar{t}'\,d\sigma.$$

Teniendo en cuenta que

$$\bar{t} = t^{-1},\ \bar{\tau} = \tau^{-1},\ \bar{t}' = -it^{-1},\ d\sigma = (i\tau)^{-1}\,d\tau,$$

obtenemos

$$K^*\psi^* \equiv (t + t^{-1})\,\psi^*(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L (\tau - \tau^{-1})\,\frac{\psi^*(\tau)}{\tau - t}\,d\tau - \\ - \frac{1}{2\pi i}\int_L (1 + t^{-2})(1 + \tau^{-2})\,\psi^*(\tau)\,d\tau. \quad (24.29)$$

De acuerdo con el lema del p. 24.5, la ecuación $K^*K\varphi = K^*f$ será equivalente a la de partida, pero, en general, no será regular. La transformación por medio del operador K* lleva en el caso general, a la reducción de la ecuación singular soluble dada a otra ecuación singular equivalente de índice nulo; la última ecuación se regulariza en definitiva. No obstante, en el caso que se considera la parte característica del operador K* coincide con el operador K'°, el cual, como sabemos, es regularizador para el operador K. Por esto, la ecuación $K^*K\varphi = K^*f$ será fredholmiana.

Llevando a cabo todos los cálculos (aconsejamos que el mismo lector los haga rigiéndose por el esquema del p. 24.3), obtenemos la siguiente ecuación de Fredholm:

$$\varphi(t) + \frac{1}{4\pi i}\int_L (\tau t^{-2} - \tau^{-1})\,\varphi(\tau)\,d\tau = t. \quad (24.30)$$

La equivalencia de la última ecuación a la de partida proviene del lema del p. 24.5 y no hace falte que sea adicionalmente argumentada. No obstante, teniendo en cuenta otros casos analógicos, donde el lector pueda necesitar una argumentación de esta índole, señalemos aquí cómo realizarla sin apoyarse en el lema citado.

Puesto que la ecuación (24.30) tiene un núcleo degenerado, lo más sencillo consiste en la resolución de esta ecuación. Se pondrá de manifiesto que ella, al igual que la ecuación singular de partida, tiene la única solución $\varphi(t) = t$. El procedimiento más general consiste en el empleo del método, sirviéndose del cual hemos establecido la no equivalencia de la ecuación $K'^{0}K\varphi = K'^{0}f$ a la ecuación de partida. Realicemos esquemáticamente esta investigación.

Al resolver la ecuación $K^*\psi^* = 0$, hallemos las funciones propias del operador K^*:

$$\psi_1^* = t + t^{-1}\beta\, t^{-3}, \quad \psi_2^* = 1.$$

Resolviendo a continuación la ecuación singular con núcleo regular degenerado

$$K\varphi = f + \alpha_1\omega_1^* + \alpha_2\omega_2^*,$$

que es equivalente a la ecuación de Fredholm (24.30), llegamos a que ésta es soluble sólo para $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Con esto la demostración de equivalencia se da por terminada.

2°. REGULARIZACIÓN A LA DERECHA. A título de regularizador a la derecha tomemos el operador más simple K'^{0}. Al suponer que

$$\varphi(t) = K'^{0}\omega \equiv (t + t^{-1})\,\omega(t) - \frac{t - t^{-1}}{\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - t}\,d\tau, \qquad (24.31)$$

obtenemos (recomendamos que el lector mismo haga los cálculos necesarios) la ecuación de Fredholm respecto de la función $\omega(t)$:

$$KK'^{0}\omega \equiv \omega(t) - \frac{1}{4\pi i}\int_L [t(\tau^2 - 1 + \tau^{-2}) + 2\tau^{-1} + t^{-1}(\tau^2 + 3 + \tau^{-2}) - 2t^{-2}\tau^{-1}]\,\omega(\tau)\,d\tau = \frac{t^2}{2}. \qquad (24.32)$$

Resolviendo esta última ecuación como degenerada, tendremos

$$\omega(t) = \frac{t^2}{2} + \alpha(t - t^{-1}) + \beta(1 - t^{-2}),$$

donde α, β son constantes arbitrarias.

Así pues, la ecuación regularizada tiene respecto de $\omega(t)$ dos soluciones linealmente independientes, mientras que la ecuación de partida (24.25) se había resuelto de una manera unívoca. Sustituyendo el valor encontrado de $\omega(t)$ en la fórmula (24.31), obtenemos

$$\varphi(t) = K'^{0}\left[\frac{t^2}{2} + \alpha(t - t^{-1}) + \beta(1 - t^{-2})\right] = t$$

que es la solución de la ecuación singular de partida. El resultado concuerda con la teoría general, puesto que, siendo el índice negativo, la regularización a la derecha es equivalente.

3°. REGULARIZACIÓN MEDIANTE UNA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN CARACTERISTICA. Este método de la regularización se lleva a cabo según las fórmulas (24.19)—(24.22). Sin embargo, se debe tener en memoria que dichas fórmulas son aplicables a una ecuación, para la cual se cumple la condición $a^2 - b^2 = 1$; por esto, la ecuación (24.25) hay que dividirla por 2.

En este caso tendremos

$$a = \frac{1}{2}(t + t^{-1}), \quad b = \frac{1}{2}(t - t^{-1}), \quad f(t) = t^2,$$

$$k(t, \tau) = -\frac{1}{4\pi i}(t + t^{-1})(\tau + \tau^{-1}), \quad X^+(z) = 1,$$

$$Z(t) = (a + b)X^+ = t,$$

$$Rf = \frac{1}{2}(t + t^{-1})t^2 - \frac{(t - t^{-1})t}{2\pi i}\int_L \frac{\tau^2}{\tau}\frac{d\tau}{\tau - t} = t,$$

$$R_1 k(t, \tau) = -\frac{1}{2}(t + t^{-1})\frac{1}{4\pi i}(t + t^{-1})(\tau + \tau^{-1}) +$$

$$+ \frac{(t - t^{-1})t(\tau + \tau^{-1})}{2\pi i \cdot 4\pi i}\int_L \frac{\tau_1 + \tau_1^{-1}}{\tau_1}\frac{d\tau_1}{\tau_1 - t} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}(\tau + \tau^{-1}).$$

La ecación regularizada tiene la forma

$$\varphi(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_L (\tau + \tau^{-1})\varphi(\tau)\, d\tau = t. \tag{24.33}$$

Se deben añadir a ella, además, las condiciones (24.24) para $k = 1, 2$. Al resolverla como una ecuación degenerada, hallaremos la solución general $\varphi(t) = t + A$, donde A es una constante arbitraria. Escribamos las condiciones (24.24'), (24.24''). Aquí

$$\rho_k(\tau) = \int_L \frac{k(t, \tau)}{Z(t)} t^{k-1}\, dt = \frac{(\tau + \tau^{-1})}{-4\pi i}\int_L \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) t^{k-1}\, dt \quad (k = 1, 2),$$

$$\rho_1(\tau) = 0, \quad \rho_2(\tau) = -\frac{1}{2}\left(\tau + \frac{1}{\tau}\right),$$

$$f_k = \int_L \frac{f(t)}{Z(t)} t^{k-1}\, dt = \int_L t^k\, dt, \quad f_1 = f_2 = 0.$$

Las funciones ρ_1, ρ_2 son linealmente dependientes. La dependencia $\alpha_{j1}\rho_1 + \ldots + \alpha_{j|\varkappa|}\rho_{|\varkappa|} = 0$ (véase el p. 24.6) tiene la forma

$$\alpha_1\rho_1 + 0\cdot\rho_2 = 0.$$

De aquí, la condición de resolubilidad (24.24″) se cumple idénticamente. La condición de equivalencia (24.24′)

$$\int_L \rho_2(\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = -\frac{1}{2}\int_L \left(\tau + \frac{1}{\tau}\right)(\tau + A)\,d\tau = 0$$

se satisface sólo para $A = 0$. Por consiguiente, de todo el conjunto de soluciones de la ecuación regularizada $\varphi(t) = t + A$, la ecuación singular de partida sólo la satisface la función $\varphi(t) = t$.

La ecuación examinada fue utilizada por I. N. Vekua 2)* para ilustrar el método de regularización mediante una ecuación característica.

§ 25. Casos excepcionales de las ecuaciones integrales singulares

Al investigar las ecuaciones integrales singulares se han excluido los casos en que las funciones $a(t) \pm b(t)$ se reducían en el contorno L a cero. Esto se debía al hecho de que el coeficiente $G(t) = \frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}$ del problema de Riemann, al cual se reduce la ecuación singular característica, tiene en estos casos ceros y polos en el contorno y, por consiguiente, tal problema no es subordinada a la teoría general. Apoyándonos en los resultados del § 15, realicemos aparte la investigación de dichos casos excepcionales.

Supondremos que los coeficientes de las ecuaciones singulares en consideración son de tal índole que se asegura el cumplimiento del requisito adicional sobre la diferenciabilidad de las funciones el cual se planteó en el § 15, cuando se examinaban los casos excepcionales del problema de Riemann.

25.1. Solución de la ecuación característica. Examinemos la ecuación característica (21.1)

$$K^\circ\varphi \equiv a(t)\,\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - t} = f(t), \qquad (25.1)$$

suponiendo que las funciones $a(t) - b(t)$ y $a(t) + b(t)$ tienen en el contorno ceros de órdenes enteros en los puntos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$

y $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$, respectivamente y, por lo tanto, son representables en la forma

$$a(t) - b(t) = \prod_{k=1}^{\mu} (t-\alpha_k)^{m_k} r(t),$$

$$a(t) + b(t) = \prod_{j=1}^{\nu} (t-\beta_j)^{p_j} s(t),$$

en las cuales $r(t)$ y $s(t)$ no se reducen a cero en ningún punto. Todos los α_k, β_j se suponen distintos.

Resulta cómodo dividir ambos miembros de la ecuación (25.1) por $\sqrt{s(t)\, r(t)}$ y considerar en lo sucesivo que sus coeficientes satisfacen la correlación

$$a^2(t) - b^2(t) = \prod_{k=1}^{\mu} (t-\alpha_k)^{m_k} \prod_{j=1}^{\nu} (t-\beta_j)^{p_j} = \Pi_0. \qquad (25.2)$$

Al igual que en el punto 21.1, la ecuación (25.1) se reduce al problema de Riemann

$$\Phi^+(t) = \frac{\prod_{k=1}^{\mu} (t-\alpha_k)^{m_k}}{\prod_{j=1}^{\nu} (t-\beta_j)^{p_j}} G_1(t)\, \Phi^-(t) + \frac{f(t)}{\prod_{j=1}^{\nu} (t-\beta_j)^{p_j} s(t)}, \qquad (25.3)$$

donde $G_1(t) = r(t)/s(t)$. La solución de este problema en la clase de funciones, que satisfacen la condición $\Phi(\infty) = 0$, se define mediante las fórmulas (15.7) y (15.8). Al aplicarlas, tenemos

$$\Phi^+(z) = \frac{X^+(z)}{\prod_{j=1}^{\nu} (z-\beta_j)^{p_j}} [\Psi^+(z) - Q_\rho(z) + \Pi_0 P_{\varkappa-p-1}(z)],$$

$$\Phi^-(z) = \frac{X^-(z)}{\prod_{k=1}^{\mu} (z-\alpha_k)^{m_k}} [\Psi^-(z) - Q_\rho(z) + \Pi_0 P_{\varkappa-p-1}(z)], \qquad (25.4)$$

donde

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{s(\tau)\, X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z}, \qquad (25.5)$$

y $Q_\rho(z)$ es un polimonio de interpolación para la función $\Psi(z)$ de potencia $\rho = m + p - 1$ con nudos en los puntos α_k y β_j de multiplicidades m_k y p_j, respectivamente, donde $m = \sum m_k$ y $p = \sum p_j$.

Convengamos en considerar el polinomio $Q_\rho(z)$ como un operador que al término independiente $f(t)$ de la ecuación (25.1) le pone en correspondencia un polinomio que interpola del modo indicado la integral de tipo Cauchy (25.5). Designemos este operador

$$\frac{1}{2} Tf = Q_\rho(z). \tag{25.6}$$

El coeficiente 1/2 se ha elegido para la comodidad de transformaciones a seguir.

Al proceder luego igual que en el 21.2, de (25.4) hallamos

$$\Phi^+(t) = \frac{X^+(t)}{\prod_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}}\left[\frac{1}{2}\frac{f(t)}{s(t)X^+(t)} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{s(\tau)X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-t} - \frac{1}{2}Tf(t) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\Pi_0 P_{\varkappa-p-1}(t)\right],$$

$$\Phi^-(t) = \frac{X^-(t)}{\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k}}\left[-\frac{1}{2}\frac{f(t)}{s(t)X^+(t)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{s(\tau)X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-t} - \frac{1}{2}Tf(t) - \frac{1}{2}\Pi_0 P_{\varkappa-p-1}(t)\right].$$

El coeficiente $-1/2$ en los últimos sumandos de estas fórmulas se ha tomado en virtud de arbitrariedad de los coeficientes del polinomio $P_{\varkappa-p-1}(t)$. Por consiguiente,

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{X^+(t)}{\prod_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}} + \frac{X^-(t)}{\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k}}\right)\times$$

$$\times \frac{f(t)}{s(t)X^+(t)} + \frac{1}{2}\left(\frac{X^+(t)}{\prod_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}} - \frac{X^-(t)}{\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k}}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{s(\tau)X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-1} - Tf - \Pi_0 P_{\varkappa-p-1}(t)\right). \tag{25.7}$$

Introduzcamos la designación

$$Z(t) = s(t)X^+(t) = r(t)X^-(t). \tag{25.8}$$

Al hacer uso de esta designación y también de la correlación (25.2), representemos la fórmula (25.7) así

$$\varphi(t)=\frac{1}{\Pi_0}\left[a(t)f(t)-\frac{b(t)Z(t)}{\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-t}+\right.$$

$$\left.+b(t)Z(t)Tf\right]+b(t)Z(t)P_{\varkappa-p-1}(t).$$

Introduciendo el operador Rf mediante la fórmula

$$Rf\equiv\frac{1}{\Pi_0}\left[a(t)f(t)-\frac{b(t)Z(t)}{\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-t}+b(t)Z(t)Tf\right], \quad (25.9)$$

obtenemos en definitiva

$$\varphi(t)=Rf+b(t)Z(t)P_{\varkappa-p-1}(t). \quad (25.10)$$

La fórmula (25.10) da, para $\varkappa-p>0$, la solución de la ecuación (25.1) que depende linealmente de $\varkappa-p$ constantes arbitrarias. Si es que $\varkappa-p<0$, entonces la solución existe sólo cuando se cumplen $p-\varkappa$ condiciones especiales de resolubilidad, las cuales se imponen sobre el término independiente $f(t)$ y se deducen de las condiciones de resolubilidad del problema de Riemann (25.3) que corresponde a este caso. No las vamos a escribir en una forma explícita.

Al haber generalizado la obra de Yu. I. Cherski 1)*, S. G. Samko 2)* (véase el p. 16.3, 4°) investigó la ecuación singular general

$$(A_1+A_2S)\varphi=1$$

en el caso excepcional cuando los operadores $A_1\pm A_2$ no son necesariamente invertibles. Fue examinado el caso, análogico a la inversión del coeficiente $G(t)$ del problema de Riemann en cero o infinito de orden entero. En una forma operacional esto corresponde a la representación de tipo $A_1+A_2=\prod_{j=1}^{r}(U-\lambda_j I)_j^{\alpha}A'$, donde A' ya es un operador invertible, λ_j pertenece al espectro del operador U y α_j son números enteros positivos. La solución de la ecuación se ha hallado en la forma explícita, con la particularidad de que hemos utilizado cierto análogo de interpolación de los elementos de un espacio de Banach.

25.2. Regularización de la ecuación completa. Examinemos la ecuación singular completa

$$K\varphi\equiv a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau+\int_L k(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau=f(t), \quad (25.11)$$

haciendo las mismas suposiciones con relación a las funciones $a(t)\pm b(t)$, que en el p. 25.1.

Al representarla en la forma

$$K^{\circ}\varphi = f(t) - \int_L k(t, \tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau,$$

apliquemos el método de regularización mediante una ecuación característica. Por la fórmula (25.10) obtenemos la ecuación

$$\varphi(t) = R\left[f(t) - \int_L k(t, \tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau\right] + b(t)\,Z(t)\,P_{\varkappa-p-1}(t)$$

ó

$$\varphi(t) + R\left[\int_L k(t, \tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau\right] = Rf + b(t)\,Z(t)\,P_{\varkappa-p-1}(t). \quad (25.12)$$

Probemos que en la expresión $R\left[\int k(t, \tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau\right]$ la operación R según la variable t y la operación de integración respecto de τ son permutables.

Desarrollemos esta expresión de conformidad con la fórmula (25.9):

$$R\left[\int_L k(t, \tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau\right] = \frac{1}{\Pi_0}\left\{a(t)\int_L k(t, \tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau - \right.$$
$$- \frac{b(t)\,Z(t)}{\pi i}\int_L \frac{d\tau}{Z(\tau)(\tau - t)}\int_L k(\tau, \sigma)\,\varphi(\sigma)\,d\sigma +$$
$$\left. + b(t)\,Z(t)\,T\left[\int_L k(t, \tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau\right]\right\}. \quad (25.13)$$

En el segundo sumando del miembro derecho de (25.13) es admisible invertir el orden de integración (p. 7.1). Al realizar la inversión y al sustituir en la designación de las variables τ por σ y σ por τ, obtenemos

$$\frac{b(t)\,Z(t)}{\pi i}\int_L \frac{d\tau}{Z(\tau)(\tau - t)}\int_L k(\tau, \sigma)\,\varphi(\sigma)\,d\sigma =$$
$$= \int_L \varphi(\tau)\,d\tau\,\frac{b(t)\,Z(t)}{\pi i}\int_L \frac{k(\sigma, \tau)}{Z(\sigma)(\sigma - t)}\,d\sigma.$$

En el tercer sumando el operador $T\left[\int_L k(t, \tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau\right]$, de acuerdo con su definición en el p. 25.1 (fórmulas (25.5), (25.6)) pro-

porciona un polinomio que interpola la función

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{d\tau}{Z(\tau)(\tau-z)}\int\limits_L k(\tau,\sigma)\varphi(\sigma)\,d\sigma=\int\limits_L \varphi(\tau)\,d\tau\,\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{k(\sigma,\tau)\,d\sigma}{Z(\sigma)(\sigma-z)}.$$

De la posibilidad de invertir el orden de integración se puede concluir que

$$T\Big[\int\limits_L k(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau\Big]=\int\limits_L \varphi(\tau)\,T_t[k(t,\tau)]\,d\tau.$$

El índice t que figura en el símbolo del operador T_t indica que la operación (25.6) se realiza según la variable t.

Ahora la igualdad (25.13) puede transformarse así

$$R\Big[\int\limits_L k(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau\Big]=$$

$$=\int\limits_L \varphi(\tau)\,\frac{1}{\Pi_0}\Big\{a(t)\,k(t,\tau)-\frac{b(t)\,Z(t)}{\pi i}\int\limits_T \frac{k(\sigma,\tau)\,d\sigma}{Z(\sigma)(\sigma-t)}+$$

$$+b(t)\,Z(t)\,T_t[k(t,\tau)]\Big\}\,d\tau=\int\limits_L R_t[k(t,\tau)]\,\varphi(\tau)\,d\tau.$$

La permutabilidad de las operaciones queda demostrada.

Volvemos a la ecuación (25.12) y escribámosla en la forma

$$\varphi(t)+\int\limits_L R_t[k(t,\tau)]\,\varphi(\tau)\,d\tau=Rf+b(t)\,Z(t)\,P_{\varkappa-p-1}(t). \quad (25.14)$$

Como el operador R es acotado, la ecuación integral obtenida (25.14) será una ecuación de Fredholm y, por lo tanto, el problema de regularización de la ecuación singular (25.11) queda demostrado.

De la teoría general de regularización (p. 24.6) se deduce que para $\varkappa - p \geqslant 0$ la ecuación (25.11) es equivalente a la (25.14) y, cuando $\varkappa - p < 0$, a la ecuación (25.14) y al sistema de ciertas ecuaciones funcionales.

Como conclusión observemos que para los casos considerados de las ecuaciones integrales singulares, los teoremas de Noether resultan, en el caso general, no válidos.

25.3. Sobre la reducción del caso excepcional de ecuaciones integrales singulares con núcleo de Cauchy a las ecuaciones de tipo normal.

Con el objeto de investigar la ecuación integral singular hagamos uso, ahora, del método de composición de los operadores singulares, analógico a la regularización a la izquierda. Aquí supongamos

que las funciones $a \pm b$ tengan también ceros comunes. Sea dada la ecuación

$$K\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau + \int_L l(t, \tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t), \quad (25.15)$$

en la cual

$$a(t) - b(t) = \prod_{i=1}^{\lambda}(t-\gamma_i)^{n_i}\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k} r(t),$$

$$a(t) + b(t) = \prod_{i=1}^{\lambda}(t-\gamma_i)^{n_i}\prod_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j} s(t),$$

donde $r(t)$ y $s(t)$ no se reducen a cero en ningún punto de L: α_k, β_j, γ_i son puntos del contorno L. Algunos puntos γ_i pueden coincidir con α_k o con β_j; n_i, m_k, p_j son números enteros positivos.

Realicemos una transformación equivalente de la ecuación (25.15) mediante la composición a la izquierda cuyo operador N está elegido de una manera tal que todos los puntos excepcionales α_k, β_j, γ_i se hagan ceros comunes de los nuevos coeficientes de la parte característica. Con ayuda de las fórmulas (22.9) de la composición de operadores no es difícil calcular que para esto es suficiente tomar

$$N\psi \equiv a_1(t)\psi(t) + \frac{b_1(t)}{\pi i}\int_L \frac{\psi(\tau)}{\tau - t}d\tau$$

de tal modo que sus coeficientes satisfagan la condición

$$a_1(t) - b_1(t) = \prod_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}, \quad a_1(t) + b_1(t) = \prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k}.$$

Aquí, el índice $\varkappa_1 = 0$ y el número de polos $p_1 = \sum_{k=1}^{\mu} m_k = m$, por lo cual $\varkappa_1 - p_1 < 0$, y de los resultados del p. 25.1 se desprende que el operador N no tiene funciones propias. Por consiguiente (p. 22.4), la ecuación $NK\varphi = Nf$ es equivalente a la ecuación de partida (25.15). La ecuación transformada se escribirá en la forma

$$NK\varphi \equiv A(t)\varphi(t) + \frac{B(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau + \int_L k(t, \tau)\varphi(\tau)d\tau = F(t). \quad (25.16)$$

En este caso, de acuerdo con las fórmulas (22.9) para la composición de operadores singulares, se tiene

$$A(t)=\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k}\prod_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}\prod_{i=1}^{\lambda}(t-\gamma_i)^{n_i}\frac{s(t)+r(t)}{2},$$

$$B(t)=\prod_{h=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k}\prod_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}\prod_{i=1}^{\lambda}(t-\gamma_i)^{n_i}\frac{s(t)-r(t)}{2},$$

$$F(t)\equiv Nf.$$

La expresión para el núcleo regular $k(t, \tau)$ no la escribimos en la forma explícita por ser ésta demasiado voluminosa.

En la ecuación transformada los puntos excepcionales α_k, β_j, γ_i desempeñan un papel igual. Con el fin de no complicar las fórmulas sucesivas, convengamos en designarlas mediante σ_j con números sucesivos $j = 1, \ldots, \mu; \ \mu+1, \ldots \mu+\nu; \ \mu+\nu+1, \ldots \ldots, \mu+\nu+\lambda$, y las multiplicidades de los ceros m_k, p_j, n_i designarémoslas mediante s_j con los mismos números sucesivos. Tomaremos por convenido que en el entorno de los puntos σ_j las funciones $F(t)$, $k(t, \tau)$ tienen derivadas respecto de t de los órdenes s_j, que satisfacen la condición de Hölder.

De la forma que tiene la ecuación (25.16) se infiere que para su resolubilidad la función $F(t) - \int_L k(t, \tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau$ tiene que reducirse en los puntos excepcionales σ_j a cero de órdenes s_j. De aquí se deduce que en los desarrollos por la fórmula de Taylor deben reducirse a cero, en el entorno de los puntos σ_j, s_j términos iniciales sucesivos del desarrollo, después de lo cual toda la ecuación puede ser simplificada por $\prod_{j=1}^{\mu+\nu+\lambda}(t-\sigma_j)^{s_j}$.

Como resultado de la investigación podemos enunciar el

TEOREMA. *Con las suposiciones hechas, la ecuación* (26.16) *es equivalente a la ecuación de tipo normal*

$$K_1\varphi\equiv A_1(t)\,\varphi(t)+\frac{B_1(t)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau+\int_L k_1(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau=F_1(t) \tag{25.17}$$

en conjunto con las correlaciones funcionales

$$\int_L k_t^{\nu_j}(\sigma_j,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau=F^{(\nu_j)}(\sigma_j) \tag{25.18}$$

$$(j=1,\ldots,\mu+\nu+\lambda;\quad \nu_j=0,1,\ldots,s_j-1).$$

donde

$$A_1(t)=\frac{s(t)+r(t)}{2},\quad B_1(t)=\frac{s(t)-r(t)}{2},$$

$$k_1(t,\tau)=\sum_{j=1}^{\mu+\nu+\lambda}\frac{Q_{s_j-1}(t)}{(t-\sigma_j)^{s_j}}\left[k(t,\tau)-\sum_{\nu_j=0}^{s_j-1}k_t^{(\nu_j)}(\sigma_j,\tau)\frac{(t-\sigma_j)^{\nu_j}}{\nu_j!}\right],$$

$$F_1(t)=\sum_{j=1}^{\mu+\nu+\lambda}\frac{Q_{s_j-1}(t)}{(t-\sigma_j)^{s_j}}\left[F(t)-\sum_{\nu_j=0}^{s_j-1}F^{(\nu_j)}(\sigma_j)\frac{(t-\sigma_j)^{\nu_j}}{\nu_j!}\right],$$

$Q_{s_j-1}(t)$ *son polinomios de grado* s_j-1, *determinados de la igualdad*

$$\frac{1}{\prod_{j=1}^{\mu+\nu+\lambda}(t-\sigma_j)^{s_j}}=\sum_{j=1}^{\mu+\nu+\lambda}\frac{Q_{s_j-1}(t)}{(t-\sigma_j)^{s_j}}.$$

Efectivamente, de los razonamientos anteriores fluye que toda solución de la ecuación (25.16) satisfará la ecuación (27.17) y las correlaciones funcionales (25.18). Por otra parte, multiplicando las igualdades (25.18), respectivamente, por $(\nu_j!)^{-1}(t-\sigma_j)^{\nu_j-s_j}Q_{s_j-1}(t)$, y sumándolas término por término con la igualdad (25.17), llegaremos a la ecuación de partida (25.16). Por consiguiente, cualquier función que satisface simultáneamente las igualdades (25.17) y (25.18) satisface también la ecuación (25.16).

La ecuación de partida la satisfarán sólo aquellas soluciones de la ecuación (25.17) que satisfacen las correlaciones (25.18); por esta razón, las últimas desempeñan, para la ecuación (25.16), el papel de las condiciones de resolubilidad-equivalencia. De una manera plenamente análoga a lo que hicimos en el p. 24.6, se puede dividir las condiciones (25.18) en las condiciones de equivalencia y las de resolubilidad. Luego, como ya se ha mencionado en el p. 24.6 (I. N. Vekua 2)*), se puede elegir tal sustitución lineal de la función buscada que las condiciones de resolubilidad se satisfagan idénticamente. De este modo resulta lícito el

TEOREMA. *Una ecuación integral singular puede ser reducida, en el caso excepcional, a una ecuación integral singular normal equivalente y cierto número de condiciones de resolubilidad.*

Si la ecuación de partida es resoluble incondicionalmente, las condiciones de resolubilidad se satisfacen idénticamente y la ecuación en el caso excepcional se reducirá a una ecuación normal equivalente.

El método expuesto de resolución fue señalado por A. I. Túzik 1)*, 2)*. Las ecuaciones de este tipo que se consideran en el segmen-

to [0, 1] cuando $a \pm b$ sólo tienen ceros comunes (de orden inferior a la unidad) en los extremos del segmento, se encuentran en la teoría de los problemas de contorno para la ecuación hiperbólica degenerada y con este motivo han sido investigadas por J. G. Bzhijatlov (Ecuaciones diferenciales 7, N° 1, 1971). La investigación de los casos excepcionales mediante los métodos del análisis funcional se efectúa en una serie de las obras. El resumen de los resultados está contenido en la obra de S. Prössdorf 1)**.

25.4. Casos degenerados [1]). En conclusión consideraremos los casos en que $a + b$ o $a - b$ se reducen a cero idénticamente. Llamaremos estos casos *degenerados*. Suponiendo que $b(t)$ no se reduce a cero[2]), se puede escribir la ecuación en la forma

$$K\varphi \equiv \pm \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \int_L k(t, \tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = f(t). \quad (25.19)$$

1°. Correlaciones formales. Empecemos por obtener ciertas dependencias simples. Sean, al igual que en el p. 16.3, 4°, I y S los operadores idéntico y de integración singular, respectivamente, e introduzcamos los operadores

$$M^{\pm} \equiv \frac{1}{2}(\pm I + S). \quad (25.20)$$

En este caso, para una función analítica a trazos, representada por la integral de tipo Cauchy $\varphi^{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau$, las fórmulas de Sojotski tomarán la forma

$$\varphi^{\pm}(t) = \frac{1}{2}(\pm I + S)\,\varphi \equiv M^{\pm}\varphi. \quad (25.21)$$

Al emplear las designaciones $M_t^+ M_\tau^- k(t, \tau) = k^{+-}(t, \tau)$ y otras análogas, tendremos las siguientes fórmulas evidentes para la función de dos variables $k(t, \tau)$:

$$k(t, \tau) = k_t^+ - k_t^- = k_\tau^+ - k_\tau^- = k^{++} - \\ - k^{+-} - k^{-+} + k^{--} \quad (25.22)$$

(véanse los análogos en el p. 9.6).

Tomando en consideración la igualdad $S^2 = I$ (p. 7.3) y las correlaciones evidentes $I^2 = I$, $IS = SI = S$, es fácil obtener las siguientes propiedades de los operadores $M^{\pm}$:

$$M^+M^+ = M^+, \quad M^-M^- = -M^-, \quad M^+M^- = M^-M^+ = 0. \quad (25.23)$$

[1]) El presente punto está escrito siguiendo la obra del autor 9)*.

[2]) La admisión de que $b(t)$ tenga ceros en ciertos puntos conduciría a una ecuación cuyo núcleo posee singularidades polares inmóviles. Esto constituye un problema especial, analógico al que hemos enfrentado en el p. 25.3, y aquí no se considera.

La última correlación podría también fácilmente obtenerse no por la vía formal sino del teorema y la fórmula integrales de Cauchy. Además, se verifican las correlaciones

$$(M^{\pm})' = -M^{\mp}, \tag{25.24}$$

que se comprueban con facilidad.

2°. Ecuación característica. Empleando nuevas designaciones la ecuación (25.19) puede escribirse así:

$$K\varphi \equiv M^{\pm}\varphi + k\varphi = f, \tag{25.19'}$$

mientras que su ecuación característica tendrá la forma

$$K^0\varphi \equiv M^{\pm}\varphi = f. \tag{25.19''}$$

El coeficiente del problema de contorno de Riemann que corresponde a la ecuación característica se reducirá idénticamente a cero (en el caso del operador M^+) o al infinito (para M^-). El mismo problema de contorno tendrá la forma

$$\Phi^{\pm}(t) = f(t) \text{ (problema no homogéneo)}, \tag{25.25}$$

$$\Phi^{\pm}(t) = 0 \text{ (problema homogéneo)}. \tag{25.25''}$$

La solución general del problema homogéneo, evidentemente, será

$$\begin{cases} \Phi^+(z) = 0, \\ \Phi_1^-(z) = \Phi_1^-(z) \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} \Phi^+(z) = \Phi_1^+(z), \\ \Phi^-(z) = 0, \end{cases}$$

donde $\Phi_1^{\pm}(z)$ son funciones arbitrarias, analíticas en D^+ o en D^-. Del tipo de la condición de contorno (25.25) fluye que el problema de contorno no homogéneo (25.25) será soluble cuando, y sólo cuando, el segundo miembro tenga la forma $f^{\pm}(t)$, es decir, en el caso para el cual se cumplen las condiciones

$$f^{\mp}(t) = 0. \tag{25.26}$$

Cumplida esta condición, la solución general del problema de contorno no homogéneo se escribirá en la forma

$$\Phi^+(z) = f^+(z), \quad \Phi^-(z) = \Phi_1^-(z) \tag{25.27}$$

para el signo superior y

$$\Phi^+(z) = \Phi_1^+(z), \quad \Phi^-(z) = f^-(z), \tag{25.27'}$$

para el signo inferior.

La condición de resolubilidad (25.26) del problema de contorno será al mismo tiempo la condición de resolubilidad para la ecuación característica (25.19'') y, al cumplirse esta condición, la solu-

ción general de la última ecuación se representará, según la fórmula de Sojotski, por la expresión

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t) = f^+(t) - \Phi_1^-(t) \qquad (25.28)$$

para el signo superior y

$$\varphi(t) = \Phi_1^+(t) - f^-(t), \qquad (25.28')$$

para el signo inferior.

Los resultados obtenidos permiten hacer la conclusión referente al cumplimiento, para el caso degenerado, de los teoremas de Noether. Una función analítica arbitraria depende del conjunto infinito de parámetros. Esto es indicio de que ya el primer teorema de Noether resulta no lícito. A diferencia de los casos normal y excepcional, investigados anteriormente, el número de soluciones ahora puede hacerse infinito.

Es fácil resolver la cuestión acerca del tercer teorema. Como ya se ha indicado, el coeficiente del problema de contorno de Riemann es igual aquí a cero o al infinito, por lo cual el mismo concepto de índice pierde el sentido. Esta misma conclusión puede deducirse de otros razonamientos. Hemos establecido que el número de soluciones de una ecuación homogénea es infinito. El número de soluciones de una ecuación transpuesta, el cual, lo que se demuestra fácilmente, coincide con el número de condiciones de resolubilidad (25.26), es también infinito. Por consiguiente, la fórmula (23.9) que proporciona la expresión para el índice, adquiere una forma indefinida: $\varkappa = \infty - \infty$.

Se podría
mostrar que el segundo teorema de Noether para la ecuación característica sigue siendo válido. No obstante, no argumentaremos aquí este hecho, porque para la teoría general no tiene significación de principio.

3°. Ecuación completa. Regularización a la izquierda. De la forma general del regularizador (22.16) se infiere que el regularizador simple (a la izquierda y a la derecha) para la ecuación (25.19') será el operador $M^{\mp}$. Al realizar la composición, obtenemos

$$M^{\mp}K\varphi \equiv M^{\mp}k\varphi \equiv \int_L k_1^{\mp}(t, \tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = f^{\mp}(t). \qquad (25.29)$$

A diferencia de los casos normal y excepcional, la ecuación regularizada ya será ecuación no de segundo sino de primer género. Como veremos adelante, esta circunstancia aporta en la teoría unos rasgos nuevos. La ecuación (25.29) no será, en el caso general, equivalente a la de partida; ella puede contener soluciones ajenas. Tememos

de la ecuación (25.19′) una composición para el operador $M^{\pm}$ a la izquierda. Teniendo en cuenta (25.23), obtenemos

$$M^{\pm}\mathrm{K}\varphi \equiv \pm M^{\pm}\varphi + k^{\pm}\varphi = f^{\pm}. \tag{25.30}$$

Restando de (25.29) la igualdad (25.30), llegamos a la igualdad (25.19′). Por consiguiente, una ecuación integral singular en el caso degenerado es equivalente a la totalidad de dos ecuaciones (25.29) y (25.30), de las cuales una es fredholmiana de primer género, y la segunda es de nuevo una ecuación singular degenerada, pero de una forma más particular.

De esta propiedad enunciada ya podríamos hacer ciertas deducciones teóricas, pero resulta más cómodo obtenerla con ayuda de otro método de regularización.

4°. Regularización mediante la solución de una ecuación característica. Para simplificar la escritura, sólo tomaremos el signo superior. En la ecuación (25.19′) traslademos el término $k\varphi$ en el miembro derecho y aprovechemos las fórmulas (25.28) y (25.26) sustituyendo en ellas f por $f - k\varphi$. Obtendremos

$$\varphi(t) + \int_L k_1^+(t, \tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = f^+(t) - \Phi_1^-(t), \tag{25.31}$$

$$\int_L k_1^-(t, \tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = f^-(t). \tag{25.32}$$

De este modo, la ecuación integral singular degenerada completa resulta ser equivalente a la totalidad de la ecuación integral de Fredholm de segundo género (25.31), cuyo miembro derecho contiene un conjunto infinito de parámetros arbitrarios (una función arbitraria $\Phi_1^-(t)$), y de la ecuación de Fredholm de primer género (25.32). La última representa en sí la totalidad de las condiciones de resolubilidad-equivalencia. Al anotar, con ayuda de la resolvente, la solución de la ecuación (25.31) en una forma explícita y al sustituirla en la ecuación (25.32), obtendremos, en el caso general, un sistema infinito de ecuaciones respecto del conjunto infinito de parámetros arbitrarios. Al aplicar los razonamientos analógicos a los empleados en el p. 24.6, se puede separar las ecuaciones privadas de parámetros arbitrarios. Estas serán las condiciones puras de resolubilidad de las ecuaciones de partida y regularizada al mismo tiempo. De las ecuaciones restantes los parámetros arbitrarios se determinan de tal modo para que las soluciones de la ecuación transformada satisfagan la ecuación singular de partida.

La cuestión referente al número de parámetros, que quedará arbitrario y figurará de un modo lineal en la solución general, depende dal rango de la matriz correspondiente y, en el caso general, no se resuelve; lo mismo es válido para el número de las condiciones de

resolubilidad. Con un ejemplo, que consideraremos más adelante, se puede mostrar que se realizan dos posibilidades: ambos estos números pueden ser al mismo tiempo o bien finitos o bien infinitos.

Queda aún resuelta la cuestión acerca del lugar del segundo teorema de Noether. No es difícil probar que se conserva la necesidad de la condición $\int_L f(t)\,\psi(t)\,dt = 0$. En efecto, esta condición es un corolario simple de la identidad $\int_L K\varphi\psi\,dt = \int_L \varphi K'\psi\,dt$, y la última está basada en la posibilidad de invertir el orden de integración, la cual, evidentemente, es justa de una manera igual para todos los casos, sea normal, excepcional o degenerado. No obstante, la condición, impuesta por este teorema, deja de ser suficiente. Efectivamente, supongamos que en la ecuación (25.32) todas las funciones pertenecen a la clase L_2 y que el núcleo $k_l^-(t, \tau)$ es simétrico [1]). De acuerdo con el teorema de Picard (véase la obra de I. I. Privalov «Ecuaciones integrales», Moscú, ONTI, 1935), deben cumplirse las condiciones de resolubilidad necesarias y suficientes

$$\sum |\lambda_k f_k|^2 < \infty,$$

donde λ_k son valores propios del núcleo $k_l^-(t, \tau)$. Esta es una condición de tipo esencialmente nuevo. Lo que acabamos de decir puede ser ilustrado con el ejemplo que sigue.

Ejemplo. Supongamos que en una circunferencia unitaria esté dada la ecuación

$$K\varphi \equiv \lambda\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_{|\tau|=1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{t^n}{\tau^{n+1}}\,\varphi(\tau)\,d\tau = f(t). \qquad (25.33)$$

Por el momento consideremos indeterminado el coeficiente constante λ. A los casos degenerados les corresponderán los valores de $\lambda = \pm 1$. Convengamos en considerar que todas las funciones que figuran en la ecuación pertenecen a la clase L_2 y, por lo tanto, tomemos por

---

[1]) La simetría del núcleo $k_l^-(t, \tau)$ se supone para la simplicidad. En el caso general, se puede emplear la generalización de Schmidt extendida a los núcleos no simétricos de las condiciones de Picard y mencionada en el libro de E. Goursat «Cours D'analyse Mathématique», tome III. París. Gauthier-Villars. 1936 (punto 600) (véase también el artículo de B. N. Bábkin 1)*).

convergentes en el sentido de media cuadrática los desarrollos

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n t^n, \quad 2\pi i k(t,\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{t^n}{\tau^{n+1}}, \quad \varphi(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n t^n \tag{25.34}$$

y los coeficientes, por satisfacientes las condiciones

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2 < \infty, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varphi_n|^2 < \infty.$$

Resolvamos la ecuación directamente con la ayuda de las series. Introduzcamos las series (25.34) en la ecuación y calculemos las integrales correspondientes

$$S\varphi=\frac{1}{\pi i}\int_{|\tau|=1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=\varphi^+(t)-\varphi^-(t)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n t^n-\sum_{n=-1}^{-\infty} \varphi_n t^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n \varphi_n \operatorname{sign} n,$$

$$\operatorname{sign} n=\begin{cases} 1 \text{ para } n\geqslant 0, \\ -1 \text{ para } n<0, \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{t^k}{\tau^{k+1}} \varphi(\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k t^k \int_{|\tau|=1} \tau^{-k-1+n}\,d\tau=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n c_n t^n.$$

Introduciendo φ, f y los valores de las integrales obtenidas en la ecuación e igualando los coeficientes de las mismas potenciales de t, obtendremos un sistema infinito de igualdades para determinar los coeficientes φ_n

$$\varphi_n(\lambda + \operatorname{sign} n + c_n) = f_n \quad (n = 0, \pm 1, \ldots). \tag{25.35}$$

En el caso de una ecuación homogénea ($f(t) \equiv 0$) el último sistema será también homogéneo. A los valores del índice n, para los cuales se verifican las igualdades

$$\lambda + \operatorname{sign} n + c_n = 0, \tag{25.36}$$

les corresponderán las soluciones lineales independientes t^n de la ecuación homogénea (25.33). Para que la solución no homogénea sea soluble, deben respectivamente cumplirse las condiciones $f_n = 0$.

En la forma integral ellas tienen por expresión

$$\int_{|\tau|=1} f(t)\, t^{-n-1}\, dt = 0. \tag{25.37}$$

A base de los cálculos sencillos no es difícil mostrar que las funciones $\psi_n = t^{-n-1}$ serán soluciones linealmente independientes de la ecuación transpuesta $K'\psi = 0$, correspondientes a los valores de c_n, para los cuales se cumple la condición (25.36), es decir, a aquellos c_n para los cuales t^n es una función propia del operador $K\varphi = 0$. De este modo, para λ arbitrario (correspondiente a los casos tanto no degenerado como degenerado), las condiciones (25.37), que fluyen del segundo teorema de Noether, deben cumplirse. Supongamos que ellas están satisfechas. En este caso, de las igualdades (25.35) pueden determinarse los coeficientes φ_n. Para que la solución pertenezca a la clase L_2, es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varphi_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|f_n|^2}{|\lambda + \operatorname{sign} n + c_n|^2} < \infty. \tag{25.38}$$

Si es que $\lambda \neq \pm 1$, entonces, cuando $n \to \infty$, $\lambda + \operatorname{sign} n + c_n \to \lambda + \operatorname{sign} n \neq 0$, razón por la cual la condición (25.38) es equivalente a la condición $\sum |f_n|^2 < \infty$, la cual se cumple a ciencia cierta, puesto que $f \in L_2$. Así pues, para el caso no degenerado las condiciones (25.37) son condiciones necesarias y suficientes de resolubilidad, lo que habríamos podido obtener de la teoría general.

Supongamos ahora que nos enfrentaremos con un caso degenerado. Hagamos, para concretar, $\lambda = 1$. En este caso la condición (25.38) tomará la forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|n|^2}{|2 + c_n|^2} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{|n|^2}{|c_n|^2} < \infty. \tag{25.39}$$

Como $c_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, los coeficientes f_n de n negativo han de tenderse a cero más de prisa que esto ocurre a consecuencia de la pertenencia de $f(t)$ a la clase L_2. Por consiguiente, en el caso degenerado la componente $f^-(t)$ del segundo miembro de la ecuación debe pertenecer a una clase más estrecha que L_2. Cuando $\lambda = -1$, la condición analógica la tiene que satisfacer $f^+(t)$. De este modo, las condiciones (25.37) del segundo teorema de Noethery ya no son suficientes para que la ecuación (25.33) sea resoluble.

Las últimas deducciones podrían ser obtenidas también de la condición de equivalencia-resolubilidad (25.32) que se escribe aquí (para $\lambda = 1$) en la forma

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \frac{\tau^{n-1}}{t^n} \varphi(\tau)\, d\tau = f^-(t).$$

En conclusión fijemos la atención en el problema acerca de número de soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea y del número de condiciones de la resolubilidad de la ecuación no homogénea. La ecuación integral homogénea tendrá funciones propias t^n para aquellos n, para los cuales se cumple la igualdad (25.36). Puesto que $c_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, resulta que para $\lambda \neq +1$ puede existir sólo un número finito de funciones propias t^n, lo que corresponde al primer teorema de Noether. En el caso degenerado $\lambda = 1$, la función propia t^n corresponderá a cualquier $n < 0$, para el cual $c_n = 0$. De esta manera, cuando $\lambda = 1$, al elegir iguales a cero el número finito de los coeficientes c_n $(n < 0)$, obtendremos la ecuación integral homogénea (25.33) que tiene el número finito de funciones propias t^n, al número infinito de c_n $(n < 0)$, que vienen desapareciendo, le corresponderá un conjunto infinito de funciones propias. A toda función propia t^n de la ecuación homgénea dada le corresponderá una función propia t^{-n-1} de la ecuación transpuesta. De este modo, se realizan dos casos: o bien ambas ecuaciones transpuestas tienen el mismo número finito de soluciones linealmente independientes, o bien ambas tienen el número infinito de soluciones. Si dejamos a parte la posibilidad del número infinito de soluciones, concluimos que el asunto corre igual que en el caso de la alternativa de Fredholm.

Hemos fallado en encontrar un ejemplo en que se realice la tercera posibilidad para las ecuaciones singulares, cuando de dos ecuaciones recíprocamente transpuestas una tenga el número finito y la otra, el número infinito de soluciones.

§ 26. Notas históricas

La teoría de ecuaciones integrales singulares cuya integral se comprende en el sentido de valor propio empezó a desarrollarse casi simultáneamente con la teoría de ecuaciones de Fredholm. Las primeras obras (Poincaré [20], Hilbert 1)**, 1903—1904) trataban las ecuaciones integrales con núcleo ctg $\frac{\sigma - s}{2}$ (véase el § 31). En dicha obra de Hilbert se han cometido errores que fueron analizados en la obra del autor [5]. Noether fue primero en elaborar (1921) la teoría general de la ecuación singular (también con el núcleo ctg $\frac{\tau - s}{2}$) (Noether 1)**). Aquí fueron establecidas las propiedades generales de las ecuaciones singulares

que actualmente se conocen como teoremas de Noether. Conviene observar que el aparato matemático aplicado por Noether (la resolución del problema de Hilbert, véase el cap. IV) no permite obtener estos mismos teoremas para las ecuaciones complejas con núcleo de Cauchy. La obra de Noether es bastante pesada en cuanto a su estilo y es difícil para la asimilación.

Al poco tiempo apareció la obra de Carleman 1)** de la que ya se habló en el capítulo antecedente. En esta obra se da la resolución de la ecuación característica con núcleo de Cauchy en el caso particular cuando los coeficientes de la ecuación son constantes y por el contorno se toma un segmento del eje de abscisas [0, 1]. En esta misma obra fue indicado el método de regulación mediante la solución de la ecuación característica. Carleman no trató en su obra la teoría general de las ecuaciones singulares.

Al haber aparecido en 1937 la obra del autor 1)*, en la investigación de las ecuaciones singulares empezó a emplearse la solución del problema de contorno de Riemann obtenido en esta obra. Los primeros pasos en esta dirección se deben a S. G. Mijlin 2)* (1939).

Después I. N. Vekua (1940) en la obra 1)* dio la solución completa de la ecuación característica y el principio de la teoría general de ecuación singular. Esta teoría fue desarrollada por él en una serie de las obras posteriores (1941—1943), de las cuales señalemos más importantes: 2)*, 3)*. Con un esmero especial fue elaborado por Vekua el método de regularización mediante la solución de la ecuación característica 2)* (N. I. Musjelishvili lo denominó método de Carleman — Vekua). Vekua también fue primero en introducir el método de regularización a la derecha el cual se utilizó también con el fin de elaborar la teoría general. A I. N. Vekua 3)* le pertenece la sencilla demostración del segundo teorema de Noether, citada en el p. 23.2.

Al mismo tiempo (a partir del año 1941) se editaron una serie de las obras de V. D. Kupradze, de las cuales indiquemos dos de mayor importancia: 1)*, 2)*. En éstas se desarrollaba la teoría general de la ecuación singular. Haciendo uso exclusivamente del método clásico de regularización, es decir, de la regularización a la derecha, Kupradze dio unos cuantos variantes de la demostración de las propiedades fundamentales de ecuaciones singulares (teoremas de Noether) y del teorema sobre la regularización equivalente. La demostración del teorema III de Noether, presentada en el p. 23.2, fue obtenida en la obra de Kupradze 2)*.

Los casos excepcionales de ecuaciones integrales singulares fueron esquemáticamente considerados por el autor (1941) en su tesis 2)* (véase también [6]). Con este motivo el autor recurrió a las investigaciones para el caso correspondiente del problema de contorno de Riemann (§ 15). En 1952 esta cuestión fue detalladamente investigada por L. A. Chikin quien hizo uso del mismo método 1)*. En 1948 D. I. Sherman 2)*, independientemente del autor y empleando otros métodos, llevó a cabo la investigación de los casos excepcionales de las ecuaciones integrales singulares; particularmente, en esta obra se da la solución para el caso considerado.

Las cuestiones de la regularización equivalente empezaron a desarrollarse por S. G. Mijlin 1)* en 1938. Pero, en dicha obra y en las que la siguieron él se limitó plantear el problema de regularización equivalente con cualquier miembro segundo (véase el p. 24.1). A pesar de que en las primeras obras de Mijlin los métodos empleados fueron demasiado pesados (por ejemplo, el método de aproximación sucesiva 1)*) se debe destacar su importancia, pues eran las primeras obras referentes al problema dado que atrayeron la atención de los científicos a las cuestiones de regularización equivalente. El teorema de regularización equivalente de una ecuación, dado en la forma representada en este libro (p. 24.5), fue enunciado originalmente por el autor en su tesis 2)* en el año 1941.

La demostración de este teorema fue presentada, al poco tiempo, primeramente por V. D. Kupradze 2)*, y después, ya mediante el otro método, por I. N. Vekua 3)*. La demostración realizada en este libro (véase el p. 24.5) coincide, en esencia, con la de Vekua, aunque se diferencia mucho de ésta en forma.

Ella reproduce con algunos cambios la demostración efectuada por S. G. Mijlin [15].

Ha de ser notado que la elaboración de la teoría de regularización equivalente resultó ser más difícil y las publicaciones de varios autores, dedicadas a este problema, no están privadas de ciertos errores.

La resolución completa y comparativamente simple del problema de regularización equivalente, que está basada en las obras mencionadas arriba y que se expone en el presente libro, constituye un éxito importantísimo de la teoría de ecuacines integrales singulares.

Conviene mencionar, además, las obras de D. I. Sherman 1)*—4)*, las cuales están estrechamente relacionadas con regularización, aunque no tienen relación directa. Sherman obtuvo un método que permite, con ayuda de representaciones integrales especiales de las funciones analíticas, reducir los problemas de contorno directamente a las ecuaciones de Fredholm, dejando a parte las ecuaciones singulares como etapa intermedia más detalladamente (véase el § 34).

La elaboración de los problemas fundamentales de la teoría de ecuaciones integrales singulares con núcleo de Cauchy (incluidos también los casos de coeficientes discontinuos y de contorno no cercano (véase el cap. VI)), la cual se basa en la resolución del problema de contorno de Riemann, fue llevada a cabo en 1940—1944 por los trabajos, esencialmente, de los matemáticos georgianos. Para darse cuenta del progreso alcanzado en esto dominio, el lector tiene que comparar la exposición del problema dado en este libro con la exposición que se da en la obra de Noether 1)**, o siquiera en la obra de Mijlin 1)* que data del año 1938, cuando la elaboración de esta teoría recién empezó.

La profundización ulterior iba en la dirección de diferentes generalizaciones. Existe un número considerable de obras de los matemáticos geogrianos en las cuales está contenida la generalización de la teoría de ecuaciones singulares a base de las ideas de la teoría de funciones de la variable real, esto es, del empleo de las integrales en el sentido de Lebesgue (L. G. Magnaradze, B. V. Jvedelidze, I. N. Kartsivadze) y de las más generales integrales A, B, Φ y $\widetilde{L}$ (A. G. Dzhvarsheishvili, G. A. Juskivadze). No hemos tocado estos problemas puesto que ellos salen de los márgenes de este libro.

En una serie de obras la teoría de ecuaciones singulares se considera en relación con las ideas del análisis funcional. En primer lugar se debe señalar el artículo de S. G. Mijlin [15]. En la obra de F. V. Atkinson 1)*, dedicada a los operadores abstractos en el espacio de Banach, se ha mostrado que la condición de regularizabilidad (a la izquierda y a la derecha) es necesaria y suficiente para que el operador esté subordinado a la teoría de Noether (véase el p. 23.4). Z. I. Jalilov [29] y Yu. I. Cherski 1)* construyeron la teoría abstracta de operadores (basada en la concepción axiomática), analógica a la teoría del operador singulr con núcleo de Cauchy (véase el p. 16.3). En una dirección cercana se desarrollaban las investigaciones en las obras de D. Przeworska-Rolewiez 1)*, 2)*. En la obra de I. C. Gojberg 1)* se ha propuesto otro procedimiento abstracto para investigar los operadores singulares, basado en los métodos de la teoría de anillos normados [1]).

Los teoremas de Noether para las ecuaciones integrales singulares con traslación de Carleman, consideradas en el p. 23.5, fueron obtenidos por primera vez por G. S. Litvinchuk 6)*. La parte característica de estas ecuaciones corresponde a los problemas de contorno con traslación que se examinan en el capítulo V. Los teoremas de Noether para las ecuaciones singulares, en que figura una

---

[1]) Véase también I. Ts. Gojberg y I. A. Feldman «Ecuaciones en convoluciones y métodos proyectivos de su resolución» (И. Ц. Гохберг и И. А. Фельдман, «Уравнения в свертках и проекционные методы их решения», М., «Наука», 1971).

función incógnita conjugada compleja (p. 23.6) se han obtenido en la obra de L. G. Mijáilov [14] (véase también G. F. Mandzhavidze 1)*, R. S. Isajanov 2)*), y para las ecuaciones generales, que contienen los términos tanto con la conjugación compleja como con la traslación de Carleman, en la obra de G. S. Litvinchuk 1)*.

PROBLEMAS AL CAPITULO III

En todos los problemas el contorno L representa una curva cerrada simple que divide el plano en dos dominios: el interior D^+ y el exterior D^-; con las letras $c_1, c_2, \ldots$ están designadas constantes arbitrarias.

1. Resuélvase la ecuación integral singular característica

$$t\,(t-2)\,\varphi(t)+\frac{t^2-6t+8}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=\frac{1}{t},$$

considerando que el punto $z=0$ pertenece al dominio D^+, y el punto $z=2$, al dominio D^-.

Respuesta.

$$\varphi(t)=\frac{-t^2+6t-4}{8t\,(t-2)^2}.$$

Indicación. Al resolver los problemas 2—8, se deben aprovechar los resultados de los problemas respectivos 4—8, 10, 11 del cap. II.

2. Resuélvase la ecuación integral singular característica

$$(t^2-2)\,\varphi(t)+\frac{3t}{\pi}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=\frac{2t}{t^2+1},$$

considerando que los puntos i, $2i$ pertenecen al dominio D^+ y los $-i$, $-2i$, al dominio D^-.

Respuesta. $\varphi(t)=\dfrac{2t\,(t^2-5)}{(t^2+1)^2\,(t^2+4)}+\dfrac{t\,(c_0+c_1t)}{(t^2+1)\,(t^2+4)}$,

3. Pruébase que la ecuación

$$(t^2-2)\,\varphi(t)+\frac{3t}{\pi}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=2t\,(t-2i)\,(1+at),$$

a la condición de que el punto $-i$ pertenece a D^+, mientras que los puntos i, $2i$, $-2i$ pertenecen a D^-, será soluble sólo cuando $a=-i$. Dése la solución de la ecuación para este valor del parámetro.

Respuesta. $\varphi(t)=\dfrac{-2it\,(t-2i)}{t+2i}$.

4. Resuélvase la ecuación

$$\left[t-\ln\left(1-\frac{1}{t}\right)\right]\varphi(t)-\frac{t+\ln\left(1-\dfrac{1}{t}\right)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=2\ln\frac{t}{t-1}\,(\operatorname{sen} t+e^{\frac{1}{t}})$$

para el contorno L que deja los puntos 0, 1 en el dominio D^+.

Respuesta.

$$\varphi(t)=\operatorname{sen} t-\frac{1}{t}e^{\frac{1}{t}}\ln\left(1-\frac{1}{t}\right)+(c_0+c_1t)\left[1+\frac{1}{t}\ln\left(1-\frac{1}{t}\right)\right].$$

5. Resuélvase la ecuación

$$t\varphi(t)-\frac{t-2}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=2(t^2-1),$$

hechas las siguientas suposiciones:
a) el punto 1 pertenece a D^+;
b) el punto 1 pertenece a D^-;
c) el punto 1 pertenece a L.

Respuesta. a) $\varphi(t)=t^2-1+c_0\dfrac{t-2}{t-1}$; b) y c) $\varphi(t)=t^2-1$.

6. Resuélvase la ecuación

$$t\varphi(t)+\frac{t-2}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=2(t^2-t+1)$$

si subsisten las mismas suposiciones que en el problema anterior.

Respuesta. a) y c) La ecuación es insoluble; b) $\varphi(t)=t+\dfrac{1}{t-1}$.

7. Resuélvase la ecuación para valores indicados de la constante h

$$(ht+i)\varphi(t)+\frac{t-2i}{\pi i}\int_{\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=at+b$$

(donde h es real, distinta de ±1, $-\infty<t<\infty$).

Respuesta. Para $h<-1$

$$\varphi(t)=\frac{at+b}{(h+1)t-i}+\frac{a(h-1)(t-2i)}{h(h+1)[(h-1)t+3i]}+c\left[\frac{1}{(h+1)t-i}-\frac{1}{(h-1)t+3i}\right];$$

para $0<|h|<1$

$$\varphi(t)=\frac{a}{h}+\frac{hb-ai}{h[(h-1)t+3i]};$$

para $h=0$

$$\varphi(t)=-\frac{b+c(t-2i)}{t-2i}$$

siempre que se cumple la condición de resolubilidad $a=0$;
para $h>1$

$$\varphi(t)=-bi$$

siempre que se cumple la condición de resolubilidad $a=-bhi$.

8. Resuélvase la ecuación

$$(1-h)\varphi(t)+\frac{t-i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=f$$

(h es real, distinta de 0 y 2, $-\infty < t < \infty$)

a) en la clase de las funciones que satisfacen la condición

$$|\varphi(t)| < |A|\,t^{-\alpha}\ (\alpha>0)\ \text{para}\ |t|\ \text{grandes};$$

b) en la clase de las funciones que satisfacen la condición

$$|\varphi_1(t)-\varphi_1(\infty)| < A\,|t|^{-\alpha}\ (\alpha>0)\ \text{para}\ |t|\ \text{grandes}.$$

Respuesta. a) Para $h < 0$, $\varphi(t) \equiv 0$ y sólo al cumplirse la condición de resolubilidad $f = 0$,

para $0 < h < 2$

$$\varphi(t)=\frac{if}{t-ih},$$

para $h > 2$

$$\varphi(t)=-\frac{if}{t+i(h-2)}+c\left[\frac{1}{t+i(h-2)}+\frac{1}{t-ih}\right];$$

b) para $h < 0$

$$\varphi_1(t)=\frac{f}{1-h}$$

para $0 < h < 2$

$$\varphi_1(t)=\varphi(t)+c\,\frac{t-i}{t-ih},$$

para $h > 2$

$$\varphi_1(t)=\varphi(t)+c_0\,\frac{t-i}{t-ih}.$$

9. Pruébese que para la ecuación

$$K\varphi \equiv (1+t)\,\varphi(t)+\frac{1-t}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_L e^{t\tau}\,\varphi(\tau)\,d\tau=2t,$$

siempre que el origen de coordenadas pertenezca al dominio D^+, el operador K'^0 es regularizador equivalente a la izquierda. Constrúyase la ecuación regularizada.

Respuesta. $\varphi(t)+\frac{1}{4\pi i}\int_L\left(e^{t\tau}-\frac{2}{\tau}+2\right)\varphi(\tau)\,d\tau=t.$

La equivalencia se deduce de lo que el operador K'^0, que es característico y lleva el índice negativo, no tiene funciones propias.

10. Muéstrese que para la ecuación

$$K\varphi \equiv (1+t^{-2})\,\varphi(t)+\frac{1-t^{-2}}{\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau-\frac{1}{\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{\varphi(\tau)}{t^2\tau}\,d\tau=2t$$

a) el regularizador más sencillo K'^0 no es regularizador equivalente a la izquierda;

b) el operador conjugado K* es un regularizador equivalente a la izquierda. Constrúyase la ecuación integral regularizada $K^*K\varphi = K^*f$.

Respuesta. a) La ecuación de Fredholm $K'^{\circ}K\varphi = K'^{\circ}f$ es equivalente a la ecuación

$$K\varphi = 2t + \alpha\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)$$

para α arbitrario;

b) $\varphi + \frac{3}{4\pi i}\int\limits_{|\tau|=1} \frac{1}{\tau}\varphi(\tau)\,d\tau = t.$

11. Muéstrese que para la ecuación

$$K\varphi \equiv (t^2 + t^{-2})\varphi(t) + \\ + \frac{(t^2 - t^{-2})}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau - \frac{(t + t^{-2})}{2\pi i}\int\limits_L (\tau + \tau^{-2})\varphi(\tau)\,d\tau = 2t^4$$

el operador K'° es regularizador equivalente a la izquierda, siempre que el origen de coordenadas se encuentra en D^+. Constrúyase la ecuación de Fredholm $K'^{\circ}K\varphi = K'^{\circ}f$.

Respuesta. $\varphi(t) - \frac{1 + t^{-1}}{4\pi i}\int\limits_L (\tau + \tau^{-2})\varphi(\tau)\,d\tau = t^2.$

12. Para la ecuación

$$K\varphi \equiv \frac{t+2}{t-2}\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\tau|=1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1} \times \\ \times \left(1 + \frac{1}{\tau}\right)\tau^2\varphi(\tau)\,d\tau = 2t$$

a) constrúyase el regularizador equivalente a la izquierda

$$\widetilde{K} = (K^*K)'^{0}\,K^*;$$

b) pruébase que el operador característico K'° es también el regularizador equivalente a la izquierda. Constrúyase la ecuación regularizada $K'^{\circ}K\varphi = K'^{\circ}f$.

Respuesta.

a) $(K^*K)'^{0}\,K^*\psi \equiv \frac{8t(t+2)}{(1-2t)^2(t-2)}\psi(t) - \\ - \frac{8t}{(1-2t)^2}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\tau|=1} \frac{\psi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \\ + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\left[\frac{2}{t^2(t-2)(1-2t)}\left(1 + \frac{1}{\tau}\right) + \frac{24t}{(t-2)(1-2t)^2(1-2\tau)}\right]\psi(\tau)\,d\tau;$

b) $\varphi(t) + \frac{1}{8\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\left(1 - \frac{2}{t}\right)\left(3\tau^2 + \frac{4}{\tau - 2}\right)\varphi(\tau)\,d\tau = t - 2.$

13. Dedúzcase la fórmula de inversión de la integral singular de tipo Cauchy

$$\psi(t)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau$$

(p. 7.3) de la fórmula para la solución de la ecuación característica (21.9).

14. Dedúzcase las propiedades principales de las ecuaciones integrales singulares (teoremas de Noether, p. 23.2), basándose en la regularización mediante la solución de la ecuación característica (I. N. Vekua 2)*).

15. Sea

$$K\varphi \equiv a(t)\,\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau+\int_L k(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau=f(t)$$

una ecuación integral singular (soluble o insoluble). Demuéstrese que, dejando intacto la parte característica, se puede cambiar la parte regular del núcleo $k(t, \tau)$ de una manera tal que la ecuación

$$K_1\varphi \equiv a(t)\,\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau+\int_L k_1(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau=f(t)$$

tenga no menos de cierto número prefijado de soluciones.

16. Pruébese que la ecuación integral singular generalizada

$$a(t)\,\varphi[\alpha(t)]+b(t)\,\varphi(t)+\frac{a(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-\alpha(t)}\,d\tau-\frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=f(t)$$

se reduce al problema de contorno de Riemann generalizado

$$\Phi^+[\alpha(t)]=G(t)\Phi^-(t)+g(t),$$

donde

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau,\quad G(t)=\frac{b(t)}{a(t)},\quad g(t)=\frac{1}{2}\,\frac{f(t)}{a(t)}.$$

(D. A. Kveselava 2)*).

17. Muéstrese que la solución de la ecuación integral singular

$$a(t)\,\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau+\int_L k(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau=f(t),$$

cuyo núcleo regular $k(t,\tau)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(t)\,\beta_j(\tau)$ es degenerado, puede ser reducida a la solución del sistema de ecuaciones lineales algebraicas. Realícese la investigación de la ecuación mencionada, basándose en los teoremas de resolubilidad de los sistemas de ecuaciones lineales algebraicas.

18*. Demuéstrese, sin recurrir a la solución del problema de Riemann, que la diferencia entre los números de soluciones de las ecuaciones transpuestas no depende de la parte regular del núcleo (Noether 1)**, N. I. Musjelishvili [16], § 53).

CAPITULO IV

PROBLEMA DE CONTORNO DE HILBERT Y ECUACIONES INTEGRALES SINGULARES CON NUCLEO DE HILBERT

El objeto de nuestra consideración en este capítulo será el segundo problema de contorno fundamental de la teoría de funciones analíticas, o sea, el así llamado problema de Hilbert, como también las ecuaciones integrales singulares con núcleo de Hilbert que son estrechamente vinculadas con dicho problema. Consideraremos, además, una serie de cuestiones que desempeñan un papel auxiliar en la resolución de este problema (operador de Schwarz, factor de regularización). En conclusión daremos a conocer las aplicaciones del problema de Hilbert a la resolución de los problemas de contorno para funciones poliarmónicas y polianalíticas.

A diferencia del problema de Riemann, donde los casos para un dominio simplemente conexo y un múltiplemente conexo no difieren mucho uno del otro, el paso de los dominios simplemente conexos a los múltiplemente conexos en la revolución del problema de Hilbert trae consigo unas dificultades considerables. Por esta razón, examinaremos aquí sólo dominios simplemente conexos. El problema de Hilbert para dominios múltiplemente conexos será estudiado en el capítulo siguiente.

§ 27. Planteamiento del problema de Hilbert y algunas fórmulas auxiliares

27.1. Planteamiento del problema de Hilbert. Sean dados un contorno cerrado suave simple L y las funciones reales del arco s del contorno $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$, que satisfacen la condición de Hölder.

Llamaremos *problema de contorno de Hilbert* a uno que se anuncia de la manera siguiente. *Hállese la función*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

analítica en el dominio D^+ y continua en el contorno, cuyos valores límites de las partes real e imaginaria satisfacen en el contorno la correlación lineal[1])

$$a(s)\,u(s) + b(s)\,v(s) = c(s). \tag{27.1}$$

Cuando $c(s) \equiv 0$, el problema será homogéneo; para $c(s)$ distinta de cero, tendremos un problema no homogéneo. (Un problema «exterior» analógico será considerado en el p. 29.4).

Pasemos, ahora, a la consideración de ciertas fórmulas auxiliares que se necesitan para la resolución del problema planteado.

27.2. Operador de Schwarz para el dominio simplemente conexo. Se encuentran con frecuencia problemas en los cuales la función $F(z) = u + iv$, analítica en el dominio, se determina según su parte real $u(s)$, definida en la frontera del dominio. Para brevedad, se le otorga a este problema, en lo sucesivo, el nombre de Schwarz. En lo esencial este problema se reduce al problema de Dirichlet[2]). Según $u(s)$ se determina la función $u(x, y)$, armónica en el dominio, y a base de esta última ya se determina, por integración de la diferencial total (la ecuación de Cauchy-Riemann), la función armónica conjugada $v(x, y)$ salvo un sumando arbitrario. De este modo, el problema de Schwarz se resuelve salvo un sumando constante arbitrario. La solución será bien determinada, si definimos en algún punto del dominio el valor de la parte imaginaria de la función analítica buscada. Con el objeto de resolver el problema de Schwarz, introduzcamos el concepto de operador de Schwarz. El empleo de este concepto contribuye a simplificar la enunciación de muchos resultados.

Por *operador de Schwarz* se comprenderá tal operador que restablece la función analítica según los valores límites de su parte real. Con la mayor exactitud lo mismo puede formularse así.

Sea dada en el contorno suave cierta función real $u(s)$, que satisface la condición de Hölder. Se llama *operador de Schwarz* S a un operador que determina la función analítica $F(z)$ cuyo valor límite de la parte real en el contorno coincide con la función $u(s)$, mientras que la parte imaginaria en el punto prefijado z_0 se reduce a cero.

Simbólicamente esto se anota en la forma siguiente:

$$F(z) = u(x, y) + iv(x, y) = Su.$$

Si el contorno L es una circunferencia unitaria, el operador de Schwarz coincidirá con la conocida integral de Schwarz; si L es el

[1]) En lo sucesivo, las funciones, obtenidas como resultado de sustitución de las coordenadas por funciones del arco s, siempre las designaremos, para simplicidad, con la misma letra: por ejemplo, $u[x(s), y(s)] = u(s)$, etc.

[2]) En el caso de un dominio múltiplemente conexo hay una distinción esencial (véase el p. 36.2).

eje real, el operador de Schwarz será una integral doblada de tipo Cauchy (véase (27.5)). Para un contorno arbitrario el operador de Schwarz puede expresarse explícitamente mediante la función de Green. Sea

$$G(x, y; \xi, \eta) = \ln \frac{1}{r} + g(x, y; \xi, \eta)$$

una función de Green del operador de Laplace para el dominio D^+, con la particularidad de que $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$, y $g(x, y; \xi, \eta)$ es una función armónica de ambos pares de las variables x, y y ξ, η, que toma el valor $\ln r$, cuando uno de los puntos (x, y), (ξ, η) resulta dispuesto en el contorno.

Vamos a considerar $G(x, y; \xi, \eta)$ como función de dos variables complejas $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, cada una de las cuales varía en el dominio D^+. Designarémosla en lo sucesivo con $G(z, \zeta)$.

Sabemos de la teoría de funciones armónicas, que la solución del primer problema de contorno para las funciones armónicas— del problema de Dirichlet— se da mediante la fórmula

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\partial G(z, \tau)}{\partial n} u(\sigma)\, d\sigma, \tag{27.2}$$

donde $\tau = \tau(\sigma)$ es la coordenada compleja de un punto del contorno, y n es la normal interior.

Sea $H(z, \zeta)$ una función armónica conjugada de la función $G(z, \zeta)$ según la variable z. Ella se determina a base de las ecuaciones de Cauchy—Riemann mediante la fórmula

$$H(z, \zeta) = \int_{z_0}^{z} \left(-\frac{\partial G}{\partial y}\, dx + \frac{\partial G}{\partial x}\, dy \right), \tag{27.3}$$

en la cual z_0 es un punto fijado del dominio D^+.

Como el dominio D^+ es simplemente conexo, la función H se determina unívocamente y, además, en vista de la fórmula (27.3), satisface la condición

$$H(z_0, \zeta) \equiv 0.$$

La función

$$M(z, \zeta) = G(z, \zeta) + iH(z, \zeta)$$

lleva el nombre de *función compleja de Green del dominio* D^+[1]). Será analítica respecto de la variable z en cualquier punto, a excepción del punto $z = \zeta$, donde posee una singularidad logarítmica.

---

[1]) El término se ha introducido por S. G. Mijlin [15].

En virtud de las igualdades (27.2) y (27.3), la fórmula

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\partial H(z, \tau)}{\partial n} u(\sigma)\, d\sigma$$

proporciona la función armónica $v(x, y)$, conjugada de la función $u(x, y)$.

De aquí, la igualdad

$$F(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\partial M(z, \tau)}{\partial n} u(\sigma)\, d\sigma$$

determina una función analítica cuya parte real es igual en el contorno a la función dada $u(\sigma)$ y que satisface la condición complementaria $v(z_0) = 0$.

Por consiguiente, el operador de Schwarz se define mediante la fórmula

$$Su \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\partial M(z, \tau)}{\partial n} u(\sigma)\, d\sigma. \tag{27.4}$$

Al despreciar la condición $v(z_0) = 0$, obtenemos

$$F(z) = Su + i\beta_0, \tag{27.5}$$

donde β_0 es una constante arbitraria igual a $v(z_0)$.

La función $T(z, \tau) = \frac{\partial M(z, \tau)}{\partial n}$ se denomina *núcleo de Schwarz* para el contorno L. Realizándose una aplicación conforme del dominio D^+ sobre un círculo unitario, éste pasa en el núcleo de Schwarz para el círculo $T(z, \tau) = \frac{\tau + z}{\tau - z}$ (véase el p. 6.1).

Entre la función de Green y el operador de Schwarz, por una parte, y la aplicación conforme del dominio sobre un círculo, por otra parte, existen lazos estrechos. Sea

$$w = F(z, \zeta) = (z - \zeta) F_1(z, \zeta)$$

una función que aplica conformemente el dominio D^+ del plano z, limitado por el contorno L, sobre un círculo unitario del plano w, y que traslada cierto punto ζ del dominio en el origen de coordenadas.

Puesto que la aplicación es biunívoca, ningún otro punto del dominio pasa en el origen, por lo cual $F_1(z, \zeta) \neq 0$.

TEOREMA. $M(z, \zeta) = G + iH = -\ln F(z, \zeta)$ *es la función compleja de Green del dominio* D^+.

Para demostrarla basta establecer que la parte real G es una función ordinaria de Green del dominio D^+. En efecto,

$$G(z, \zeta) = -\operatorname{Re} \ln F(z, \zeta) = -\ln |F(z, \zeta)| = \\ = \ln \frac{1}{|z-\zeta|} - \ln |F_1(z, \zeta)|.$$

El último término del segundo miembro es una función armónica, razón por la cual G tiene en el dominio D^+ la única singularidad $\ln \frac{1}{r}$. Cuando el punto z recorre el contorno L, el punto w, que corresponde a z, recorre la circunferencia unitaria, a consecuencia de lo cual en L se tiene $|F(z, \zeta)| = 1$, de donde

$$G|_L = 0.$$

El teorema queda demostrado.

Recordemos que en la fórmula (27.4) z es un parámetro, mientras que la variable, respecto de la cual se efectúa la derivación e integración, es ζ. Por ello, al calcular el núcleo de Schwarz $\frac{\partial M}{\partial n}$, se debe tomar la derivada respecto de una normal al contorno, considerando que ζ es una coordenada compleja del contorno. La expresión explícita del operador de Schwarz puede obtenerse para cualquier dominio, para el cual se conoce en la forma explícita la función de aplicación.

Para ilustrar lo que acabamos de decir, calculemos la función compleja de Green y el núcleo de Schwarz para un semiplano y un círculo.

1. La función que aplica conformemente el semiplano superior sobre un círculo, puede ser elegida en la forma

$$w = F(z, \zeta) = \frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}} \quad (\zeta = \xi + i\eta, \quad \eta > 0).$$

La función compleja de Green $M(z, \zeta) = -\ln F(z, \zeta) = \\ = -\ln(z-\zeta) + \ln(z-\bar{\zeta})$. La función ordinaria de Green $G(z, \zeta) = \\ = -\ln |F(z, \zeta)| = \ln \left| \frac{z-\bar{\zeta}}{z-\zeta} \right|$. En el contorno (el eje real) el sentido positivo de la normal coincide con el sentido positivo del eje imaginario η:

$$T(z, \zeta) = \frac{\partial M}{\partial \eta}\Big|_{\eta=0} = \left[\frac{1}{z-\zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} - \frac{1}{z-\bar{\zeta}} \cdot \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \eta} \right]\Big|_{\eta=0} = \\ = i \left[\frac{1}{z-\xi} + \frac{1}{z-\xi} \right] = -\frac{2i}{\xi - z}.$$

La solución del problema de Schwarz

$$f(z) = u + iv = Su = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi) \frac{(-)\,2i}{\xi - z}\, d\xi + \\ + iv_0 = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(\xi)}{\xi - z}\, d\xi + iv_0. \qquad (27.5')$$

La solución del problema de Dirichlet $u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi) \times$ $\times \frac{y}{(\xi - x)^2 + y^2}\, d\xi$ (véase, además, el problema 2 al final del capítulo).

2. La función que aplica un círculo de radio R y centro en el origen de coordenadas sobre un círculo unitario y que traslada el punto ζ en el origen, tiene la forma

$$w = F(z, \zeta) = R \frac{z - \zeta}{z\bar{\zeta} - R^2},$$

$$M(z, \zeta) = -\ln F = -\ln (z - \bar{\zeta}) + \ln (z\zeta - R^2) - \ln R.$$

El sentido positivo de la normal en este caso coincide con la dirección negativa del radio vector, por lo cual resulta más racional calcular el núcleo de Schwarz en coordenadas polares:

$$\zeta|_L = Re^{i\varphi}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial n} = -\frac{\partial \zeta}{\partial R} = -e^{i\varphi} = -\frac{\zeta}{R},$$

$$\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial n} = -e^{-i\varphi} = -\frac{R}{\zeta},$$

$$R^2 = \zeta\bar{\zeta}, \quad T(z, \zeta) = -\frac{\partial M}{\partial R}\Big|_L =$$

$$= \frac{-\frac{\partial \zeta}{\partial R}}{z - \zeta} + \frac{z\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial R}}{z\bar{\zeta} - R^2} = -\frac{\zeta}{R} \cdot \frac{1}{z - \zeta} - \frac{R}{\zeta} \cdot \frac{z}{\bar{\zeta}(z - \zeta)} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\zeta + z}{\zeta - z}.$$

Tomando en consideración que el arco $s = R\varphi$, obtenemos la solución del problema de Schwarz

$$f(z) = u + iv = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\varphi) \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, d\varphi + iv_0.$$

Al poner $z = re^{i\theta}$ y separar en la última igualdad la parte real, obtenemos la solución del problema de Dirichlet para un círculo en forma de la integral de Poisson:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\varphi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \theta)} d\varphi.$$

27.3. Determinación de la función analítica, provista de un polo, según los valores de su parte real en el contorno (problema A). En el punto antecedente se ha determinado la función, analítica en el dominio, según la parte real en el contorno. En lo sucesivo nos hará falta la solución de un problema más general en el que para la función analítica buscada en cierto punto del dominio se admite un polo. Este problema se denominará a continuación *problema A*. He aquí su enunciación exacta.

Sea dado un contorno cerrado suave simple L que limita el contorno interior D^+. Se necesita determinar la función $F(z)$ que es analítica en el dominio D^+, a excepción del punto z_0, donde para ella se admite el polo de orden no mayor que n, y cuya parte real en el contorno L se reduce a la función dada $u(s)$.

Denominaremos *problema* A_0 al problema homogéneo correspondiente ($u(s) \equiv 0$). Su solución se designará con $Q(z)$.

Resolvamos primero el problema A_0 para el caso en que el contorno L es una *circunferencia unitaria* y $z_0 = 0$.

Escribamos el desarrollo de la función buscada en el entorno del origen de coordenadas:

$$Q(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k z^k.$$

Por hipótesis

$$\operatorname{Re} \sum_{k=-n}^{\infty} c_k e^{iks} = 0.$$

Al denotar $c_k = \alpha_k + i\beta_k$, obtendremos

$$\sum_{k=-n}^{\infty} (\alpha_k \cos ks - \beta_k \operatorname{sen} ks) = 0.$$

Debido a la unicidad del desarrollo en la serie de Fourier, tendremos

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_{-k} = -\alpha_{-k}, \quad \beta_{-k} = \beta_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$
$$\alpha_k = \beta_k = 0, \quad k > n.$$

De aquí

$$c_0 = i\beta_0, \quad c_{-k} = -\overline{c_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$
$$c_k = 0 \quad (k > n).$$

Por consiguiente, la función buscada $Q(z)$ tendrá la forma

$$Q(z) = i\beta_0 + \sum_{k=1}^{n} (c_k z^k - \overline{c_k} z^{-k}). \tag{27.6}$$

OBSERVACIÓN. Si en la enunciación del problema A_0 para un círculo unitario el dominio D^+, que es interior para la circunferencia unitaria, se cambia por el dominio D^-, que es exterior para ella, entonces, tanto los razonamientos como el resultado definitivo quedan inalterables y, por lo tanto, la fórmula (27.6) ofrece la solución del problema A_0 también para el dominio D^-, exterior con relación a la circunferencia unitaria con polo en el infinito.

La solución del problema A_0 para un dominio arbitrario como también para un círculo unitario, mas con polo en el punto z_0, puede ser obtenida de la solución hallada con ayuda de una aplicación conforme.

Sea

$$w = \omega(z) \tag{27.7}$$

una función que aplica conformemente el dominio D^+ del plano z sobre el círculo unitario del plano w de un modo tal que cierto punto z_0 pasa en el origen de coordenadas $\omega(z_0) = 0$ y $\omega'(z_0) > 0$.

En este caso, la fórmula

$$Q(z) = i\beta_0 + \sum_{k=1}^{n} \{c_k [\omega(z)]^k - \overline{c_k} [\omega(z)]^{-k}\} \tag{27.8}$$

proporciona, lo que se comprueba con facilidad, *la solución del problema A_0 para un dominio arbitrario D^+* con polo de orden n en el punto z_0.

Si por $\omega(z)$ se comprende una función que aplica conformemente el dominio D^- sobre un dominio exterior para la circunferencia unitaria y que traslada un punto infinitamente alejado en otro punto infinitamente alejado, siendo $\omega'(\infty) > 0$, entonces la fórmula (27.8) dará la solución del problema A_0 para el dominio D^-.

Ahora estamos preparados para resolver el problema A.

Por definición del operador de Schwarz, Su es una función, analítica en el dominio D^+, cuya parte real en el contorno es igual a $u(s)$. La diferencia $F(z) - Su$ será, evidentemente, una función que satisface las condiciones del problema A_0. Por consiguiente,

$$F(z) - Su = Q(z),$$

de donde

$$F(z) = Su + Q(z), \tag{27.9}$$

donde el operador de Schwarz Su se define mediante la fórmula (27.4), y la solución $Q(z)$ del problema homogéneo A_0, por la fórmula (27.8).

Según muestran las fórmulas (27.8), (27.9), en las soluciones de los problemas A_0 y A figuran de una manera lineal $2n + 1$ constantes reales arbitrarias.

$$\beta_0, \quad \alpha_k, \quad \beta_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n \ (c_k = \alpha_k + i\beta_k).$$

En particular, cuando el polo está ausente ($n = 0$), la fórmula (27.9) se convierte en la (27.5).

Para construir la función $F(z)$ (que posea las propiedades citadas arriba) según valores límites en el contorno de su parte imaginaria $v(s)$, es suficiente notar que

$$\operatorname{Im} F(t) = \operatorname{Re}[-iF(t) = v(s),$$

de donde

$$-iF(z) = Sv + Q(z),$$

es decir,

$$F(z) = iSv + iQ(z). \tag{27.10}$$

27.4. Problema generalizado A_0. En el punto 27.3 para la solución del problema A_0 se admitía la única singularidad elemental —el polo en el origen de coordenadas. Aquí admitamos las singularidades de cualquier carácter con la parte principal prefijada.

DEFINICIÓN 1. Se llama *parte principal de la función* $\Phi(z)$ en el conjunto $\sum$ a una función $f(z)$, que es analítica en todo el plano a excepción de los puntos del conjunto $\sum$, y tal que la diferencia $\Phi_1(z) = \Phi(z) - f(z)$ es analítica en el conjunto $\sum$.

COROLARIO. *Si $\Phi(z)$ es analítica en el dominio D, a excepción del conjunto de sus puntos $\sum$, entonces la diferencia $\Phi_1(z) = \Phi(z) - f(z)$ es analítica en D.*

DEFINICIÓN 2. Se denominará *problema generalizado* A_0 un problema en que se halla la función $Q(z)$, analítica en un círculo γ de radio R y centro en el origen de coordenadas, a excepción del conjunto de sus puntos $\sum$, donde ella tiene ciertas singularidades con la parte principal $f(z)$ prefijada, a la condición de que la parte real $Q(z)$ sea nula en el contorno del círculo L_z:

$$\operatorname{Re} Q(z) \,|L_z = 0. \tag{27.11}$$

Para obtener la solución del problema, hagamos uso del principio de simetría. La condición de contorno (27.11) significa en el lenguaje geométrico que la función $Q(z)$ aplica la circunferencia

L_z del plano z sobre el eje imaginario del plano $w = Q(z)$. De este modo, las condiciones, bajo las cuales se demostraba el principio de simetría, resultan factibles (p. 12.1).

Los puntos, simétricos respecto del eje imaginario, serán los puntos w y $w^* = -\overline{w}$.

Representemos la función $Q(z)$ en la forma

$$Q(z) = Q_1(z) + f(z), \tag{27.12}$$

donde $Q_1(z)$ es una función hasta ahora incógnita, analítica en el círculo γ. Hagamos prolongar, ahora, la función $Q(z)$ al exterior de la circunferencia L_z, rigiéndonos de simetría, es decir, pongamos en correspondencia a los puntos z y $z^* = R^2/\overline{z}$, simétricos respecto de la circunferencia L_z, los puntos w y $w^* = -\overline{w}$, simétricos respecto del eje imaginario del plano w. En este caso, de acuerdo con el principio de simetría (p. 12.1), las funciones

$$w = Q(z) = Q_1(z) + f(z)$$

y

$$w^* = -\overline{Q\left(\frac{R^2}{\overline{z}}\right)} = -\overline{Q}_1\left(\frac{R^2}{z}\right) - \overline{f}\left(\frac{R^2}{z}\right)$$

serán prolongaciones analíticas una de la otra. En el contorno L_z sus valores son

$$[Q_1(z) + f(z)]_{L_z} = \left[-\overline{Q}_1\left(\frac{R^2}{z}\right) - \overline{f}\left(\frac{R^2}{z}\right)\right]_{L_z}$$

o

$$\left[Q_1(z) + \overline{f}\left(\frac{R^2}{z}\right)\right]_{L_z} = \left[-f(z) - \overline{Q}_1\left(\frac{R^2}{z}\right)\right]_{L_z}.$$

En el miembro izquierdo figura una función analítica en el círculo γ. Conforme a las propiedades de una prolongación por simetría, el miembro derecho es una función, analítica fuera de γ. En virtud del principio de continuidad (p. 12.1), ellas son prolongaciones analíticas una de la otra; por ello, constituyen una función analítica en todo el plano y, de acuerdo con el teorema de Liouville, constante. En virtud de la condición de contorno (27.11) esta constante será puramente imaginaria. Por consiguiente, tendremos

$$Q_1(z) + \overline{f}\left(\frac{R^2}{z}\right) = i\beta,$$

donde $i\beta$ es una constante arbitraria puramente imaginaria. De aquí

$$Q_1(z) = -\overline{f}\left(\frac{R^2}{z}\right) + i\beta.$$

Introduciendo la última expresión en (27.12), obtendremos la solución del problema generalizado A_0

$$Q(z) = f(z) - \overline{f}\left(\frac{R^2}{z}\right) + i\beta. \qquad (27.13)$$

Si la circunferencia es unitaria y se admite la única singularidad —el polo de orden n en el origen de coordenadas—, entonces al tomar la parte principal en la forma $f(z) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{c_k}}{z^k}$, obtendremos la fórmula (27.6). La fórmula (27.13) permite resolver los problemas de generalidad considerablemente mayor: el conjunto de puntos singulares $\sum$ puede contener tanto puntos aislados (polos y puntos esencialmente singulares en una cantidad cualquiera) como los continuos enteros de singularidades.

Ejemplo 1. Supongamos que el conjunto de singularidades consta de los puntos de una sucesión infinita $z_k = \frac{1}{\sqrt{2k\pi i}}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, los cuales son polos simples con residuo unidad, y de su punto límite $z = 0$, el cual será, evidentemente, un punto esencialmente singular.

Es fácil comprobar que la parte principal puede ser representada en la forma $f(z) = \frac{1}{e^{1/z^2} - 1}$. De aquí, $\overline{f}\left(\frac{R^2}{z}\right) = \frac{1}{e^{z^2/R^4} - 1}$.

La solución del problema generalizado A_0 viene dada por la función

$$Q(z) = \frac{1}{e^{1/z^2} - 1} - \frac{1}{e^{z^2/R^4} - 1} + i\beta.$$

Ejemplo 2. El conjunto $\sum$ es una línea de discontinuidad C de salto $\varphi(t)$. La parte principal se representa por la integral de tipo de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\, d\tau.$$

La solución del problema es la función

$$Q(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\, d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\overline{\tau} - \frac{1}{z}}\, \overline{d\tau} + i\beta.$$

La idea del método utilizado se ofrece en la obra de C. Jacob, 1)**, donde ella se emplea para la resolución de otros problemas.

§ 28. Factor de regularización

28.1. Definición del factor de regularización. Sea L un contorno cerrado suave simple que limita el dominio interior D^+ y sea

$$G(t) = G[t(s)] = a(s) + ib(s)$$

una función compleja que está definida en el contorno, satisface la condición de Hölder y no se reduce a cero. Una función arbitraria $G(t)$, como ya se ha indicado en el p. 4.3, no es, en el caso general, el valor de contorno de la función analítica en el dominio D^+.

Aclaremos si se puede *definir tal función de los puntos de contorno* $R(t)$ *que satisfaga la condición de Hölder y que siendo multiplicada por la función* $G(t)$, *nos dé un valor de contorno de la función* $\Phi^+(z)$, *analítica en el dominio* D^+, es decir,

$$G(t)\,R(t) = \Phi^+(t). \tag{28.1}$$

La función $R(t)$ que posee esta propiedad, se denominará *factor de regularización.*

Podemos generalizar más el planteamiento del problema, admitiendo que la función $\Phi^+(z)$ tiene en ciertos puntos del dominio D^+ unas singularidades de carácter prefijado.

Con tal planteamiento el problema no está definido, pues si se admite alguna solución de éste, entonces, evidentemente, se debe admitir el conjunto infinito de otras soluciones que se obtienen de la solución dada multiplicándola por el valor de contorno de cualquier función analítica en D^+. Por esta razón el planteamiento del problema necesita ser precisado. Para que el problema se haga definido, deben imponerse ciertas condiciones complementarias sobre el factor de regularización; las últimas pueden ser muy diversas.

Con uno de los casos de la búsqueda del factor de regularización ya nos encontramos al resolver el problema de contorno homogéneo de Riemann. En efecto, al escribir la condición de contorno de este problema en la forma

$$G(t)\,\Phi^-(t) = \Phi^+(t),$$

vemos que ella representa una igualdad de tipo (28.1), con la particularidad de que $R(t) = \Phi^-(t)$. De este modo, el problema de contorno de Riemann puede considerarse como un problema en que se busca el factor de regularización sobre el cual se ha impuesto la condición complementaria de que éste sea valor de contorno de una función analítica en el dominio exterior D^-. La solución del problema de Riemann establece la existencia de tal factor para $\varkappa \geqslant 0$.

A la par con el factor mencionado, en la práctica se encuentran, además, dos clases de los factores de regularización:

1) de argumento constante;
2) de módulo constante.

Sin restringir la generalidad podemos, en el primer caso, igualar a cero el argumento constante y considerar, por lo tanto, que el factor es real positivo. En lo que se refiere al segundo caso, podemos considerar el módulo equivalente a la unidad. Dos siguientes puntos están dedicados a la búsqueda de los factores de regularización de clases indicadas.

28.2. Factor de regularización real. Exijamos que el factor de regularización $R(t)$ sea representado por una función real; designándolo en este caso con $p(s)$, tenemos

$$p(s)[a(s) + ib(s)] = \Phi^+(t). \tag{28.2}$$

Tomando el índice de los dos miembros y teniendo en cuenta que el índice $p(s)$ es igual a cero, obtenemos

$$\varkappa = \operatorname{Ind}[a(s) + ib(s)] = \operatorname{Ind}\Phi^+(t).$$

Al recordar las propiedades del índice (p. 12.1), llegamos a que:

1. Cuando $\varkappa = 0$, la función $\Phi^+(z)$, no puede tener ceros en el dominio D^+.
2. Cuando $\varkappa > 0$, la función $\Phi^+(z)$ debe tener en D^+ $\varkappa$ ceros.
3. Cuando $\varkappa < 0$, la función $\Phi^+(z)$ no puede ser analítica en D^+; ella debe tener en este dominio no menos que $-\varkappa$ polos.

Deseando asegurar la resolubilidad (y, además, unívoca) del problema de búsqueda del factor de regularización de la clase en consideración, cualquiera que sea el índice, atribuyamos a este concepto una definición algo diferente para la cual se admite que la función analítica buscada tenga polo en el dominio D^+.

Para simplificar, consideraremos que el origen de coordenadas se dispone en el dominio D^+.

DEFINICIÓN. Se llama *factor de regularización de la función compleja* $a(s) + ib(s)$, definida en el contorno L, a una función positiva real de los puntos de contorno $p(s)$ de tal índole que el producto $p(s)[a(s) + ib(s)]$ sea el valor de contorno de la función $\chi^+(z)$, que es analítica y tiene el orden cero en todos los puntos del dominio D^+, a excepción, quizás, del origen de coordenadas, donde su orden es igual al índice $\varkappa$ de la función $a(s) + ib(s)$. (Véase en el p. 12.2 la definición de orden.)

Demostremos la existencia del factor de regularización y deduzcamos las fórmulas para determinarlo.

1°. $\varkappa = 0$ La función $\chi^+(z)$ no tiene ceros en el dominio D^+ y por esto puede ser representada en forma de una función exponencial

$$\chi^+(z) = e^{i\gamma(z)}, \quad \gamma(z) = \omega(x, y) + i\omega_1(x, y). \tag{28.3}$$

(El factor i del exponente se introduce con el fin de hacer más cómodos los cálculos posteriores.)

Por definición del factor de regularización tendremos [1])

$$p(s)[a(s)+ib(s)]=e^{i\gamma(t)}=e^{-\omega_1(s)}e^{i\omega(s)}. \tag{28.4}$$

Igualando los módulos y argumentos de ambos miembros de la última igualdad, obtenemos

$$p(s)\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}=e^{-\omega_1(s)},$$

$$\omega(s)=\operatorname{arctg}\frac{b(s)}{a(s)}. \tag{28.5}$$

La última fórmula determina el valor de contorno de la función armónica $\omega(x, y)$. La propia función $\omega(x, y)$ se define por la solución del problema de Dirichlet. A continuación, de las ecuaciones de Cauchy—Riemann se determina la función armónica conjugada $\omega_1(x, y)$, y, por fin, en términos del valor de contorno de ésta última se expresa el factor de regularización buscado $p(s)$.

Con la mayor sencillez los resultados se expresan por medio del operador de Schwarz.

De acuerdo con (27.5) y (28.5) tendremos

$$\gamma(z)=\omega(x, y)+i\omega_1(x, y)=S\operatorname{arctg}\frac{b}{a}, \tag{28.6}$$

donde sobre $\gamma(z)$ se impone, para concretar, la condición

$$\operatorname{Im}\gamma(z_0)=\omega_1(z_0)=0. \tag{28.7}$$

El factor de regularización se determinará mediante la fórmula

$$p(s)=\frac{e^{-\omega_1(s)}}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}}. \tag{28.8}$$

Examinemos la cuestión sobre la unicidad del factor de regularización. Supongamos la existencia de dos factores diferentes $p(s)$ y $p_1(s)$. Tendremos las igualdades

$$p(s)[a(s)+ib(s)]=\chi^+(s), \quad p_1(s)[a(s)+ib(s)]=\chi_1^+(s).$$

Al dividir las últimas igualdades término por término y al designar $\frac{\chi_1^+(z)}{\chi^+(z)}=\psi(z)$, obtendremos

$$\frac{p_1(s)}{p(s)}=\psi(s).$$

La parte imaginaria de la función $\psi(z)$ en el contorno es nula. Por ello, debido a la unicidad de solución del problema de Dirichlet, $\operatorname{Im}\psi(z)=0$ en todos los puntos del dominio D^+. De aquí, $\psi(z)=$ $=$ const.

[1]) Se emplean las designaciones simplificadas (véase la nota al pie de la pág. 275).

Por consiguiente, el factor de regularización se determina salvo el factor constante. La condición (28.7) precisamente define este factor constante.

Así pues, hemos demostrado la existencia y unicidad del factor de regularización cuando $\varkappa = 0$ con la condición complementaria (28.7).

2°. $\varkappa \neq 0$. Por definición, tendremos

$$p(s)[a(s) + ib(s)] = t^{\varkappa} e^{i\gamma(t)} = t^{\varkappa} e^{-\omega_1(s)} e^{i\omega(s)}. \tag{28.9}$$

Tomando los módulos y argumentos en los dos miembros, obtenemos

$$p(s) = \frac{|t|^{\varkappa} e^{-\omega_1(s)}}{\sqrt{a^2(s) + b^2(s)}},$$
$$\omega(s) = \arg\{t^{-\varkappa}[a(s) + ib(s)]\} = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} - \varkappa \arg t. \tag{28.10}$$

De aquí

$$\gamma(z) = S\left[\operatorname{arctg}\frac{b}{a} - \varkappa \arg t\right]. \tag{28.11}$$

El factor de regularización se determinará mediante la fórmula (28.10). La unicidad de la solución se desprende de los razonamientos anteriores, puesto que, conforme a la igualdad (28.9), el problema se reduce a la búsqueda del factor de regularización de la función $t^{-\varkappa}[a(s) + ib(s)]$, cuyo índice es igual a cero.

Queda, pues, demostrado el siguiente

TEOREMA. *Una función arbitraria de los puntos de un contorno, que satisface en el último la condición de Hölder y no se reduce a cero, posee un factor de regularización real el cual para la condición complementaria* (28.7) *se determina unívocamente mediante las fórmulas* (28.6), (28.8), (28.10), (28.11).

La búsqueda del factor de regularización en forma de una función real es equivalente, como lo muestran las investigaciones, a la búsqueda de una función analítica por los valores de su argumento, prefijados en el contorno, lo que también conduce a la resolución del problema de Schwarz.

28.3. Factor de regularización de módulo constante. Buscaremos, ahora, el factor de regularización en la forma

$$R(t) = e^{i\theta(s)}. \tag{28.12}$$

Representemos la función compleja dada también en coordenadas polares $a + ib = re^{i\alpha}$. Por definición, se tiene

$$re^{i(\alpha+\theta)} = \Phi^+(t). \tag{28.13}$$

Vamos a buscar la función $\theta(s)$ bajo la condición de que al haberse recorrido el contorno L, ella adquiere el incremento $2\pi\nu$, donde ν

es un número entero prefijado. Al tomar el índice de ambos miembros de la última igualdad, obtenemos

$$\varkappa + \nu = n, \tag{28.14}$$

donde n señala el número de ceros de la función $\Phi^+(z)$ en el dominio D^+, dependiente, de este modo, no sólo del índice de la función dada $a + ib$, sino también del índice del propio factor de regularización, el cual, a diferencia de lo anterior, no es necesariamente igual a cero.

Impondremos sobre la función buscada $\Phi^+(z)$ la condición de que ella tiene el orden n en el origen de coordenadas, considerándolo a este último perteneciente al dominio D^+. Representando la función buscada $\Phi^+(z)$ en la forma $z^n e^{\gamma(z)}$, tendremos

$$re^{i(\theta+\alpha)} = t^n e^{\gamma(t)} = t^n e^{\omega(s)} e^{i\omega_1(s)}. \tag{28.15}$$

Igualando en la última igualdad los módulos y argumentos, obtendremos

$$\omega = \ln(r \mid t \mid^{-n}), \tag{28.16}$$

$$\omega_1 = \theta + \alpha - n \arg t. \tag{28.17}$$

Por consiguiente, el valor de contorno de la parte real ω de la función analítica buscada $\gamma(z)$ resulta conocido. Al haber resuelto el problema de Dirichlet, encontraremos la función armónica $\omega(x, y)$. Determinada, a continuación, la función armónica conjugada ω_1, se halla, según la fórmula (28.17), la función θ, en términos de la cual se expresa, mediante la fórmula (28.12), el mismo factor de regularización.

El resultado se escribe fácilmente con ayuda del operador de Schwarz

$$\gamma(z) = \omega(x, y) + i\omega_1(x, y) = S \ln(r \mid t \mid^{-n}), \tag{28.18}$$

aceptando, para concretar, que

$$\operatorname{Im} \gamma(z_0) = 0. \tag{28.19}$$

El factor de regularización se determina mediante la fórmula

$$R(t) = e^{i(\omega_1 - \alpha + n \arg t)}. \tag{28.20}$$

Las fórmulas (28.18)—(28.20) definen unívocamente el factor de regularización de la clase requerida.

Como lo muestra la resolución efectuada, la determinación de un factor de regularización de módulo constante equivale a la búsqueda de una función analítica según valores de contorno de su módulo, lo que en definitiva se reduce a la resolución del problema de Schwarz.

28.4. Otras clases del factor de regularización. La definición general, dada en el p. 28.1 para el factor de regularización, ofrece la amplia libertad en la elección de distintas clases de este factor. No puede sino percebirse la gran semejanza que existe entre la definición de factor de regularización y la de factor integrante, conocido en la teoría de ecuaciones diferenciales. Abmos estos factores permiten una gran arbitrariedad de elección y el problema de su búsqueda se hace definido sólo en el caso cuando nosotros rechazamos un planteamiento general y buscamos el factor de la clase bien determinada.

En los pp. 28.2, 28.3 se han considerado las clases elementales del factor de regularización, cuando su módulo o argumento son constantes. Estos casos admiten una interpretación geométrica.

Convengamos en considerar que la función compleja $a(s) + ib(s) = re^{i\alpha}$ se define como una curva Γ, cuya ecuación paramétrica en las coordenadas polares tiene la forma

$$r = r(s), \quad \alpha = \alpha(s).$$

Multiplicando la función $re^{i\alpha}$ por el factor de regularización positivo y real $p(s)$, realizamos cierta transformación con los puntos de la curva Γ, que consiste en lo que los radios vectores de la curva Γ, conservando la dirección, cambian de magnitud con relación a $p(s)$, es decir, efectuamos la transformación de estiramiento (siendo variable el módulo de estiramiento). El problema a resolver consiste en la elección de tal módulo de estiramiento (que es variable y cambia continuamente) que la curva transformada Γ_1, cuya ecuación es $r_1 = p(s) r(s)$, $\alpha_1 = \alpha(s)$, proporcione una representación geométrica (en el sentido indicado más arriba) de la función compleja $\Phi^+(t)$, la cual sirve de valor de contorno de cierta función analítica en el dominio D^+.

La multiplicación de la función compleja $re^{i\alpha}$ por el factor de la clase $e^{i\theta(s)}$ puede interpretarse en el lenguaje geométrico como un giro de los radios vectores de la curva Γ en cierto ángulo $\theta(s)$ (que es variable y cambia continuamente), con la particularidad de que este ángulo se escoge de una manera tal que la curva transformada de ecuación $r_1 = r(s)$, $\alpha_1 = \alpha(s) + \theta(s)$ sea la representación geométrica del valor de contorno de una función analítica en el dominio D^+ (excepción, quizás, del polo en el origen de coordenadas).

Si representamos geométricamente (igual que en el ejemplo anterior) el mismo factor de regularización, se revela que en el primer caso se definirá por la ecuación $\rho = u(s)$, $\varphi = 0$, y por la expresión geométrica tendrá un segmento del semieje positivo que se pasa dos veces o, en general, un número par de veces. En el segundo caso el factor tiene la ecuación $\rho = 1$, $\varphi = \theta(s)$, y , por lo tanto, su representación geométrica es una circunferencia unitaria que se pasa $n - \varkappa$ veces (véase (28.14)).

Al generalizar de un modo natural el planteamiento del problema, podemos buscar un factor de regularización cuya representación geométrica se da por una curva prefijada de antemano.

Supongamos que en el contorno L está definida una función compleja $a(s) + ib(s) = re^{i\alpha}$, y la curva Γ sirve de su representación geométrica. Definamos, además, otra curva C, cuya ecuación polar es $\rho = f(\theta)$. Se necesita hallar para la función $a(s) + ib(s)$ el factor de regularización $R(t) = \rho(s)e^{i\theta(s)}$, cuyos módulo y argumento se encuentran entrelazados mediante tal dependencia $\rho = f(\theta)$ que la curva dada C sirva de representación geométrica de $R(t)$.

Igualemos a $2\pi n$ la variación $\alpha(s) + \theta(s)$ que surge al recorrer el contorno L y convengamos en considerar que la función analítica buscada $\Phi^+(z)$ tiene el orden n en el origen de coordenadas.

Por definición tendremos

$$\rho(s) r(s) e^{i[\alpha(s)+\theta(s)]} = t^n e^{\omega(s)} e^{i\omega_1(s)}. \qquad (28.21)$$

Expresando de la última igualdad $\rho(s)$ y $\theta(s)$, y haciendo uso de la ecuación de la curva C, se obtiene

$$(r(s)f[\omega_1(s) - \alpha(s) + n \arg t] = |t|^n e^{\omega(s)}. \quad (28.22)$$

La última correlación es una condición de contorno que liga las partes real (ω) e imaginaria (ω_1) de la función analítica $\gamma(z)$. De este modo, el planteamiento general del problema de búsqueda del factor de regularización lleva, en el caso general, a los problemas de contorno no lineales. Los métodos de resolución de los problemas de tal género están elaborados sólo para algunos casos elementales, razón por la cual la resolución del problema de contorno (28.21) queda, como regla, irrealizable.

No obstante, se puede indicar unos casos en que el problema se hace lineal y admite una solución. Por ejemplo, si la curva C representa una espiral logarítmica cuya ecuación es $\rho = e^{\theta}$, entonces la condición de contorno (28.22) se convertirá en la lineal de tipo del problema de Hilbert

$$\omega_1 - \omega = \alpha - \ln r + n \ln |t| - n \arg t.$$

Al anotar lo último en la forma

$$-\mathrm{Re}\,[(1+i)\gamma(t)] = \alpha(s) - \ln r(s) + n \ln |t(s)| - n \arg t(s),$$

obtenemos con facilidad la función $\gamma(z) = \omega + i\omega_1$, y según esta última, la solución de todo el problema.

Ha de notarse que se habría podido tomar por base la definición de la curva C en las coordenadas cartesianas.

Los razonamientos expuestos, que se apoyan en la definición de cierta dependencia entre el módulo y el argumento o bien entre la parte real y la imaginaria del factor de regularización, señalan sólo uno de los métodos eventuales para la construcción de éste. El factor puede buscarse a partir de sumamente otros razonamientos, lo que muestra siquiera el ejemplo del factor que aparece en la resolución del problema de Riemann lo cual se ha indicado a los principios del párrafo.

Merecen, pues, atención las investigaciones que tienen por objeto encontrar factores de regularización subordinados a unas u otras condiciones por analogía con lo que se hace en la teoría del factor integrante. Tal vez, podríamos llegar a los casos en que el factor de regularización, por una parte, resultaría útil para resolver algún problema de uso práctico, y, por otra parte, la obtención del factor se realizaría con ayuda de un algoritmo provechoso en la práctica.

§ 29. Problema de contorno de Hilbert para el dominio simplemente conexo

29.1. Problema homogéneo. Procedamos, por fin, a la cuestión principal del capítulo —a la resolución del problema de contorno de Hilbert. Escribamos la condición de contorno del problema homogéneo

$$a(s)\,u(s) + b(s)\,v(s) = 0. \quad (29.1)$$

Consideraremos que los coeficientes $a(s)$ y $b(s)$ no se reducen a cero al mismo tiempo. Al dividir la condición de contorno por $\sqrt{a^2(s) + b^2(s)}$, reduzcámosla a un caso en que los coeficientes satisfagan la condición

$$a^2(s) + b^2(s) = 1 \quad (29.2)$$

Vamos a considerar en lo sucesivo que la condición (29.2) se cumple siempre.

Se tiene

$$\frac{u+iv}{a+ib} = (a-ib)(u+iv) = au+bv+i(av-bu).$$

Por ello, la condición de contorno (29.1) puede anotarse en dos formas equivalentes:

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{F(t)}{a+ib}\right\} = 0, \tag{29.3}$$

$$\operatorname{Re}\{(a-ib)\,F(t)\} = 0, \tag{29.3'}$$

donde

$$F(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{29.4}$$

es la función buscada.

El índice $\varkappa$ de la función $a(s) + ib(s)$ se llamará *índice del problema de Hilbert.*

Al dividir ambos miembros de la igualdad (29.3) por el factor de regularización de la función $a + ib$ (fórmulas (28.9), (28.10)), reduzcámosla a la forma

$$\operatorname{Re}\left[\frac{F(t)}{t^{\varkappa}e^{i\gamma(t)}}\right] = 0. \tag{29.5}$$

Examinemos los siguientes tres casos.

1°. $\varkappa = 0$. Aquí, la condición de contorno (29.5) es la del problema de Schwarz. Debido a la unicidad de la solución de este problema tendremos en el dominio D^+

$$\operatorname{Re}\left[\frac{F(z)}{e^{i\gamma(z)}}\right] = 0,$$

de donde

$$F(z) = i\beta_0 e^{i\gamma(z)}, \tag{29.6}$$

donde β_0 es una constante arbitraria.

2°. $\varkappa > 0$. La condición de contorno (29.5) es la del problema A_0. En virtud de los resultados obtenidos en el p. 27.3, se tiene

$$F(z) = z^{\varkappa}e^{i\gamma(z)}Q(z), \tag{29.7}$$

donde $Q(z)$ se determina con las fórmulas (27.7), (27.8). Por consiguiente, el problema tiene $2\varkappa + 1$ soluciones linealmente independientes.

3°. $\varkappa < 0$. En este caso no existe solución del problema en las funciones analíticas. El problema tendría una solución, si a título de admisibles se tomaran unas funciones que posean en el dominio D^+ no menos que $-\varkappa$ polos.

29.2. Problema no homogéneo. Escribamos la condición de contorno (27.1) en la forma

$$\operatorname{Re}\left[\frac{F(t)}{a(s)+ib(s)}\right]=c(s). \tag{29.8}$$

Por analogía con lo que se hacía para el problema homogéneo, dividamos ambos miembros de la condición de contorno por el factor de regularización de la función $a(s)+ib(s)$:

$$\operatorname{Re}\left[\frac{F(t)}{t^{\varkappa}e^{i\gamma(t)}}\right]=|t|^{-\varkappa}e^{\omega_1(s)}c(s). \tag{29.9}$$

Veamos los casos posibles.

1°. $\varkappa=0$. La condición de contorno (29.9) es la del problema de Dirichlet. Tomando de los ambos miembros el operador de Schwarz y despejando $F(z)$, obtenemos

$$F(z)=e^{i\gamma(z)}[S(e^{\omega_1(s)}c(s))+i\beta_0]. \tag{29.10}$$

2°. $\varkappa>0$. La condición de contorno (29.9) es la del problema A, y, en virtud de los resultados del p. 27.3,

$$F(z)=z^{\varkappa}e^{i\gamma(z)}[S(|t|^{-\varkappa}e^{\omega_1(s)}c(s))+Q(z)]. \tag{29.11}$$

Puesto que las fórmulas (29.10) y (29.11) contienen, en calidad de sumandos, las soluciones generales de los problemas homogéneos correspondientes, se hace obvio que ellas nos dan la solución general del problema no homogéneo.

3°. $\varkappa<0$. Procediendo por analogía con lo anterior, obtenemos

$$F(z)=z^{\varkappa}e^{i\gamma(z)}[S(|t|^{-\varkappa}e^{\omega_1(s)}c(s))+iC]. \tag{29.12}$$

Debido a la presencia del factor $z^{\varkappa}$, la función $F(z)$, definida mediante la última fórmula, puede tener el polo de orden $-\varkappa$. Con el objeto de obtener una solución analítica hace falta exigir que la función

$$S(|t|^{-\varkappa}e^{\omega_1(s)}c(s))+iC$$

tenga en el origen de coordenadas un cero de orden $-\varkappa$. Esto nos dará, lo que puede ser comprobado con cálculos inmediatos, $-2\varkappa-1$ condiciones, las cuales debe satisfacer el término independiente para que se pueda obtener la solución del problema. Si no se dispone de la expresión explícita del operador de Schwarz para un contorno arbitrario, no existe la posibilidad de escribir estas condiciones de resolubilidad en el caso general. Siempre que tal expresión se conoce, dichas condiciones pueden escribirse explícitamente. (En el punto que sigue lo haremos para el círculo unitario).

Enunciaremos los resultados obtenidos.

TEOREMA. *Si el índice de la función compleja* $a(s) + ib(s)$ *es mayor o igual a cero* ($\varkappa \geqslant 0$), *el problema de contorno de Hilbert homogéneo* (29.1) *y el no homogéneo* (29.8) *son incondicionalmente resolubles. El problema homogéneo tiene* $2\varkappa + 1$ *soluciones linealmente independendientes cuya combinación lineal está contenida en la solución general a título de un sumando.*

Si $\varkappa < 0$, *el problema homogéneo resulta insoluble. El problema no homogéneo es resoluble cuando, y sólo cuando, el término independiente satisface* $-2\varkappa - 1$ condiciones de resolubilidad.

La teoría expuesta señala que la resolución del problema de Hilbert se reduce, en lo fundamental, a la resolución de tres problemas de Dirichlet. El primer problema se resuelve cuando se busca el factor de regularización; el segundo problema, cuando se halla la solución particular del problema no homogéneo, y, por fin, la búsqueda de la función $Q(z)$ para un dominio arbitrario se reduce a la de una función que aplique conformemente el dominio sobre un círculo, lo que, a su turno, es equivalente a la resolución del problema de Dirichlet.

29.3. Problema para un círculo unitario y un semiplano. Para un círculo unitario *el operador de Schwarz* coincide con *la integral de Schwarz*. Denotemos

$$F(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

$$\gamma(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{b(\sigma)}{a(\sigma)} - \varkappa\sigma \right] \frac{e^{i\sigma} + z}{e^{i\sigma} - z}\, d\sigma,$$

$$\gamma(z) = \omega(x, y) + i\omega_1(x, y), \tag{29.13}$$

$$Q(z) = i\beta_0 + \sum_{k=1}^{\varkappa} (c_k z^k - \bar{c}_k z^{-k}). \tag{29.14}$$

Al tener en cuenta que en el contorno $|t| = 1$, llegamos a que la solución del problema de Hilbert

$$a(s)\, u(s) + b(s)\, v(s) = c(s)$$

se representará por las fórmulas siguientes

1°. Cuando $\varkappa = 0$

$$F(z) = e^{i\gamma(z)} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\omega_1(\sigma)} c(\sigma) \frac{e^{i\sigma} + z}{e^{i\sigma} - z}\, d\sigma + i\beta_0 \right]. \tag{29.15}$$

2°. Cuando $\varkappa > 0$,

$$F(z) = z^{\varkappa} e^{i\gamma(z)} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\omega_1(\sigma)} c(\sigma) \frac{e^{i\sigma} + z}{e^{i\sigma} - z}\, d\sigma + Q(z) \right]. \tag{29.16}$$

3°. Cuando $\varkappa < 0$,

$$F(z) = z^{\varkappa} e^{i\gamma(z)} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\omega_1(\sigma)} c(\sigma) \frac{e^{i\sigma}+z}{e^{i\sigma}-z}\, d\sigma. \qquad (29.17)$$

En el último caso, para que el problema sea resoluble, la función

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\omega_1(\sigma)} c(\sigma) \frac{e^{i\sigma}+z}{e^{i\sigma}-z}\, d\sigma =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\omega_1(\sigma)} c(\sigma)\, d\sigma + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{\omega_1(\sigma)} c(\sigma) \frac{d\sigma}{1-ze^{-i\sigma}} \qquad (29.18)$$

tiene que tener en el origen de coordenadas un cero de orden $-\varkappa$. Desarrollando esta función en la serie de potencias en el entorno del origen de coordenadas e igualando a cero los primeros $-\varkappa$ coeficientes, obtendremos

$$\int_0^{2\pi} e^{\omega_1(\sigma)} c(\sigma)\, e^{-ik\sigma}\, d\sigma = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, -\varkappa - 1) \qquad (29.19)$$

o, en una forma real,

$$\int_0^{2\pi} e^{\omega_1(\sigma)} c(\sigma) \cos k\sigma\, d\sigma = 0, \quad \int_0^{2\pi} e^{\omega_1(\sigma)} c(\sigma) \operatorname{sen} k\sigma\, d\sigma = 0 \qquad (29.20)$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, -\varkappa - 1).$$

Las fórmulas (29.20) dan $-2\varkappa - 1$ condiciones de resolubilidad, las cuales debe satisfacer el término independiente para que el problema no homogéneo de Hilbert de índice negativo sea resoluble.

Demos a conocer, sin detenernos en los detalles, una solución más del problema de Hilbert para el semiplano. El operador de Schwarz coincide, en este caso, con la integral de tipo de Cauchy (véase la fórmula (27.5′)). Al tomar la función, que aplica conformemente el semiplano sobre el círculo, en la forma

$$\omega(z) = \frac{z-i}{z+i},$$

tendremos la siguiente expresión para resolver el problema A_0 mediante la fórmula (27.8)

$$Q(z) = i\beta_0 + \sum_{k=1}^{n} \left[c_k \left(\frac{z-i}{z+i} \right)^k - \bar{c}_k \left(\frac{z+i}{z-i} \right)^k \right]. \qquad (29.14')$$

En lugar de la función t, utilizada anteriormente para reducir el índice del coeficiente a cero, en el caso dado se puede emplear $\frac{t-i}{t+i}$ (véase el p. 14.7).

Usando las designaciones propias a los razonamientos de arriba y procediendo de una manera igual, obtendremos la siguiente solución para el problema de contorno de Hilbert no homogéneo en el semiplano superior:

1°. Cuando $\varkappa = 0$,

$$F(z) = e^{i\gamma(z)}\left[\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\omega_1(t)}c(t)}{t-z}\,dt + i\beta_0\right]. \qquad (29.15')$$

2°. Cuando $\varkappa > 0$,

$$F(z) = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{\varkappa} e^{i\gamma(z)}\left[\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\omega_1(t)}c(t)}{t-z}\,dt + Q(z)\right]. \qquad (29.16')$$

3°. Cuando $\varkappa < 0$,

$$F(z) = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{\varkappa} e^{i\gamma(z)}\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\omega_1(t)}c(t)}{t-z}\,dt, \qquad (29.17')$$

siempre que se cumplen las condiciones de resolubilidad

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\omega_1(t)}c(t)}{(t-i)^k}\,dt = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, -\varkappa-1). \qquad (29.19')$$

Las últimas condiciones pueden representarse en forma de $-2\varkappa - 1$ condiciones reales.

Aquí, $Q(z)$ se determina según la fórmula (29.14'), mientras que $\gamma(z)$ se representa en la forma

$$\gamma(z) = \omega(x, y) + i\omega_1(x, y) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Theta(t)}{t-z}\,dt, \qquad (29.13')$$

donde

$$\Theta(t) = \arg\left[\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{-\varkappa}(a+ib)\right] = \operatorname{arctg}\frac{b(t)}{a(t)} + 2\varkappa\operatorname{arctg}\frac{1}{t}.$$

29.4. Problema de Hilbert para el dominio exterior. Señalemos brevemente cómo se debe cambiar los razonamientos realizados con el fin de obtener la solución del problema de Hilbert para un dominio infinito D^-, exterior respecto de cierto contorno suave simple L.

Tomando en consideración las aplicaciones posteriores, por analogía con el caso para un dominio interior D^+, elijamos (al determinar el índice) el recorrido positivo del contorno L contra

las agujas del reloj[1]). Hallemos, para el caso dado, el factor de regularización. Convengamos en considerar que el origen de coordenadas pertenece al dominio D^+.

Sea

$$\operatorname{Ind}[a(s) + ib(s)] = \varkappa.$$

Se denominará *factor de regularización* para la función compleja $a(s) + ib(s)$, definida en el contorno L, con relación al dominio exterior D^- a una función real de signo positivo $p(s)$ tal que el producto $p(s)[a(s) + ib(s)]$ sea el valor de contorno de cierta función que resulte analítica y de orden cero en todos los puntos de D^-, a excepción, quizás, de un punto infinitamente alejado, en el cual el orden suyo equivale al índice, tomado con el signo opuesto $(-\varkappa)$.

Consecuentemente, tendremos, por definición (véase el p. 28.2)

$$p(s)[a(s) + ib(s)] = t^{\varkappa} e^{i\gamma(t)}, \tag{29.21}$$

donde $\gamma(z) = \omega(x, y) + i\omega_1(x, y)$ es una función analítica en todos los puntos de D^- sin excluir el punto infinitamente alejado.

Razonando igual que en el punto 28.2, obtenemos

$$\gamma(z) = S\left[\operatorname{arctg}\frac{b}{a} - \varkappa \arg t\right], \quad p(s) = \frac{|t|^{\varkappa} e^{-\omega_1(s)}}{\sqrt{a^2(s) + b^2(s)}}, \tag{29.22}$$

donde S es el operador de Schwarz para el dominio D^- con la parte imaginaria desapareciente en el infinito.

Pasemos, ahora, al problema de Hilbert.

Al considerar, como antes, que la condición

$$a^2(s) + b^2(s) = 1$$

está cumplida, podemos escribir la condición de contorno del problema de Hilbert en la forma

$$\operatorname{Re}\left[\frac{F(t)}{a(s) + ib(s)}\right] = c(s). \tag{29.23}$$

Después de dividir por el factor de regularización, se obtiene

$$\operatorname{Re}\left[\frac{F(t)}{t^{\varkappa} e^{i\gamma(t)}}\right] = |t|^{-\varkappa} e^{\omega_1(s)} c(s). \tag{29.24}$$

Razonando igual que en el p. 29.2, con la única diferencia de que en vez del origen de coordenadas el punto excepcional aquí será el infinitamente alejado, tendremos:

1°. Cuando $\varkappa \leqslant 0$,

$$F(z) = z^{\varkappa} e^{i\gamma(z)}[S(|t|^{-\varkappa} e^{\omega_1(s)} c(s)) + Q(z)], \tag{29.25}$$

[1]) Es decir, en la dirección positiva respecto del dominio D^+ y negativa, respecto del D^-.

donde $Q(z)$ es una función, analítica en todos los puntos de D^- salvo un punto infinitamente alejado, donde ella tiene polo de orden no superior a $-\varkappa$, y su parte real en el contorno es nula. Es fácil ver que la función $Q(z)$, definida por la fórmula (27.6) para el círculo unitario, será legítima también para el círculo unitario exterior. Resulta más cómodo tomar la expresión para $Q(z)$ en una forma diferente, sustituyendo en (27.6) z por $\frac{1}{z}$. De este modo, la función $Q(z)$ para el dominio, exterior respecto a la circunferencia unitaria, puede anotarse en la forma

$$Q(z) = i\beta_0 + \sum_{k=1}^{-\varkappa} (c_k z^{-k} - \bar{c}_k z^k). \tag{29.26}$$

Para un dominio arbitrario D^- ella tendrá por expresión

$$Q(z) = i\beta_0 + \sum_{k=1}^{-\varkappa} \{c_k [\omega(z)]^{-k} - \bar{c}_k [\omega(z)]^k\}, \tag{29.27}$$

donde $\omega(z)$ es una función que aplica conformemente el dominio D^- sobre otro dominio, exterior respecto de la circunferencia unitaria, y que traslada el punto infinitamente alejado en otro punto infinitamente alejado. En particular, cuando $\varkappa = 0$, la función $Q(z)$ se convierte en una constante arbitraria puramente imaginaria $i\beta_0$.

2°. Cuando $\varkappa > 0$, la solución puede ser obtenida de la fórmula (29.25) para $Q(z) \equiv 0$. La función, definida por la fórmula (29.25), tendrá el polo de orden $\varkappa$ en un punto infinitamente alejado. Por ello, el problema de Hilbert homogéneo resulta insoluble, mientras que el problema no homogéneo sólo se resuelve, cuando se cumplan ciertas condiciones que pueden ser obtenidas desarrollando en serie la función $S(|t|^{\varkappa} e^{\omega_1(s)} c(s))$ en el entorno de un punto infinitamente alejado e igualando a cero los primeros $\varkappa$ coeficientes del desarrollo.

Cuando se trata de un dominio exterior respecto de la circunferencia unitaria, sabemos[1]) que el operador de Schwarz equivale a la integral de Schwarz tomada con el signo menos. Desarrollando la integral de Schwarz en serie de potencias de $\frac{1}{z}$ e igualando a cero los primeros $\varkappa$ coeficientes, llegamos a que $2\varkappa - 1$ condiciones de resolubilidad del problema de Hilbert para el exterior de la circunferencia unitaria se determinarán mediante las mismas fórmulas (29.20) que sirven para el círculo unitario.

Enunciaremos en definitiva los resultados obtenidos.

---

[1]) Véase, por ejemplo, L. V. Cantoróvich y V. I. Krilov « Métodos aproximados del análisis superior» (Л. В. Канторович и В. И. Крылов, «Приближенные методы высшего анализа», М., Физматгиз, 1962, стр. 594).

TEOREMA. *Para el caso de* $\varkappa \leqslant 0$, *el problema de Hilbert homogéneo tiene* $-2\varkappa + 1$ *soluciones linealmente independientes, mientras que el problema no homogéneo es incondicionalmente resoluble y su solución depende linealmente de* $-2\varkappa + 1$ *constantes reales arbitrarias.* (La solución se da mediante la fórmula (29.25).)

En el caso de $\varkappa > 0$, *el problema de Hilbert homogéneo es insoluble, mientras que el no homogéneo es soluble sólo cuando se cumplan* $2\varkappa - 1$ *condiciones y tiene en este caso la única solución.*

Es fácil ver que el teorema enunciado puede ser obtenido del teorema correspondiente del p. 29.2 para el dominio D^+, al sustituir en el último $\varkappa$ por $-\varkappa$. Si, al determinar el índice, hubiéramos tomado el recorrido del contorno no contrario, sino, lo que parece más natural para el dominio D^-, según las agujas del reloj, entonces el resultado recién obtenido habría coincidido con el teorema correspondiente para el dominio D^+.

29.5. Ejemplos. 1. Resuélvase el problema de contorno de Hilbert

$$\left(\cos 2s - \cos s + \frac{1}{4}\right) u(s) + (\operatorname{sen} 2s - \operatorname{sen} s)\, v(s) = \left(\frac{5}{4} - \cos s\right)^2 (\cos 2s + h_1 \cos s + h_2),$$

donde h_1 y h_2 son ciertas constantes para el círculo unitario.

Escribamos la condición de contorno en la forma (29.3′):

$$\operatorname{Re}\left\{\left[\left(\cos s - \frac{1}{2}\right)^2 - \operatorname{sen}^2 s - i \cdot 2 \operatorname{sen} s \left(\cos s - \frac{1}{2}\right)\right] \times (u + iv)\right\} = \left(\frac{5}{4} - \cos s\right)^2 (\cos 2s + h_1 \cos s + h_2).$$

Al realizar la transformación

$$a(s) - ib(s) = \left(\cos s - \frac{1}{2}\right)^2 - \operatorname{sen}^2 s - 2i \operatorname{sen} s \left(\cos s - \frac{1}{2}\right) = \left[\left(\cos s - \frac{1}{2}\right) - i \operatorname{sen} s\right]^2 = \frac{\left(\frac{5}{4} - \cos s\right)^2}{\left[\left(\cos s - \frac{1}{2}\right) + i \operatorname{sen} s\right]^2} = \frac{\left(\frac{5}{4} - \cos s\right)^2}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2},$$

representémosla así

$$\operatorname{Re}\left[\frac{F(t)}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2}\right] = \cos 2s + h_1 \cos s + h_2.$$

A la izquierda figura el valor de contorno de una función, analítica en el círculo unitario, a excepción del punto $z = 1/2$, donde es posible el polo de segundo orden. Realizándose los razonamientos generales, la condición de contorno se reduce, por medio de la transformación previa, a una forma tal que el

polo eventual se encuentre en el origen de coordenadas. Sin embargo, al resolver los ejemplos concretos, cuando el factor de regularización se halla simplemente con ayuda de una prolongación analítica y se conoce de antemano la disposición del punto, cuyo orden de la solución no es nulo, se puede evitar tal transformación. (En el caso dado ella exigiría cálculos complicados). Razonando sumamente igual que en el caso general, obtenemos

$$F(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 [S(\cos 2s+h_1\cos s+h_2)+Q_1(z)],$$

donde $Q_1(z)$ es una función, analítica en el círculo unitario (a excepción del punto $z = 1/2$, en el cual ella tiene polo de segundo orden), cuya parte real en la circunferencia unitaria se reduce a cero. Esta función puede ser determinada mediante la fórmula

$$Q_1(z) = Q(\omega(z)),$$

en la cual $\omega(z)$ es una función que aplica conformemente el círculo unitario sobre sí de una manera tal que el punto $z = 1/2$ pase en el origen de coordenadas. A título de $\omega(z)$ se puede tomar

$$\omega(z)=\frac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z}=\frac{2z-1}{2-z}.$$

Como, para $z = e^{is}$,

$$\cos 2s + h_1\cos s + h_2 = \operatorname{Re}[z^2 + h_1 z + h_2],$$

entonces, debido a la unicidad de la función analítica, definida por la integral de Schwarz, tendremos

$$S(\cos 2s + h_1\cos s + h_2) = z^2 + h_1 z + h_2.$$

Teniendo en cuenta la fórmula (29.14) para la función Q, obtendremos en definitiva

$$F(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\left[z^2+h_1z+h_2+i\beta+c_1\frac{2z-1}{2-z}+\right.$$
$$\left.+c_2\left(\frac{2z-1}{2-z}\right)^2-\bar{c}_1\left(\frac{2-z}{2z-1}\right)-\bar{c}_2\left(\frac{2-z}{2z-1}\right)^2\right].$$

Por ser el problema incondicionalmente resoluble ($\varkappa = 2 > 0$), las constantes h_1 y h_2 pueden ser cualesquiera.

2. Resuélvase el problema de contorno de Hilbert

$$\left(\cos 2s-\cos s+\frac{1}{4}\right)u-(\operatorname{sen}2s-\operatorname{sen}s)v=\cos 2s+h_1\cos s+h_2$$

para el círculo unitario.

Puesto que el índice del problema $\varkappa = -2 < 0$, en el caso general, éste no es soluble. Resultará soluble sólo con la elección especial de las constantes h_1 y h_2.

Por medio de las transformaciones analógicas a las realizadas en el problema antecedente reduzcamos la condición de contorno a la forma

$$\operatorname{Re}\left[\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 F(t)\right]=\cos 2s+h_1\cos s+h_2.$$

De aquí

$$F(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)^{-2}(z^2+h_1z+h_2).$$

Para h_1 y h_2 arbitrarias, la función que se determina mediante la última fórmula tiene en el punto $z = 1/2$ el polo de segundo orden. Para suprimir el polo se debe hacer $h_1 = -1$, $h_2 = 1/4$.

Si esta condición está cumplida, el problema tiene la única solución.

§ 30. Conexión de los problemas de Hilbert y de Riemann

30.1. Planteamiento del problema. Al comparar la solución del problema de Hilbert, que acabamos de obtener, con la del problema de Riemann (cap. II), se puede notar cierta semejanza entre ellas. Esto da origen a la idea de que los mismos problemas están entrelazados, a pesar de la diferencia en su planteamiento. Para los contornos elementales (la recta y la circunferencia), que admiten la simple conexión entre el operador de Schwarz e integral de tipo de Cauchy, se establece la reducción inmediata del problema de Hilbert al de Riemann. Para los contornos de otro género no existen tales relaciones directas, pero pueden ser establecidas por medio de una aplicación conforme de los dominios correspondientes sobre un círculo o un semiplano.

Existen dos procedimientos de tal reducción. El primero (indicado por el autor) consiste en la constatación del hecho de que la función «interior» $\Phi^+(z)$ de la solución del problema de contorno de Riemann

$$\Phi^+(t)=\frac{a(s)+ib(s)}{a(s)-ib(s)}\Phi^-(t)+\frac{2c(s)}{a(s)-ib(s)} \tag{30.1}$$

ofrece, con la elección adecuada de las constantes arbitrarias, la solución del problema de contorno de Hilbert

$$a(s)\,u(s)+b(s)\,v(s)=c(s). \tag{30.2}$$

La demostración se apoya en las soluciones de aboms problemas de contorno en forma cerrada y consiste en la transformación directa de las fórmulas para resolver el problema de contorno de Riemann del cap. II en las fórmulas para resolver el problema de Hilbert del p. 29.3.

El segundo procedimiento (indicado por N. I. Musjelishvili) de la reducción de la condición de contorno del problema de Hilbert (30.2) a la del problema de Riemann (30.1) mediante una definición adicional en un dominio complementario (por el método de simetría) de la solución del problema de Hilbert, lo examinaremos a continuación más detalladamente. Este procedimiento es de interés por el hecho de que, independientemente del método del factor

de regularización, expuesto en el § 29, puede servir de fuente para resolver el problema de Hilbert. Además, este procedimiento se emplea también en las investigaciones de algunos otros problemas.

30.2. Conexión entre las condiciones de contorno. Vamos a considerar, como antes, que el contorno L es una recta o una circunferencia.

La diferencia en el planteamiento de los problemas de Riemann y de Hilbert consiste, ante todo, en lo que en el primer problema se busca una función analítica a trozos, definida en todo el plano, mientras que en el segundo el objeto de la búsqueda lo constituye una función definida sólo en el dominio D^+, dejándose sin atención alguna el dominio complementario D^-. Por esta razón, para establecer los lazos que existen entre los problemas de contorno mencionados, partiendo del mismo planteamiento de éstos, se debe, en primer lugar, encontrar un método conveniente por medio del cual se podría definir adicionalmente la función $\Phi^+(z)$ (que representa la solución del problema de Hilbert) para el dominio D^- de un modo tal que se obtenga una función analítica a trozos, definida en todo el plano.

El contorno L es, por hipótesis, una recta o una circunferencia. Por ello, dicha definición adicional puede ser realizada, según muestra la investigación ulterior, mediante una prolongación por simetría de un modo sumamente igual al utilizado en el principio de simetría. La única diferencia consiste en lo siguiente: como las condiciones de este principio pueden resultar no cumplidas (la función tiene que aplicar en un segmento de la recta o en un arco de la circunferencia un segmento de la recta o un arco de la circunferencia), entonces la prolongación obtenida no será, en el caso general, analítica. Mas, esto no se requiere, puesto que se trata aquí sólo de la construcción en el dominio D^- de cierta función nueva $\Phi^-(z)$, la que tendría tales relaciones con la función $\Phi^+(z)$, determinada a base del problema de contorno de Hilbert, que la condición de contorno del último problema se haga equivalente a la condición de contorno del problema de Riemann que liga las funciones $\Phi^+(z)$ y $\Phi^-(z)$.

En lo sucesivo emplearemos las designaciones del p. 18.1.

Hagamos prolongar por simetría la función $\Phi^+(z)$, definida en el dominio D^+ (en el círculo unitario o en el semiplano superior), al dominio D^- (el exterior del círculo unitario o el semiplano inferior), considerando que en los puntos simétricos respecto del contorno las funciones toman valores conjugados, es decir,

$$\Phi^-(z) = \overline{\Phi^+(\bar{z})} = \overline{\Phi^+}(z) \tag{30.3}$$

en el caso de un eje real, y

$$\Phi^-(z) = \overline{\Phi^+\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \overline{\Phi^+}\left(\frac{1}{z}\right) \tag{30.4}$$

en el caso de un círculo unitario.

La función $\Phi^-(z)$, definida de este modo, será analítica en el dominio D^- (p. 12.1).

La totalidad de funciones $\Phi^+(z)$ y $\Phi^-(z)$ puede considerarse como una función analítica a trozos.

Cuando el punto z del dominio D^+ tiende al punto t del contorno, al mismo punto t tiende el punto de D^-, simétrico a z. Por ello,

$$\Phi^-(t) = \overline{\Phi^+(\bar{t})} = \overline{\Phi^+(t)}, \tag{30.5}$$

$$\Phi^-(t) = \overline{\Phi^+\left(\frac{1}{\bar{t}}\right)} = \overline{\Phi^+(t)}. \tag{30.6}$$

Así pues, los valores límites de las funciones $\Phi^+(z)$ y $\Phi^-(z)$ en el contorno están complejamente conjugados uno de otro. Por consiguiente, la función $\overline{\Phi^+(t)}$, definida en el contorno, puede considerarse como valor límite de la función $\Phi^-(t)$.

Ahora podemos mostrar cómo el problema de Hilbert se reduce al de Riemann.

Escribamos la condición de contorno del problema de Hilbert

$$\operatorname{Re}[(a - ib)(u + iv)] = c$$

en la forma siguiente

$$(a - ib)\,\Phi^+(t) + (a + ib)\,\overline{\Phi^+(t)} = 2c. \tag{30.7}$$

Al sustituir, en virtud de lo expuesto más arriba, $\overline{\Phi^+(t)}$ por $\Phi^-(t)$ de (30.7), obtendremos la condición de contorno del problema de Riemann

$$\Phi^+(t) = -\frac{a(s)+ib(s)}{a(s)-ib(s)}\,\Phi^-(t) + \frac{2c(s)}{a(s)-ib(s)}. \tag{30.8}$$

Por consiguiente, la solución del problema de contorno de Hilbert (30.2) es equivalente a la búsqueda de la función $\Phi^+(z)$ de la solución del problema de contorno de Riemann (30.8), a la condición de que para todo z, que no se ubica en el contorno, se tiene

$$\Phi^-(z) = \overline{\Phi^+(z_*)}. \tag{30.9}$$

El procedimiento de reducción del problema de Hilbert al de Riemann, expuesto en el presente punto, lleva ventaja ante el primer procedimiento, puesto que no se apoya en las soluciones explícitas de dichos problemas, razón por la cual puede emplearse también en el caso en que las soluciones explícitas no existen, por ejemplo, en los problemas correspondientes con muchas funciones incógnitas (véase, por ejemplo, [3], pág. 172). Además, podríamos no dar aparte la solución del problema de Hilbert, sino emplear con este fin la solución del problema de Riemann, lo que se hizo en [16].

30.3. Sobre el problema de Hilbert para el bicírculo. Sean $a(t_1, t_2)$, $b(t_1, t_2)$ y $c(t_1, t_2)$ unas funciones reales que en el toro unitario $L = L_1 \times L_1$ satisfacen la condición de Hölder, y que sea $g = a + ib$ y $a^2 + b^2 = 1$. Por analogía con el p. 27.1 y los pp. 29.1—29.2, enunciemos el problema bidimensional de Hilbert para un bicírculo $D = D^{++}$ de un modo siguiente.

Hállese la función $F(z_1, z_2) = u(z_1, z_2) + iv(z_1, z_2)$, analítica en D y continua en L conforme a la condición de contorno

$$\operatorname{Re}(\bar{g}F) = \operatorname{Re}[(a - ib)F] = au + bv = c, \qquad (30.10)$$

definida en L.

Para $g \equiv 1$, el problema (30.10) se convierte en el problema bidimensional de Dirichlet, el cual, como sabemos, es resoluble, cuando se cumpla el conjunto numerable de las condiciones necesarias y suficientes de resolubilidad

$$\int_L c(t_1, t_2)\, t_1^{-n_1} t_2^{-n_2} dt_1 dt_2 = 0 \quad (n_1, n_2 = 1, 2, \ldots).$$

M. A. Borodín 1)* redujo el problema de Hilbert (30.10) a la resolución sucesiva de dos problemas de Dirichlet y del problema elemental

$$\operatorname{Re}[t_1^{-\varkappa_1} t_2^{-\varkappa_2} F(t_1, t_2)] = 0$$

donde $\varkappa_1 = \varkappa_1(g)$ y $\varkappa_2 = \varkappa_2(g)$.

Si tales dos problemas de Dirichlet son solubles y, además, $\varkappa_1 \geqslant 0$, $\varkappa_2 \geqslant 0$, entonces la solución general del problema (30.10) depende de $(2\varkappa_1 + 1)(2\varkappa_2 + 1)$ constantes reales arbitrarias y puede ser representada por la integral bidimensional de Schwarz (compárese con el p. 29.3).

La solución del problema de Hilbert para el bicírculo puede obtenerse con la ayuda del factor de regularización, como también por reducción al problema bidimensional degenerado de Riemann

$$\overline{g(t_1, t_2)}\, F^{++}(t_1, t_2) + g(t_1, t_2)\, F^{--}(t_1, t_2) = 2c(t_1, t_2),$$

por analogía con lo que se ha hecho en el caso unidimensional en los puntos 29.2 y 30.2, respectivamente (véase V. A. Kakichev 8), 9)*).

§ 31. Ecuación integral singular con núcleo de Hilbert

31.1. Conexión de la ecuación característica con el problema de contorno de Hilbert. Como ya se ha indicado en el p. 6.2, se denomina núcleo de Hilbert la función $\operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2}$. La ecuación integral singular

de tipo

$$a(s)\,u(s) - \frac{b(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\sigma)\,ctg\,\frac{\sigma - s}{2}\,d\sigma = c(s), \qquad (31.1)$$

donde $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ son funciones prefijadas que satisfacen la condición de Hölder, lleva el nombre de *ecuación singular característica* [1]) *con núcleo de Hilbert*. Cuando $c(s) = 0$, se llama *homogénea*; de lo contrario, *no homogénea*. Buscaremos la solución en la clase de funciones que satisfacen la condición de Hölder.

Al igual que la ecuación integral singular característica con núcleo de Cauchy se encuentra ligada al problema de Riemann, la ecuación característica (31.1) con núcleo de Hilbert tiene relaciones aun más estrechas con el problema de Hilbert. Probémoslo.

Convengamos en que la función $u(s)$, que sirve de solución para la ecuación (31.1), es el valor límite de la función $u(x, y)$, armónica en el círculo unitario. Tal suposición es bien legítima debido a la resolubilidad incondicional del problema de Dirichlet para el valor de contorno continuo y arbitrario. Entonces, en virtud de la fórmula (6.6), tendremos

$$v(s) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\sigma)\,\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma - s}{2}\,d\sigma + \int_0^{2\pi} v(\sigma)\,d\sigma. \qquad (31.2)$$

Al hacer

$$\int_0^{2\pi} v(\sigma)\,d\sigma = 0, \qquad (31.3)$$

llegamos, partiendo de la ecuación singular (31.1), al problema de contorno de Hilbert

$$a(s)\,u(s) + b(s)\,v(s) = c(s) \qquad (31.4)$$

para una función $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, analítica en el círculo unitario. Queda, pues, establecido el hecho siguiente.

TEOREMA. *La ecuación singular característica con núcleo de Hilbert* (31.1) *es equivalente al problema de Hilbert* (31.4) *para el círculo bajo la condición complementaria* (31.3) *en sentido de que si* $F(z)$ *es la solución del problema de contorno* (31.4), *que satisface la condición* (31.3), *entonces el valor de frontera de su parte real será la solución de la ecuación* (31.1), *y viceversa, al disponer de* $u(s)$, *que es la solución de la ecuación* (31.1), *y al emplear el operador de Schwarz y la condición* (31.3), *obtendremos la solución del problema de Hilbert* (31.4).

[1]) El término surgió en cierta etapa histórica y desde el punto de vista actual no está plenamente justificado (véase a continuación el p. 52.3).

En lo sucesivo, para resolver la ecuación característica (31.1), será utilizada la solución del problema de Hilbert, obtenida en el § 29.

De las propiedades de las funciones armónicas se desprende que la condición (31.3) significa que la función armónica $v(x, y)$ es nula en el origen de coordenadas.

31.2. Solución de la ecuación. Llamaremos *índice de la ecuación característica* (31.1) al índice de la función $a(s) + ib(s)$. Examinemos detalladamente el caso de índice cero, que, en comparación con el caso correspondiente de las ecuaciones con núcleo de Cauchy: $\varkappa = \operatorname{Ind}[a(s) + ib(s)] = 0$, tiene ciertas peculiaridades. Consideremos primero una ecuación homogénea, al poner en (31.1) $c(s) = 0$. La solución del correspondiente problema homogéneo de Hilbert será representada por la función $F(z) = i\beta_0 e^{i\gamma(z)}$, donde $\gamma(z)$ se define mediante la fórmula (29.13), y β_0 es una constante real arbitraria.

En el contorno $t = e^{is}$ y

$$F(t) = u(s) + iv(s) = i\beta_0 e^{i\gamma(t)}.$$

Pongamos

$$ie^{i\gamma(t)} = \xi(s) + i\eta(s). \tag{31.5}$$

Entonces

$$u(s) = \beta_0 \xi(s), \quad v(s) = \beta_0 \eta(s).$$

La condición de resolubilidad de la ecuación (31.3) toma la forma

$$\int_0^{2\pi} \eta(\sigma)\, d\sigma = 0. \tag{31.6}$$

De este modo, cuando el índice es nulo, resultan posibles dos casos:

1) Si la condición (31.6) se cumple, la ecuación característica homogénea (31.1) tiene la solución[1])

$$u(s) = \beta_0 \xi(s). \tag{31.7}$$

2) Si $\int_0^{2\pi} \eta(\sigma)\, d\sigma \neq 0$, la ecuación no tiene solución.

Pasemos a una ecuación no homogénea. La solución del problema de Hilbert, de acuerdo con la fórmula (29.15) tiene por expresión

$$F(z) = e^{i\gamma(z)}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c(\sigma)\, e^{\omega_1(\sigma)}\, \frac{e^{i\sigma}+z}{e^{i\sigma}-z}\, d\sigma + i\beta_0\right]. \tag{31.8}$$

[1]) Esto es lo que distingue la ecuación con núcleo de Hilbert de la con núcleo de Cauchy, que en el caso correspondiente es siempre insoluble.

Hagamos

$$te^{i\gamma(z)} \quad \xi + i\eta, \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c(\sigma)\, e^{\omega_1(\sigma)}\frac{e^{i\sigma}+z}{e^{i\sigma}-z}\,d\sigma = \Psi(z).$$

En virtud de las propiedades de la integral de Schwarz, tendremos en el contorno

$$\operatorname{Re}\Psi(t) = c(s)\, e^{\omega_1(s)},$$

$$\operatorname{Im}\Psi(t) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c(\sigma)\, e^{\omega_1(\sigma)} \operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma. \tag{31.9}$$

Al tomar en la fórmula (31.8) valores límites y teniendo en cuenta las fórmulas (31.9), obtendremos

$$u(s) = \beta_0\xi(s) + \eta(s)\, c(s)\, e^{\omega_1(s)} - \xi(s)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c(\sigma)\, e^{\omega_1(\sigma)} \operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma,$$

$$v(s) = \beta_0\eta(s) - \xi(s)\, c(s)\, e^{\omega_1(s)} - \eta(s)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c(\sigma)\, e^{\omega_1(\sigma)} \operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma. \tag{31.10}$$

En vista de (31.3) debe tener lugar la condición de resolubilidad

$$\beta_0\int_0^{2\pi}\eta(s)\,ds - \int_0^{2\pi}\xi(s)\, c(s)\, e^{\omega_1(s)}\,ds - \int_0^{2\pi}\eta(s)\,ds\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c(\sigma)\, e^{\omega_1(\sigma)} \operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma = 0.$$

Al invertir en la integral doble el orden de integración y tomando en consideración que, de acuerdo con la fórmula de Hilbert (6.7),

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\eta(s) \operatorname{ctg}\frac{s-\sigma}{2}\,ds = \xi(\sigma) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\xi(\sigma)\,d\sigma,$$

obtendremos

$$\beta_0\int_0^{2\pi}\eta(\sigma)\,d\sigma + \int_0^{2\pi} c(\sigma)\, e^{\omega_1(\sigma)}\,d\sigma\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\xi(\sigma)\,d\sigma = 0. \tag{31.11}$$

Ha de ser notado que las integrales $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\xi(\sigma)\,d\sigma$ y $\frac{1}{2\pi}\times$ $\times\int_0^{2\pi}\eta(\sigma)\,d\sigma$ proporcionan los valores de las partes real e imaginaria de la función $ie^{i\gamma(z)}=\xi(x, y)+i\eta(x, y)$ en el origen de coordenadas y por esta razón no pueden reducirse a cero simultáneamente.

Aparecen posibles dos casos:

1) Si $\int_0^{2\pi}\eta(\sigma)\,d\sigma\neq 0$, es decir, si la ecuación homogénea correspondiente no es soluble, entonces la condición (31.11) presta la posibilidad de determinar una constante arbitraria β_0, y, por lo tanto, la ecuación no homogénea (31.1) tiene la única solución (31.10).

2) Si $\int_0^{2\pi}\eta(\sigma)\,d\sigma=0$, es decir, si la ecuación homogénea correspondiente es soluble, la no homogénea será, en el caso general, insoluble. Teniendo en cuenta que $\int_0^{2\pi}\xi(\sigma)\,d\sigma\neq 0$, de (31.11) proviene la condición de su resolubilidad

$$\int_0^{2\pi} c(\sigma)\,e^{\omega_1(\sigma)}\,d\sigma=0. \tag{31.12}$$

Para el caso de un índice no cero nos limitaremos a la enunciación de los resultados.

Como muestran las investigaciones, cuando $\varkappa\neq 0$, la condición (31.3) no puede degenerar en una identidad, por lo cual, en comparación con el problema de Hilbert, ella disminuye en la unidad el número de soluciones linealmente independientes para $\varkappa>0$, y aumenta en la unidad el número de condiciones de resolubilidad, cuando $\varkappa<0$. Los resultados exactos vienen dados por el siguiente

TEOREMA. *Cuando* $\varkappa>0$, *la ecuación homogénea* (31.1) ($c(s)\equiv 0$) *tiene* $2\varkappa$ *soluciones linealmente independientes, mientras que la ecuación no homogénea es incondicionalmente resoluble y depende linealmente de* $2\varkappa$ *constantes reales.*

Cuando $\varkappa<0$, *la ecuación homogénea es insoluble*, y *la no homogénea es soluble sólo, si se cumplen* $-2\varkappa$ *condiciones reales de resolubilidad.*

Las soluciones de la ecuación y las condiciones de resolubilidad pueden ser obtenidas de la fórmula del punto 29.3, siempre que se cumplan las condiciones (31.3).

Al tomar en consideración que todo parámetro complejo contiene dos reales y toda condición compleja de resolubilidad es equivalente a dos condiciones reales, concluimos que, para $\varkappa \neq 0$, los resultados de investigación cualitativos de una ecuación característica con núcleo de Hilbert coinciden enteramente con los resultados correspondientes (p. 21.2) para una ecuación característica con núcleo de Cauchy.

31.3. Ecuaciones de coeficientes constantes. Examinemos un caso particular, que se encuentra con frecuencia en la práctica, cuando los coeficientes a, b son números constantes. Consideremos que la división por $\sqrt{a^2+b^2}$ ya se había realizado, de modo que la condición $a^2+b^2=1$ resulta satisfecha.

1°. En el caso de la ecuación homogénea

$$au(s)-\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma=0 \qquad (31.1°)$$

obtenemos inmediatamente la solución del correspondiente problema de Hilbert homogéneo

$$F(z)=u+iv=i\beta_0 e^{i\gamma(z)}=i\beta_0(a+ib).$$

De aquí

$$\xi(s)=-b,\quad \eta(s)=a,\quad e^{\omega_1(s)}=1.$$

La condición de resolubilidad (31.6) se anotará en la forma

$$\int_0^{2\pi}\eta(\sigma)\,d\sigma=a\cdot 2\pi=0.$$

Por consiguiente, cuando $a\neq 0$, la ecuación homogénea no tiene soluciones que sean distintas de triviales.

Cuando $a=0$, la ecuación

$$\int_0^{2\pi} u(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma=0$$

tiene a título de solución una constante arbitraria $u(s)=\beta_0$.

2°. La ecuación no homogénea

$$au(s)-\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma=c(s) \qquad (31.1')$$

es, en virtud de lo anterior, incondicionalmente resoluble cuando $a \neq 0$.

De acuerdo con (31.11)

$$2\pi a\beta_0 - b\int_0^{2\pi} c(\sigma)\,d\sigma = 0.$$

Al sustituir de aquí el valor de β_0 en la fórmula (31.10), obtendremos la solución de la ecuación (31.1') en la forma

$$u(s) = ac(s) + \frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi} c(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\,d\sigma - \frac{b^2}{2\pi a}\int_0^{2\pi} c(\sigma)\,d\sigma.$$

Si $a = 0$, para la resolubilidad de la ecuación

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\,d\sigma = c(s),$$

se debe cumplir, en conformidad con (31.11), la condición

$$\int_0^{2\pi} c(\sigma)\,d\sigma = 0. \tag{31.13}$$

Si esta condición está cumplida, entonces, al poner en (31.10) $\eta(s) = 0$, $\xi(s) = -b = 1$, obtendremos la solución como sigue

$$u(s) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\,d\sigma + C, \tag{31.14}$$

donde C es una constante arbitraria.

La última solución puede obtenerse también de las fórmulas de inversión de Hilbert (p. 6.2). Al poner en la fórmula (6.7) $u_0 = 0$, y considerando que en esta fórmula $u(s)$ es la función prefijada, mientras que $v(s)$ es una función buscada, llegamos a que la fórmula (6.6) ofrece la solución de la ecuación (6.5), coincidente con (31.2). La condición (31.13) y

$$u_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\sigma)\,d\sigma = 0$$

coinciden.

31.4. Ecuación completa. Se llama *ecuación integral singular completa con núcleo de Hilbert* a una ecuación de tipo

$$K\varphi \equiv a(s)\,\varphi(s) - \frac{b(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\,d\sigma + \int_0^{2\pi} K(s,\sigma)\,\varphi(\sigma)\,d\sigma = f(s), \qquad (31.15)$$

donde $a(s)$, $b(s)$, $f(s)$, $K(s, \sigma)$ son todas funciones reales, con la particularidad de que $a(s)$, $b(s)$, $f(s)$ satisfacen la condición de Hölder y el núcleo $K(s, \sigma)$ la satisface en todos los puntos, a excepción, quizás, de los puntos $\sigma = s$, donde para él resulta válida la acotación

$$|K(s,\sigma)| < \frac{A}{|\sigma - s|^{\lambda}} \quad (0 \leqslant \lambda < 1).$$

La integral

$$\int_0^{2\pi} K(s,\sigma)\,\varphi(\sigma)\,d\sigma$$

recibe el nombre de *parte regular* de la ecuación.

Para la ecuación (31.15) se podrían llevar a cabo todas las investigaciones que hemos realizado en los §§ 23 y 24 respecto a la ecuación con núcleo de Cauchy, con la única diferencia de que en lugar de la empleada solución del problema de contorno de Riemann, en el caso dado nos veríamos obligados a utilizar la solución del problema de Hilbert, obtenida en el § 30. Por ser real la ecuación en consideración, muchos razonamientos resultarían más simples. Podríamos demostrar, por ejemplo, que el operador K′, transpuesto al dado, sirve para este último de regularizador equivalente (véase el problema 18 al final del capítulo), siendo esta propiedad ya no válida para los operadores complejos. Observemos que las propiedades fundamentales de las ecuaciones singulares (teoremas de Noether) fueron obtenidas originalmente por Noether 1)** precisamente para las ecuaciones de tipo (31.15) haciendo uso de la solución del problema de Hilbert y sólo después de veinte años dichas propiedades se han establecido para las ecuaciones complejas con núcleo de Cauchy, siendo usada con este fin la solución del problema de Riemann (véanse las notas históricas en los capítulos III y IV).

No obstante, no hay necesidad de obtener independientemente las propiedades de la ecuación que se considera. Será más fácil establecer que la ecuación (31.15) se reduce a una ecuación con núcleo de tipo de Cauchy, debido a lo cual toda la teoría de la última ecuación puede ser aplicada directamente a ella. Puesto que las partes regulares de ambos tipos de ecuaciones llevan un carácter

igual, resulta suficiente establecer la correlación entre el núcleo de Hilbert $\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}$ y el de Cauchy $\frac{d\tau}{\tau-t}$, lo que se hace de la misma manera que en el punto 6.1.

Supongamos que el contorno de integración está representado por una circunferencia unitaria. En este caso

$$t = e^{is}, \quad \tau = e^{i\sigma}, \quad d\tau = ie^{i\sigma}\, d\sigma$$

y

$$\frac{d\tau}{\tau-t} = \frac{ie^{i\sigma}\, d\sigma}{e^{i\sigma}-e^{is}}.$$

Multiplicando el numerador y denominador de la última expresión por $e^{-i\frac{\sigma+s}{2}}$ y haciendo uso de las fórmulas de Euler, obtenemos

$$\frac{d\tau}{\tau-t} = \left(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2} + \frac{i}{2}\right) d\sigma$$

o

$$\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\, d\sigma = \frac{d\tau}{\tau-t} - \frac{1}{2}\frac{d\tau}{\tau}. \tag{31.16}$$

Al sustituir en la ecuación (31.15) el núcleo de Hilbert por la última expresión e introducir $s = \frac{1}{i}\ln t$, $\sigma = \frac{1}{i}\ln\tau$, $d\sigma = \frac{1}{i}\frac{d\tau}{\tau}$, reduzcamos la ecuación (31.15) a una ecuación con núcleo de tipo de Cauchy:

$$a_1(t)\,\varphi_1(t) - \frac{ib_1(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi_1(\tau)}{\tau-t}\, d\tau + \int_L k_1(t,\tau)\,\varphi_1(\tau)\, d\tau = f_1(t). \tag{31.17}$$

El coeficiente del problema de Riemann, correspondiente a la ecuación (31.17), tiene la forma

$$G(t) = \frac{a_1(t)+ib_1(t)}{a_1(t)-ib_1(t)} = \frac{a(s)+ib(s)}{a(s)-ib(s)}. \tag{31.18}$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{Ind} G(t) = 2\operatorname{Ind}[a(s) + ib(s)]. \tag{31.19}$$

De la última igualdad se ve que si se aspira a lo que las propiedades de la ecuación (31.15) se expresen por medio de su propio índice[1]) $\varkappa = \operatorname{Ind}[a + ib]$, entonces en todos los resultados, obtenidos en los §§ 23, 24, se debe cambiar $\varkappa$ por $2\varkappa$.

[1]) N. I. Musjelishvili [16] atribuye al índice $G(t)$ el nombre de *índice de la ecuación* (31.15), como también del problema de Hilbert. Por esto, el índice en su definición es igual al índice duplicado en nuestra definición.

Por ejemplo, el teorema III de Noether se enunciará así:

La diferencia entre los números de soluciones linealmente independientes de la ecuación $K\varphi = 0$ (31.15) *y de su ecuación transpuesta* $K'\psi = 0$ *es igual a* $2\varkappa$, *donde* $\varkappa = \operatorname{Ind}[a(s) + ib(s)]$.

La dependencia lineal o independencia lineal se entiende, en este caso, con los coeficientes reales o, como suele expresarse en la álgebra, en el campo de números reales.

§ 32. Problemas de contorno para funciones poliarmónicas y polianalíticas que se reducen a los problemas de contorno de Hilbert y de Riemann

32.1. Representación de las funciones poliarmónicas y polianalíticas en términos de funciones analíticas. Demos a conocer, ante todo, la definición de una función poliarmónica.

DEFINICIÓN. Se denomina *función poliarmónica de n-ésimo orden* $U(x, y)$ a toda integral de una ecuación poliarmónica

$$\Delta^n U = 0, \tag{32.1}$$

donde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ es el operador de Laplace, y el exponente n significa que el operador Δ se aplica sucesivamente n veces.

La función poliarmónica se llama *regular* en un dominio dado D, si en este dominio ella es continua junto con todas las derivadas suyas hasta el orden $2n$.

En lo sucesivo siempre supondremos que las funciones poliarmónicas en consideración son regulares.

Para no complicar los razonamientos vamos a examinar sólo dominios simplemente conexos.

Hagamos una breve deducción de la representación de una función poliarmónica en términos de las funciones analíticas. El método más breve para la deducción de la representación buscada consiste en el paso de las variables reales x, y a las complejas[1]):

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy.$$

---

[1]) El paso a las variables complejas es bien legítimo a consecuencia del hecho bien conocido de que la solución de la ecuación de tipo elíptico con coeficientes analíticos es analítica. Unas cuantas demostraciones de este hecho el lector puede encontrarlas en la revista «Exitos de las ciencias matemáticas», vol. VIII (1940). Una investigación detallada de la cuestión acerca de las representaciones complejas de las soluciones de la ecuación poliarmónica se da en el libro [1], pág. 170.

Convengamos en considerar que z y $\bar{z}$ son unas variables independientes. Entonces, según la regla para derivar una función compuesta, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}=i\frac{\partial}{\partial z}-i\frac{\partial}{\partial \bar{z}}. \tag{32.2}$$

De aquí se obtiene con facilidad

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2}{\partial z\partial \bar{z}}. \tag{32.3}$$

Por consiguiente,

$$\Delta^n U\equiv 4^n\frac{\partial^{2n}U}{\partial z^n\partial \bar{z}^n},$$

y la ecuación poliarmónica puede representarse en la forma

$$\frac{\partial^{2n}U}{\partial z^n\partial \bar{z}^n}=0. \tag{32.4}$$

Al anotar lo últim en la forma

$$\frac{\partial^2}{\partial z\partial \bar{z}}\left(\frac{\partial^{2n-2}U}{\partial z^{n-1}\partial \bar{z}^{n-1}}\right)=0$$

y al aplicar el método conocido de integración de la ecuación $\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=0$, obtendremos

$$\frac{\partial^{2n-2}U}{\partial z^{n-1}\partial \bar{z}^{n-1}}=\varphi(z)+\varphi_*(\bar{z}),$$

donde $\varphi(z)$ y $\varphi_*(\bar{z})$ son funciones analíticas de sus argumentos. Ya que el miembro izquierdo de la última igualdad es una magnitud real, las funciones $\varphi(z)$ y $\varphi_*(\bar{z})$ deben estar complejamente conjugadas. Por esta razón tendremos

$$\frac{\partial^{2n-2}U}{\partial z^{n-1}\partial \bar{z}^{n-1}}=\varphi_1(z)+\overline{\varphi(z)}=2\operatorname{Re}\varphi(z).$$

Si la función poliarmónica se considera conocida, entonces, según lo muestra la última fórmula, la parte real de $\varphi(z)$ se determina de modo único. La propia función $\varphi(z)$ se determinará, consecuentemente, con la precisión hasta un sumando imaginario arbitrario.

Al suponer que el origen de coordenadas pertenece al dominio donde la función polianalítica es regular y que $\varphi(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$,

podemos escribir

$$\frac{\partial^{2n-2}U}{\partial z^{n-1}\partial\bar{z}^{n-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k \bar{z}^k.$$

Integrando ambos miembros respecto a z y, luego, respecto a $\bar{z}$, obtenemos

$$\frac{\partial^{2n-4}U}{\partial z^{n-2}\partial\bar{z}^{n-2}} = z\bar{z}\,[\varphi_1(z) + \bar{\varphi}_1(\bar{z})] + \psi(z) + \overline{\psi(z)} = 2\,\mathrm{Re}\,[z\bar{z}\varphi_1(z) + \psi(z)],$$

donde

$$\varphi_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} z^k$$

se determina de modo único en términos de $\varphi(z)$, mientras que $\psi(z)$ es una función analítica nueva la cual, al igual que $\varphi(z)$, se determina en términos de U con la precisión hasta un sumando puramente imaginario.

Al aplicar el procedimiento, mencionado arriba, $n-2$ veces más, llegaremos a la representación buscada de la función poliarmónica

$$U(x, y) = \mathrm{Re} \sum_{p=0}^{n-1} z^p \bar{z}^p \varphi_p(z), \tag{32.5}$$

donde todas $\varphi_p(z)$ son funciones analíticas que se expresan en términos de $U(x, y)$ con la precisión hasta un sumando puramente imaginario.

La función

$$V(x, y) = \mathrm{Im} \sum_{p=0}^{n-1} z^p \bar{z}^p \varphi_p(z), \tag{32.6}$$

que, evidentemente, también será integral de la ecuación poliarmónica, se llamará *función poliarmónica conjugada de* $U(x, y)$.

DEFINICIÓN. Si U y V son dos funciones poliarmónicas conjugadas, la función

$$F(z, \bar{z}) = U(x, y) + iV(x, y) \tag{32.7}$$

se denominará *polianalítica*.

Es evidente que la función polianalítica, al igual que la poliarmónica, será una integral de la ecuación poliarmónica, y, por definición, tendrá la siguiente representación:

$$F(z, \bar{z}) = \sum_{p=0}^{n-1} z^p \bar{z}^p \varphi_p(z) = \sum_{p=0}^{n-1} \bar{z}^p f_p(z). \tag{32.8}$$

Se tienen otras representaciones de funciones poliarmónicas y polianalíticas que difieren de las indicadas arriba en su forma[1]), pero, como no las necesitaremos en lo sucesivo, no se dan aquí.

Cuando $n = 2$, la ecuación $\Delta^2 U = 0$ se denomina *biarmónica* y sus soluciones llevan el nombre de *funciones biarmónicas*. Las soluciones de la ecuación biarmónica están estrechamente ligadas con las magnitudes principales que se estudian en la teoría de elasticidad (tensiones y desplazamientos) y la integración de la ecuación biarmónica constituye uno de los problemas fundamentales de la teoría de elasticidad. Ha de ser notado, además, que la representación de la función biarmónica en términos de funciones analíticas se toma con mayor frecuencia en la forma

$$U(x, y) = \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \psi(z)]. \quad \text{(Fórmula de Goursat.)}$$

32.2. Planteamiento de los problemas de contorno de Hilbert para las funciones polianalíticas. Convengamos, primeramente, en las designaciones y establezcamos ciertas correlaciones auxiliares.

Sea

$$t = x(s) + iy(s)$$

una ecuación del contorno L en forma compleja. Entonces,

$$t' = \frac{dt}{ds} = \frac{dx}{ds} + i\frac{dy}{ds}.$$

Al denotar, como siempre, $\bar{t} = x(s) - iy(s)$, y al tomar en consideración que $\left|\frac{dt}{ds}\right| = 1$, tendremos

$$\bar{t}' = \frac{d\bar{t}}{ds} = \frac{1}{t'}. \tag{32.9}$$

Si $W(z, \bar{z})$ es una función, diferenciable un número suficiente de veces, entonces, para una derivada respecto al arco del contorno obtendremos la siguiente expresión

$$\frac{\partial W}{\partial s} = \frac{\partial W}{\partial t} t' + \frac{\partial W}{\partial \bar{t}} \bar{t}', \tag{32.10}$$

Suponiendo que la normal está orientada hacia adentro del dominio, es decir, la tangente y la normal están dispuestas, correspondientemente, como los ejes de Ox y Oy, tendremos

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial n}, \quad \frac{\partial x}{\partial n} = -\frac{\partial y}{\partial s}$$

[1]) Véanse, por ejemplo, [1], § 32, las fórmulas (32.18), (32.19), (32.22).

De aquí se tiene

$$\frac{\partial t}{\partial n} = it', \quad \frac{\partial \bar{t}}{\partial n} = -i\bar{t}'.$$

después de lo cual a la expresión para $\frac{\partial^k W}{\partial n^k}$ se le puede comunicar la forma

$$\frac{\partial^k W}{\partial n^k} = \left[i \left(t' \frac{\partial}{\partial t} - \bar{t}' \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \right) \right]^k W =$$

$$= i^k \sum_{m=0}^{k} (-1)^m C_k^m t'^{k-m} \bar{t}'^m \frac{\partial^k W}{\partial t^{k-m} \partial \bar{t}^m}. \quad (32.11)$$

Pasemos ahora a la enunciación de los problemas de contorno fundamentales para las funciones polianalíticas.

Al igual que la solución de toda ecuación de $2n$-ésimo orden de tipo elíptico, cualquier función poliarmónica se determina por la definición de n condiciones de contorno independientes. Estas condiciones pueden ser definidas en unas formas bastante diversas. Demos a conocer cuatro condiciones de contorno, que se encuentran con la mayor frecuencia, enunciándolas de una vez para las funciones polianalíticas.

Sea L un sencillo contorno cerrado cuya ecuación admite las derivadas hasta $(2n+2)$-ésimo orden que satisfacen la condición de Hölder. Hace falta determinar en el dominio D^+ la función polianalítica de n-ésimo orden:

$$F(z, \bar{z}) = U(x, y) + iV(x, y),$$

que sea continua en el contorno del dominio según las siguientes condiciones de contorno:

PROBLEMA I.

$$a_k(s)\,\Delta^k U + b_k(s)\,\Delta^k V = c_k(s) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \quad (32.12)$$

PROBLEMA II.

$$a_k(s)\,\Delta^k U + b_k(s)\,\Delta^k V = c_k(s),$$
$$a_k^1(s) \frac{\partial \Delta^k U}{\partial n} + b_k^1(s) \frac{\partial \Delta^k V}{\partial n} = c_k^1(s) \quad (32.13)$$

$\left(k = 0, 1, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right]\right.$, con la particularidad de que la última condición se desprecia, si n es impar).

PROBLEMA III.

$$a_k(s) \frac{\partial^k U}{\partial n^k} + b_k(s) \frac{\partial^k V}{\partial n^k} = c_k(s) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1) \quad (32.14)$$

PROBLEMA IV.

$$a_k(s)\frac{\partial^{n-1}U}{\partial x^{n-k}\partial y^{k-1}}+b_k(s)\frac{\partial^{n-1}V}{\partial x^{n-k}\partial y^{k-1}}=c_k(s)\quad(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),\tag{32.15}$$

donde $a_k(s)$, $b_k(s)$, $a_k^1(s)$, $b_k^1(s)$ son funciones reales de la longitud de arco que están definidas en L y satisfacen la condición de Hölder junto con sus derivadas hasta el $(2n-k-2)$ — ésimo orden[1]), con la particularidad de que $a_k^2(s)+b_k^2(s)\neq 0$, $[a_k^1(s)]^2+[b_k^1(s)]^2\neq 0$. Convengamos también en que

$$a_k^2(s)+b_k^2(s)=1,\quad [a_k^1(s)]^2+[b_k^1(s)]^2=1.\tag{32.16}$$

Al calcular, con la ayuda de la representación (32.8), los miembros izquierdos de las condiciones de contorno, llegaremos a los problemas de contorno con relación a las funciones analíticas $\varphi_p(z)$. En este caso, las condiciones de contorno, en el caso general, contendrán todas las funciones φ_p, como también sus derivadas. La resolución de los problemas de contorno de tal género constituye una cuestión bastante complicada. Nos limitaremos aquí al caso de unos contornos elementales (una circunferencia y una recta), cuando cada uno de los problemas de contorno I—IV pueda reducirse al conjunto de los problemas de contorno de Hilbert de los cuales cualquiera contenga sólo una función desconocida. En vista de la teoría, expuesta en el § 29, la solución de todos los problemas enumerados se da en forma cerrada.

Cuando $b_k(s)=0$ y $a_k(s)=1$, los problemas en consideración de las funciones polianalíticas se convierten en los problemas para las funciones poliarmónicas.

32.3. Problemas de contorno para el círculo [2]). Al tener en cuenta (32.16), las condiciones de contorno (31.12) del problema I pueden ser escritas en la forma siguiente:

$$\operatorname{Re}[(a_k(s)-ib_k(s))\,\Delta^k F(t,\bar{t})]=c_k(s)\quad(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).\tag{32.17}$$

Aprovechando la representación (32.8) para las funciones polianalíticas, obtendremos con cálculos sencillos

$$\Delta^k F(z,\bar{z})=4^k\sum_{p=k}^{n-1}\frac{p!}{(p-k)!}\bar{z}^{p-k}(z^p\varphi_p(z))^{(k)}.\tag{32.18}$$

[1]) En las condiciones de contorno figuran derivadas de hasta $(2n-2)$-ésimo orden de las funciones buscadas. Por ello, sobre los coeficientes de las condiciones de contorno se deben imponer unas restricciones que sean suficientes para que esta derivada de orden superior tenga en el contorno los valores límites, que satisfacen la condición de Hölder. La restricción indicada asegura esto para todos los problemas de contorno en consideración.

[2]) Los resultados del punto dado y del siguiente se han tomado de la obra de V. S. Rogozhin 1)* y de las obras de M. P. Ganin 1)* y 2)*.

Lo difícil en la reducción de los problemas de contorno para funciones polianalíticas a los problemas correspondientes para funciones analíticas consiste en que su representación contiene una función no analítica $\bar{z}$. El problema fundamental se reduce a lo que el valor de contorno de esta función se exprese en términos del valor de contorno propio de cierta función analítica, lo que se hace fácilmente en los casos elementales en consideración.

Sea el dominio D^+ un círculo unitario. En este caso, para los puntos de la circunferencia se tiene $\bar{t} = 1/t$. Tomándolo en consideración, introduzcamos nuevas funciones analíticas

$$\Phi_k(z) = \sum_{p=k}^{n-1} \frac{p!}{(p-k)!} \frac{(z^p \varphi_p(z))^{(k)}}{z^{p-k}}. \tag{32.19}$$

En la circunferencia tendremos

$$\Delta^k F(t, \bar{t}) = 4^k \Phi_k(t).$$

Por ello, las condiciones de contorno (32.17) pueden escribirse así:

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\Phi_k(t)}{a_k(s) + ib_k(s)}\right] = \frac{1}{4^k} c_k(s) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Hemos obtenido, pues, n problemas de contorno de Hilbert para determinar las funciones analíticas $\Phi_k(z)$.

Mediante las fórmulas del p. 29.3 hallemos las soluciones de estos problemas:

$$\Phi_k(z) = z^{\varkappa_k} e^{i\gamma_k(z)} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c_k(\sigma)\, e^{\omega_k(\sigma)} \frac{e^{i\sigma} + z}{e^{i\sigma} - z}\, d\sigma + Q_k(z)\right],$$

con tal particularidad que si para ciertos k el índice $\varkappa_k < 0$, entonces se debe poner $Q_k(z) \equiv 0$ y exigir que se cumplan las siguientes condiciones de resolubilidad:

$$\int_0^{2\pi} c_k(\sigma)\, e^{\omega_k(\sigma)} \cdot e^{-im_k\sigma}\, d\sigma = 0 \quad (m_k = 0, 1, \ldots, -\varkappa_k - 1). \tag{32.20}$$

Si aunque una de estas condiciones no se cumple, el problema no tiene soluciones.

Supongamos que todas las condiciones de resolubilidad están cumplidas. En este caso todas las funciones $\Phi_k(z)$ podemos considerarlas conocidas. Con el fin de obtener la función polianalítica buscada, nos queda expresar las funciones analíticas $\varphi_p(z)$, que figuran en su representación, en términos de las funciones determinadas $\Phi_k(z)$.

Cuando $k = n - 1$, de (32.19) tenemos

$$(z^{n-1}\varphi_{n-1}(z))^{(n-1)} = \frac{1}{(n-1)!}\Phi_{n-1}(z).$$

Integrando esta igualdad $n - 1$ veces, obtendremos la función $\varphi_{n-1}(z)$. Ha de ser notado que, como la función $z^{n-1}\varphi_{n-1}(z)$ y sus derivadas hasta el $(n-2)$-ésimo orden se reducen a cero para $z = 0$, todas las constantes arbitrarias de integración quedarán determinadas por medio de esta condición y la función $\varphi_{n-1}(z)$ se definirá en términos de la función $\Phi_{n-1}(z)$ de la única manera.

Suponiendo $k = n - 2$, tendremos

$$(z^{n-2}\varphi_{n-2}(z))^{(n-2)} = \frac{1}{(n-2)!}\left[\Phi_{n-2}(z) - \frac{(n-1)!}{1}\cdot\frac{(z^{n-1}\varphi_{n-1}(z))^{(n-2)}}{z}\right].$$

El miembro derecho es una función conocida. De aquí, por integración se determina $\varphi_{n-2}(z)$.

Sean, en general, determinadas las funciones $\varphi_{k+1}(z)$, $\varphi_{k+2}(z)$, ..., $\varphi_{n-1}(z)$. Entonces, de la igualdad (32.19) obtenemos

$$(z^k\varphi_k(z))^{(k)} = \frac{1}{k!}\left[\Phi_k(z) - \sum_{p=k+1}^{n-1}\frac{p!}{(p-k)!}\frac{(z^p\varphi_p(z))^{(k)}}{z^{p-k}}\right] = w_k(z), \quad (32.21)$$

donde $w_k(z)$ es una función conocida.

De aquí, integrando k veces, encontramos

$$z^k\varphi_k(z) = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^z (z-\tau)^{k-1}w_k(\tau)\,d\tau \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Introduciendo esta expresión en la fórmula (32.8), obtendremos la solución del problema

$$F(z, \bar{z}) = w_0(z) + \sum_{p=1}^{n-1}\frac{\bar{z}^p}{(p-1)!}\int_0^z (z-\tau)^{p-1}w_p(\tau)\,d\tau. \quad (32.22)$$

Si todos los índices $\varkappa_k$ son no negativos, el problema es incondicionalmente resoluble y su solución depende de

$$N = \sum_{k=0}^{n-1}(2\varkappa_k + 1)$$

constantes reales arbitrarias.

En el caso general de que

$$\varkappa_0 < 0, \quad \varkappa_1 < 0, \ \ldots, \ \varkappa_q < 0; \quad \varkappa_{q+1} \geqslant 0, \ \ldots, \ \varkappa_{n-1} \geqslant 0,$$

la solución existe sólo cuando se cumplen

$$\sum_{k=0}^{q}(-2\varkappa_k-1)$$

condiciones de resolubilidad de tipo (32.20), y si estas condiciones están cumplidas, la solución depende de

$$\sum_{k=q+1}^{n-1}(2\varkappa_k+1)$$

constantes reales arbitrarias.

Examinemos esquemáticamente, además, el problema IV. Las condiciones de contorno del problema (32.15) pueden escribirse en la forma

$$\operatorname{Re}\left[(a_k(s)-ib_k(s))\frac{\partial^{n-1}F(t,\bar{t})}{\partial x^{n-k}\partial y^{k-1}}\right]=c_k(s)\quad(k=1,2,\ldots n). \tag{32.23}$$

Haciendo uso de las expresiones (32.2), tendremos

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-k}\,\partial y^{k-1}}=i^{k-1}\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right)^{n-k}\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right)^{k-1}=$$

$$=i^{k-1}\sum_{\alpha=0}^{n-k}\sum_{\beta=0}^{k-1}(-1)^{\beta}C_{n-k}^{\alpha}C_{k-1}^{\beta}\frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-\alpha-\beta-1}\,\partial\bar{z}^{\alpha+\beta}}$$

de donde, en virtud de la representación (32.8),

$$\frac{\partial^{n-1}F(z,\bar{z})}{\partial x^{n-k}\,\partial y^{k-1}}=i^{k-1}\sum_{\alpha=0}^{n-k}\sum_{\beta=0}^{k-1}(-1)^{\beta}C_{n-k}^{\alpha}C_{k-1}^{\beta}\times$$

$$\times\sum_{p=\alpha+\beta}^{n-1}\frac{p!}{(p-\alpha-\beta)!}\bar{z}^{p-\alpha-\beta}(z^p\varphi_p(z))^{(n-\alpha-\beta-1)}. \tag{32.24}$$

Deseando reducir las condiciones de contorno (32.23) al conjunto de los problemas de contorno de Hilbert, introduzcamos nuevas funciones analíticas que se obtienen al sustituir en la última expresión $\bar{z}$ por $1/z$ y al multiplicar por z^{n-1} (lo último se hace con el fin de evitar polo en el origen de coordenadas).

Así pues, hagamos

$$\Phi_k(z)=\sum_{\alpha=0}^{n-k}\sum_{\beta=0}^{k-1}(-1)^{\beta}C_{n-k}^{\alpha}C_{k-1}^{\beta}\sum_{p=\alpha+\beta}^{n-1}\frac{p!}{(p-\alpha-\beta)!}\times$$

$$\times z^{n-p+\alpha+\beta-1}(z^p\varphi_p(z))^{(n-\alpha-\beta-1)} \tag{32.25}$$

$$(k=1,2,\ldots,n).$$

En el contorno tendremos

$$\frac{\partial^{n-1}F(t,\bar{t})}{\partial x^{n-k}\,\partial y^{k-1}}=\frac{i^{k-1}}{t^{n-1}}\Phi_k(t).$$

Por ello, las condiciones de contorno (32.23) pueden ser escritas en la forma

$$\operatorname{Re}\left[i^{k-1}\frac{a_k-ib_k}{t^{n-1}}\,\Phi_k(t)\right]=c_k(s).$$

Hemos obtenido n problemas de Hilbert para determinar las funciones analíticas $\Phi_k(z)$. Sin detenernos a resolver estos problemas, supongamos que las funciones $\Phi_k(z)$ ya están determinadas. Señalemos ahora cómo, según las funciones conocidas $\Phi_k(z)$, se definen las funciones $\varphi_p(z)$, que figuran en la representación de la función polianalítica. Aprovechemos, con este fin, tres hechos:

1. Las derivadas de F respecto a x, y se expresan fácilmente en términos de las funciones $\Phi_k(z)$.

2. Las derivadas de F respecto a z, $\bar{z}$ pueden ser expresadas en términos de las derivadas respecto a x, y.

3. Las funciones $\varphi_p(z)$ se expresan, en vista de la representación integral de la función polianalítica, en términos de las derivadas de F respecto a z y $\bar{z}$.

Tenemos:

1) $$\left\{\frac{\partial^{n-1}F(z,\bar{z})}{\partial x^{n-q-\nu-1}\partial y^{q+\nu}}\right\}_{\bar{z}=\frac{1}{z}}=\frac{i^{q+\nu}}{z^{n-1}}\Phi_{q+\nu+1}(z);$$

2) $$\left\{\frac{\partial^{n-1}F(z,\bar{z})}{\partial z^{n-k}\,\partial\bar{z}^{k-1}}\right\}_{\bar{z}=\frac{1}{z}}=\left\{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]^{n-k}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k-1}\right]F(z,\bar{z})\right\}_{\bar{z}=\frac{1}{z}}=$$

$$=\frac{1}{2^{n-1}}\left\{\sum_{q=0}^{n-k}\sum_{\nu=0}^{k-1}(-1)^q\,i^{q+\nu}C_{n-k}^{q}C_{k-1}^{\nu}\,\frac{\partial F(z,\bar{z})}{\partial x^{n-q-\nu-1}\,\partial y^{q+\nu}}\right\}_{\bar{z}=\frac{1}{z}}=$$

$$=\frac{1}{2^{n-1}z^{n-1}}\sum_{q=0}^{n-k}C_{n-k}^{q}\sum_{\nu=0}^{k-1}(-1)^{\nu}C_{k-1}^{\nu}\Phi_{q+\nu+1}(z).$$

Introduzcamos, para abreviar, la siguiente designación

$$\sum_{p=k-1}^{n-1}\frac{p!}{(p-k-1)!}\frac{1}{z^{p-k+1}}\left[z^p\varphi_p(z)\right]^{(n-k)}=w_k(z)$$

Sin detenernos en las condiciones de resolubilidad, las cuales surgen como resultado de exigir que ambos miembros de la última igualdad tengan en el origen de coordenadas el mismo orden, vamos a considerar que todas estas condiciones están cumplidas. En este caso, suponiendo en la última ecuación sucesivamente $k=n$, $n-1$, . . ., 1, hallaremos todas las funciones $\varphi_p(z)$.

El cálculo del número total de soluciones lineales independientes es posible, pero para esto se necesitarían unas investigaciones más detalladas. Señalemos sólo que además de constantes arbitrarias que aparecen como resultado de la resolución de los problemas de Hilbert con índices positivos, surgen también constantes adicionales a consecuencia de lo que en las condiciones de contorno figuran las derivadas.

Los problemas II y III pueden ser resueltos por los procedimientos analógicos. Sólo hemos de destacar que, al igual que en los problemas recién considerados I, IV, se logra introducir unas funciones analíticas auxiliares de tal género que el problema de contorno para las funciones polianalíticas se convierte en n problemas de contorno de Hilbert con relación a estas funciones. A continuación, las funciones $\varphi_p(z)$, que figuran en la representación de la función polianalítica buscada, se determinan mediante funciones analíticas auxiliares encontradas.

Si el dominio D^+ es semiplano superior, el problema se resuelve de un modo sumamente igual que en el caso considerado del círculo. La única diferencia consiste en lo que en lugar de la condición $\overline{t} = 1/t$, empleada en el p. 39.2, aquí debemos utilizar la condición $\overline{t} = t$. Por esta razón, al construir las funciones auxiliares, en vez de la sustitución de $\overline{z}$ por $1/z$ se debe simplemente sustituir $\overline{z}$ por z.

Véanse al final del capítulo los ejemplos referentes a la resolución de los problemas de Hilbert para un semiplano.

32.4. Problemas de contorno para los dominios que se aplican sobre un círculo mediante funciones racionales. La resolución en forma cerrada de los problemas de contorno de las funciones polianalíticas para un círculo, expuesta en el punto antecedente, se extiende, cambiando algo el método de resolución, a los dominios que se aplican sobre un círculo por medio de las funciones racionales.

Este hecho es bien conocido para los problemas fundamentales de la teoría de elasticidad[1]), es decir, para los problemas de contorno de la ecuación biarmónica $\Delta^2 u = 0$, y está basado en lo que los núcleos de las ecuaciones integrales, a las cuales se reducen dichos problemas, resultan degenerados. Haciendo uso de este método (reducción a la ecuación integral de núcleo degenerado), P. K. Zeraguia 1)* dio la solución en forma cerrada del problema de contorno

$$\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-k} \partial y^{k-1}} = f_k(s) \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

de la ecuación poliarmónica (problema IV para $a_k = 1$, $b_k = 0$).

Sea D un dominio finito o infinito en el plano de la variable compleja z, limitado por el contorno L simple cerrado y suficientemente suave, y la función racional

$$z = \omega(\zeta)$$

aplique conformemente el círculo $|\zeta| < 1$ sobre el dominio D. Denotemos mediante $\zeta = \gamma(z)$ su función inversa. En este caso, todos los problemas de contorno, enunciados en el p. 32.2, pueden ser resueltos para el dominio D en forma cerrada[2]).

Examinemos, a título de un ejemplo, el PROBLEMA de contorno IV. En vista de (32.23), (32.24), la condición de contorno del problema

[1]) Véase [17], pág. 304.

[2]) Los resultados, expuestos en lo sucesivo, se deben a M. P. Ganin.

en el contorno L puede escribirse en la forma

$$\operatorname{Re}\Big\{(a_k - ib_k)\, i^{k-1} \sum_{\alpha=0}^{n-k} C_{n-k}^{\alpha} \sum_{\beta=0}^{k-1} (-1)^{\beta} C_{k-1}^{\beta} \times$$

$$\times \sum_{p=\alpha+\beta}^{n-1} \frac{p!}{(p-\alpha-\beta)!}\, \bar{t}^{\,p-\alpha-\beta} \left(t^p \varphi_p(t)\right)^{(n-\alpha-\beta-1)}\Big\} = c_k(t). \quad (32.26)$$

Al sustituir en la última igualdad $t = \omega(\tau)$, transformemos la condición de contorno, definida en el contorno L, en otra condición de contorno, definida en la circunferencia $|\tau| = 1$.

Introduzcamos n funciones nuevas:

$$\Phi_k[\omega(\zeta)] = \sum_{\alpha=0}^{n-k} C_{n-k}^{\alpha} \sum_{\beta=0}^{k-1} (-1)^{\beta} C_{k-1}^{\beta} \times$$

$$\times \sum_{p=\alpha+\beta}^{n-1} \frac{p!}{(p-\alpha-\beta)!}\, \bar{\omega}^{p-\alpha-\beta} \left(\frac{1}{\zeta}\right) \left(z^p \varphi_p(z)\right)_{z=\omega(\zeta)}^{(n-\alpha-\beta-1)}. \quad (32.27)$$

Estas funciones en el círculo $|\zeta| < 1$ pueden tener singularidades sólo en aquellos puntos, donde las tiene la función $\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)$. Destaquemos estas singularidades.

Sea

$$\omega(\zeta) = \frac{\alpha_q \zeta^q + \alpha_{q-1}\zeta^{q-1} + \ldots + \alpha_0}{\beta_r \zeta^r + \beta_{r-1}\zeta^{r-1} + \ldots + \beta_0}.$$

Entonces

$$\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \zeta^{r-q} \frac{\bar{\alpha}_0 \zeta^q + \bar{\alpha}_1 \zeta^{q-1} + \ldots + \bar{\alpha}_q}{\bar{\beta}_0 \zeta^r + \bar{\beta}_1 \zeta^{r-1} + \ldots + \bar{\beta}_r}.$$

Pongamos, para concretar, $r > q$ y designemos

$$f(\zeta) = (\bar{\beta}_0 \zeta^r + \bar{\beta}_1 \zeta^{r-1} + \ldots + \bar{\beta}_r)^{n-1}. \quad (32.28)$$

Las funciones

$$f(\zeta)\, \Phi_k[\omega(\zeta)]$$

serán analíticas en el círculo unitario. Denotemos

$$\Phi_k[\omega(\zeta)] = \Phi_k^1(\zeta).$$

Respecto a las funciones nuevas la condición de contorno en la circunferencia unitaria puede ser escrita de manera siguiente

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{a_k[\omega(\tau)]-ib_k[\omega(\tau)]}{f(\tau)}[i^{k-1}f(\tau)\,\Phi_k^1(\tau)]\right\}=c_k[\omega(\tau)] \quad (32.29)$$
$$(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1),$$

después de lo cual obtendremos n problemas de contorno de Hilbert para determinar las funciones $f(\zeta)\,\Phi_k^1(\zeta)$, analíticas en el círculo unitario.

Supongamos que hemos resuelto todos los problemas de contorno (32.29) y, consecuentemente, quedan determinadas todas las funciones $\Phi_k^1(\zeta)$. En este caso podemos considerar conocidas también las funciones $\Phi_k(z)=\Phi_k^1[\gamma(z)]$. Nos resta, pues, definir las funciones $\varphi_p(z)$ que figuran en la representación de la función polianalítica. Esto se hace por un procedimiento analógico al empleado en el punto anterior, al resolverse el mismo problema para un círculo. Por ello, sin detenernos en los detalles, demos a conocer sólo la igualdad fundamental, correspondiente a las igualdades 1), 2) del punto antecedente:

$$\sum_{p=k-1}^{n-1}\frac{p!}{(p-k-1)!}\bar{z}^{p-k-1}\,(z^p\varphi_p(z))^{(n-k)}_{\substack{z=\omega(\zeta)\\ \bar{z}=\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}}=$$
$$=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{q=0}^{n-k}C_{n-k}^q\sum_{\nu=0}^{k-1}(-1)^\nu C_{k-1}^\nu\Phi_{q+\nu+1}[\omega(\zeta)].$$

Sustituyendo en las últimas igualdades sucesivamente $k=n$, $n-1,\ \ldots,\ 1$, definiremos todas las funciones $\varphi_p(z)$.

Dejamos al lado aquí la cuestión sobre el cálculo del número de soluciones y condiciones de resolubilidad. Indiquemos sólo que este cálculo puede ser llevado a cabo con suma precisión.

Cuando $a_k=1$, $b_k=0$, se obtiene la solución del problema de contorno para una función poliarmónica, examinada por P. K. Zeraguia 1)*.

32.5. Resolución del problema fundamental de la teoría de elasticidad para el dominio limitado por el caracol de Pascal. Examinemos a título de ejemplo el problema de contorno fundamental de la teoría de elasticidad para el dominio D_z^+, limitado por el caracol de Pascal L, el cual se define en forma paramétrica mediante las siguientes ecuaciones:

$$x=R(\cos\theta+m\cos 2\theta),\quad y=R(\operatorname{sen}\theta+m\operatorname{sen}2\theta)$$
$$(R>0,\quad 0<m<1/2,\quad 0\leqslant\theta<2\pi).$$

Se sabe (véase, por ejemplo, [17], pág 141) que el problema fundamental de la teoría de elasticidad se reduce a la búsqueda, según dos condiciones en el contorno L, de la función biarmónica $U(x, y)$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = g(t), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = h(t), \tag{32.30}$$

donde $g(t)$, $h(t)$ son funciones reales definidas de las coordenadas de los puntos del contorno t, que satisfacen la condición de Hölder.

Para la función biarmónica tenemos, partiendo de la representación general de las funciones poliarmónicas (32.5),

$$U(x, y) = \operatorname{Re}[z\bar{z}\varphi(z) + \psi(z)], \tag{32.31}$$

donde $\varphi(z)$, $\psi(z)$ son funciones analíticas arbitrarias.

Con ayuda de esta expresión y en vista de las fórmulas (32.2), las condiciones de contorno pueden escribirse en la forma

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\{\bar{t}\,[t\varphi(t)]' + \psi'(t) + t\varphi(t)\} = g(t), \\ &\operatorname{Re}\{i\,[\bar{t}\,(t\varphi(t))' + \psi'(t) - t\varphi(t)]\} = h(t). \end{aligned} \tag{32.32}$$

La función $\omega(\zeta)$ que aplica conformemente el dominio D_z^+ sobre el interior D_ζ de la circunferencia unitaria Γ del plano complejo ζ y que satisface las condiciones $\omega(0) = 0$, $\omega'(0) > 0$, es igual a

$$z = \omega(\zeta) = R(\zeta + m\zeta^2).$$

La función inversa es

$$\zeta = \gamma(z) = -\frac{1}{2m} + \sqrt{\frac{1}{4m^2} + \frac{z}{Rm}}.$$

La rama de la raíz se determina por la condición $\gamma(0) = 0$. En la circunferencia unitaria Γ tendremos

$$\bar{t} = \overline{\omega(\xi)} = R(\bar{\xi} + m\bar{\xi}^2) = \frac{R(\xi + m)}{\xi^2},$$

por lo cual las condiciones de contorno se escribirán así:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\left\{\frac{R(\xi+m)}{\xi^2}\varphi_1(\xi) + \psi_1(\xi) + R(\xi + m\xi^2)\varphi[\omega(\xi)]\right\} = g[\omega(\xi)], \\ &\operatorname{Re}\left\{i\,\frac{R(\xi+m)}{\xi^2}\varphi_1(\xi) + \psi_1(\xi) - R(\xi + m\xi^2)\varphi[\omega(\xi)]\right\} = h[\omega(\xi)], \end{aligned} \tag{32.33}$$

donde $\varphi_1(\zeta) - [z\varphi(z)]'_{z=\omega(\zeta)}$, $\psi_1(\zeta) - \psi'(z)_{z=\omega(\zeta)}$.

Cada una de las condiciones de contorno (32.33) es una condición del problema A para el círculo unitario (cuando $n = 2$), examinada en el p. 27.3. Aplicando la fórmula (27.9) y sustituyendo en ella el operador de Schwarz por la integral de Schwarz (véase el p. 6.1), obtendremos

$$\begin{aligned} &\frac{R(\zeta+m)}{\zeta^2}\varphi_1(\zeta) + \psi_1(\zeta) + R(\zeta + m\zeta^2)\varphi[\omega(\zeta)] = \\ &\quad = \frac{A}{\zeta^2} - \bar{A}\zeta^2 + \frac{B}{\zeta} - \bar{B}\zeta + i\alpha + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g[\omega(\xi)]\,\frac{\xi+\zeta}{\xi-\zeta}\,\frac{d\xi}{\xi}, \\ &i\left\{\frac{R(\zeta+m)}{\zeta^2}\varphi_1(\zeta) + \psi_1(\zeta) - R(\zeta + m\zeta^2)\varphi[\omega(\zeta)]\right\} = \\ &\quad = \frac{C}{\zeta^2} - \bar{C}\zeta^2 + \frac{D}{\zeta} - \bar{D}\zeta + i\beta + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma h[\omega(\xi)]\,\frac{\xi+\zeta}{\xi-\zeta}\,\frac{d\xi}{\xi}, \end{aligned} \tag{32.34}$$

donde A, B, C, D son constantes arbitrarias complejas, y α, β, constantes arbitrarias reales.

Multipliquemos la segunda igualdad por i y sumemos a la primera. Ya que la función $\varphi[\omega(\zeta)]$ es analítica en el círculo unitario, los coeficientes de ζ^{-2} y ζ^{-1} se reducirán a cero, y, al sustituir ζ por $\gamma(z)$, llegaremos a las correlaciones

$$2z\varphi(z) = -(\overline{A} + i\overline{C})\gamma^2(z) - (\overline{B} + i\overline{D})\gamma(z) + i\alpha - \beta + \frac{1}{2\pi i} \int_L [g(t) + ih(t)] \frac{\gamma(t) + \gamma(z)}{\gamma(t) - \gamma(z)} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt, \tag{32.35}$$

$$A + iC = 0, \quad B + iD = 0. \tag{32.36}$$

Suponiendo en (32.35) $z = 0$, y tomando en consideración que $\gamma(0) = 0$, encontramos en adición que

$$\alpha + i\beta = \frac{1}{2\pi} \int_L [g(t) + ih(t)] \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt. \tag{32.37}$$

Para determinar $\psi(z)$, introduzcamos en cualquiera de las ecuaciones (32.34) los valores de $\varphi[\omega(\zeta)]$ y $\varphi_1(\zeta)$, tomados de la fórmula (34.25) y de la igualdad obtenida por derivación de ésta.

Al tener en cuenta (32.36), tendremos

$$\psi'(z) = \frac{A}{\gamma^2(z)} + \frac{B}{\gamma(z)} + \frac{i\alpha + \beta}{2} + \frac{1}{4\pi i} \int_L [g(t) - ih(t)] \frac{\gamma(t) + \gamma(z)}{\gamma(t) - \gamma(z)} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt + \\ + \frac{R\gamma'(z)[\gamma(z) + m]}{\gamma^2(z)} \left[2\overline{A}\gamma(z) + \overline{B} - \frac{1}{2\pi i} \int_L [g(t) + ih(t)] \frac{\gamma'(t)}{[\gamma(t) - \gamma(z)]^2} dt \right]. \tag{32.38}$$

Igualemos a cero los coeficientes de potencias negativas de $\gamma(z)$ (por ser analítica la función $\psi'(z)$. Con este fin observemos que

$$R\gamma'(z) = \frac{1}{1 + 2m\gamma(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [2m\gamma(z)]^n, \quad \frac{1}{[\gamma(t) - \gamma(r)]^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n[\gamma(z)]^{n-1}}{[\gamma(t)]^{n+1}}.$$

Después de realizar ciertas transformaciones no complicadas, obtenemos un sistema de ecuaciones para determinar A y B:

$$A + m\overline{B} = \frac{m}{2\pi i} \int_L [g(t) + ih(t)] \frac{\gamma'(t)}{\gamma^2(t)} dt,$$

$$2m\overline{A} + B + (1 - 2m^2)\overline{B} = \frac{1 - 2m^2}{2\pi i} \int_L [g(t) + ih(t)] \frac{\gamma'(t)}{\gamma^2(t)} dt + \\ + \frac{m}{\pi i} \int_L [g(t) + ih(t)] \frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)} dt. \tag{32.39}$$

El sistema (32.39) tiene solución sólo a condición de que

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L [g(t)+ih(t)]\left[\frac{1}{\gamma^2(t)}+\frac{2m}{\gamma^3(t)}\right]\gamma'(t)\,dt\right\}=$$

$$=Re\left\{\frac{1}{2\pi R}\int_L [g(t)+ih(t)]\,\overline{dt}\right\}-0. \qquad (33.40)$$

Mas la última condición es la de igualdad a cero del momento principal de las fuerzas exteriores y tiene que cumplirse necesariamente, partiendo de razonamientos mecánicos.

Haciendo $A = a_1 + ia_2$, $B = b_1 + ib_2$ y transformando el sistema (32.39), obtenemos tres ecuaciones:

$$a_1+mb_1=\operatorname{Re}\left\{\frac{m}{2\pi i}\int_\Gamma \{g[\omega(\xi)]+ih[\omega(\xi)]\}\,\frac{d\xi}{\xi^2}\right\},$$

$$2ma_1+b_1=\frac{1}{4\pi i}\int_\Gamma \{g[\omega(\xi)]+ih[\omega(\xi)]\}\left[\frac{1}{\xi^2}+\frac{2m}{\xi^3}\right]d\xi, \qquad (32.41)$$

$$a_2-mb_2=\operatorname{Im}\left\{\frac{m}{2\pi i}\int_\Gamma \{g[\omega(\xi)]+ih[\omega(\xi)]\}\,\frac{d\xi}{\xi^2}\right\}.$$

Al resolverse el sistema (32.41), una de las magnitudes a_2 o b_2, puede elegirse al azar.

Sustituyendo en la fórmula (32.31) los valores de $z\varphi(z)$ y $\psi(z)$, obtenidos por integración de la igualdad (32.38), hallamos la función biarmónica buscada

$$U(x,y)-\operatorname{Re}\left\{\frac{\overline{A}-m\overline{B}}{m}\overline{z\gamma}(z)-\frac{\overline{A}(x^2+y^2)}{Rm}+\right.$$

$$+\frac{\overline{z\gamma}(z)}{2\pi Ri}\int_L \frac{[g(t)+ih(t)]\,dt}{\gamma(t)[1+2m\gamma(t)][\gamma(t)-\gamma(z)]}+$$

$$+\frac{1}{2\pi Ri}\int_0^z d\tau\int_L \frac{[g(t)-ih(t)]\,dt}{[1+2m\gamma(t)][\gamma(t)-\gamma(\tau)]}+$$

$$+2R(\overline{A}+m\overline{B})\gamma(z)-\frac{R(A+m\overline{B})}{\gamma(z)}+2R(2ma_1+b_1)\ln\gamma(z)-$$

$$\left.-\frac{1}{2\pi Ri}\int_0^z \frac{[\gamma(\tau)+m]\,d\tau}{\gamma^2(\tau)[1+2m\gamma(\tau)]}\int_L \frac{g(t)+ih(t)}{[1+2m\gamma(t)][\gamma(t)-\gamma(t)]^2}\,dt\right\}+K.$$

Es fácil verificar, aprovechando las igualdades (32.39) o (32.41), que la función $U(x, y)$ es analítica en el origen de coordenadas.

La solución contiene una constante arbitraria K, lo que corresponde al hecho de que las magnitudes, que caracterizan el estado de tensión, dependen de las derivadas de la función biarmónica $U(x, y)$, y, por lo tanto, la presencia de K no influye en el estado de tensión.

El problema es resoluble sólo a condición de que las funciones dadas $g(t)$, $h(t)$ satisfacen la condición (32.40). Ha de notarse que la condición (32.40), que expresa el significado mecánico indicado más arriba, fluye también de la condición matemática que consiste en la ausencia en el origen de coordenadas de una singularidad logarítmica.

32.6. Problemas de contorno de Riemann [1]). Supongamos que el contorno L (p. 32.2) parte el plano en el dominio finito D^+ y otro dominio D^-, que contiene un punto infinitamente alejado. Las funciones polianalíticas en $D^{\pm}$ (una función polianalítica a trozos) pueden ser representadas en la forma

$$F^+(z, \bar{z}) = \sum_{p=0}^{n-1} \bar{z}^p z^p \varphi_p^+(z) = \sum_{p=0}^{n-1} \bar{z}^p f_p^+(z), \tag{32.8'}$$

$$F^-(z, \bar{z}) = \varphi_0^-(z) + \sum_{p=1}^{n-1} \bar{z}^p z^{-p-1} \varphi_p^-(z) = \sum_{p=0}^{n-1} \bar{z}^p f_p^-(z), \tag{32.8''}$$

donde $\varphi^{\pm}(z)$, $f^{\pm}(z)$ son las funciones analíticas, respectivamente, en los dominios $D^{\pm}$ y entrelazadas mediante las correlaciones

$$\begin{aligned} &z^p \varphi_p^+(z) = f_p^+(z), \quad \varphi_0^-(z) = f_0^-(z), \\ &z^{-p-1} \varphi_p^-(z) = f_p^-(z). \end{aligned} \tag{32.42}$$

De las últimas se desprende que el orden de $f_p^+(z)$ en el origen de coordenadas no es menor que p; el orden de $f_p^-(z)$, $p \geqslant 1$, en el punto infinitamente alejado, no es inferior a $p+1$, mientras que $f_0^-(z)$ no es inferior a cero.

Podemos enunciar cuatro problemas de contorno, relacionados con los problemas del p. 32.2 de una manera sumamente igual que el problema de contorno de Riemann, resuelto en los §§ 14, 15. se relaciona con el problema de contorno de Hilbert investigado en el § 29. He aquí la enunciación exacta del problema I.

PROBLEMA I. *Hállese la función polianalítica a trozos de* n*-ésimo orden* $F^{\pm}(z, \bar{z})$ *que sea continua respecto a* z *junto con sus derivadas* $\dfrac{\partial^{2k} F^{\pm}}{\partial z^k \partial \bar{z}^k}$ *hasta el* $(n-1)$*-ésimo orden, que esté acotada en el infinito y satisfaga en el contorno* L *n condiciones de contorno*:

$$\Delta^k F^+(t, \bar{t}) = G_k(t)\, \Delta^k F^-(t, \bar{t}) + 4^k g_k(t) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{32.43}$$

donde $G_k(t)$, $g_k(t)$ satisfacen la condición de Hölder, $G_k(t) \neq 0$. El factor 4^k está introducido con el fin de hacer más cómodas las designaciones ulteriores. Para conseguir la mayor simetría de los

[1]) El presente punto está escrito a base de las obras de I. A. Sokolov 1)*—4)*.

resultados, vamos a resolver el problema en la clase de funciones desaparecientes en el infinito.

De las fórmulas (32.8'), (32.8'') obtenemos por derivación (véase la fórmula (32.18))

$$\Delta^k F^{\pm}(z, \bar{z}) = 4^k \sum_{p=k}^{n-1} \frac{p!}{(p-k)!} \bar{z}^{p-k} f_p^{\pm(k)}(z). \qquad (32.18')$$

1°. Examinemos al principio el caso más sencillo en que el contorno L es una circunferencia. Partiendo de los mismos razonamientos que hemos empleado en el p. 32.3, introduzcamos unas funciones analíticas auxiliares

$$\Phi_k^{\pm}(z) = \sum_{p=k}^{n-1} \frac{p!}{(p-k)!} z^{k-p} f_p^{\pm(k)}(z). \qquad (39.19')$$

Por medio de estas funciones las condiciones de contorno (32.43) se anotarán en la forma

$$\Phi_k^+(t) = G_k(t)\, \Phi_k^-(t) + g_k(t) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \qquad (32.44)$$

De este modo, el problema de contorno de Riemann (I) para las funciones polianalíticas se ha reducido al conjunto de n problemas de contorno de Riemann para las funciones analíticas a trozos $\Phi_k^{\pm}(z)$. Calculemos los órdenes de estas funciones, respectivamente en el cero y en el infinito.

En virtud de (32.42), las funciones $f_p^{\pm}(z)$ tienen en el cero los órdenes p, y las funciones $f_p^{+(k)}(z)$, los órdenes $p - k$, mientras que $\Phi_k^{\pm}(z)$ poseen, en vista de (32.19), los órdenes nulos. Las funciones $f_p^-(z)$, debido a (32.42), tienen los órdenes $p + 1 + k$, y las $\Phi_k^-(z)$, en vista de (32.19'), los órdenes $2k + 1$. Por consiguiente, los problemas de Riemann (32.44) deben resolverse en la clase de funciones que se reducen en el infinito a cero de los órdenes $2k + 1$.

Sea $\operatorname{Ind} G_k(t) = \varkappa_k$. De la teoría del problema de contorno de Riemann (p. 15.3) se deduce que la resolución del problema con cero prefijado de $(2k + 1)$-ésimo orden es equivalente a la resolución del problema con cero simple y un índice disminuido en $2k$.

Denominaremos $\widetilde{\varkappa}_k = \varkappa_k - 2k$ *índice reducido* del problema correspondiente de Riemann. Si es que $\widetilde{\varkappa}_k > 0$, el correspondiente problema de contorno homogéneo tiene $\widetilde{\varkappa}_k$ soluciones linealmente independientes; si $\widetilde{\varkappa}_k \leqslant 0$, la solución del problema homogéneo será cero idéntico. Denotemos con $\widetilde{\varkappa}_+$ la suma de índices reducidos positivos. En este caso, el número total de soluciones linealmente independientes de todo el conjunto de los problemas de contorno

de Riemann (32.44)es igual a $\widetilde{\varkappa}_+$. Con ello, todas las soluciones pueden ser escritas en forma explícita según las fórmulas del § 14.

Las funciones $f_p^{\pm}$, y, consecuentemente, $\varphi_p^{\pm}$, podemos hallarlas según las funciones encontradas $\Phi_k^{\pm}$, empleando el procedimiento de integración, analógico al utilizado en el p. 32.3. En este caso no aparecen ningunas constantes arbitrarias adicionales. De este modo, se puede enunciar el siguiente

TEOREMA I. *El problema de contorno homogéneo* (32.43) *para funciones polianalíticas que desaparecen en el infinito tiene* $\widetilde{\varkappa}_+$ *soluciones linealmente independientes, donde* $\widetilde{\varkappa}_+$ *es la suma de todos los índices reducidos positivos. Todas las soluciones se expresan en forma explícita en términos de los coeficientes* $G_k(t)$ *según las fórmulas del* § 14.

Examinemos, ahora, un problema no homogéneo. Su investigación se efectúa a base de los resultados del § 15. La distinción de lo antecedente consiste en que, para $\widetilde{\varkappa}_k < 0$, hará falta satisfacer $-\widetilde{\varkappa}_k$ condiciones de resolubilidad. Con ello, las constantes arbitrarias que surgen al resolverse los problemas con índices reducidos positivos no pueden emplearse en vista de la independencia de los problemas de contorno, para satisfacer las condiciones de resolubilidad. Sin detenernos en los pormenores, enunciaremos los resultados. Sea $\widetilde{\varkappa}_+$ la suma de índices reducidos positivos y sea $\widetilde{\varkappa}_-$ la suma de valores absolutos de índices reducidos negativos. Para este caso queda válido el

TEOREMA II. *Al cumplirse* $\widetilde{\varkappa}_-$ *condiciones de resolubilidad, el problema de contorno no homogéneo* (32.43) *tiene solución que desaparece en el infinito y depende linealmente de* $\widetilde{\varkappa}_+$ *constantes arbitrarias. Las condiciones de resolubilidad y las mismas soluciones pueden ser expresadas en cuadraturas mediante los coeficientes* $G_k(t)$, $g_k(t)$ *de las condiciones de contorno.*

Mediante el método, próximo al expuesto más arriba, a base de los resultados obtenidos en el § 17, puede resolverse un problema con traslación

$$\Delta^k F^+ [\alpha(t), \overline{\alpha(t)}] = G_k(t) F^-(t, \overline{t}) + g(t). \qquad (32.45)$$

Los resultados cualitativos son bien analógicos a los recién enunciados.

2°. Examinemos esquemáticamente un problema en un contorno arbitrario. Ha de notarse ahora mismo una diferencia substancial entre el caso dado y el que acabamos de considerar en la circunferencia. En el caso de la circunferencia, apoyándonos en la propiedad $\overline{t} = 1/t$, hemos logrado construir tales combinaciones de funciones buscadas $\Phi_k(z)$, que el problema de contorno para la función polianalítica se discompone en n problemas de contorno de Riemann independientes para las funciones analíticas. Para cada uno de ellos se realizaba el cálculo de las soluciones linealmente independientes o de las condiciones de resolubilidad.

Como resultado, ambos estos números se han expresado exactamente en términos de los índices de los coeficientes prefijados G_k y los términos independientes g_k.

En el caso de un contorno arbitrario se logra reducir el problema polianalítico a n problemas de contorno de Riemann sucesivos, cada uno de los cuales contiene solamente un par de funciones buscadas, consecutivamente $f_{n-1}^{\pm}, \ldots, f_0^{\pm}$. Pero, sólo uno de ellos (respecto de $f_{n-1}^{\pm}$) es independiente de los otros; en los términos independientes de los demás problemas figuran las soluciones de los problemas de números antecedentes. Por esta razón, los resultados exactos pueden obtenerse sólo en los casos de índices reducidos de un mismo signo; para todos los índices reducidos no negativos, el número de soluciones linealmente independientes es igual a su suma; para todos los índices no positivos, el número de condiciones de resolubilidad es igual a la suma de sus valores absolutos.

Si están presentes los índices reducidos de signos opuestos las condiciones de resolubilidad, correspondientes a los índices reducidos negativos, dan sistemas de ecuaciones lineales algebraicas respecto a los parámetros que aparecen en los problemas con índices reducidos positivos. En estos casos el número de soluciones y condiciones de resolubilidad depende no sólo de los índices reducidos, sino también del rango de ciertas matrices. Se logra señalar con unos ejemplos que la última dependencia es sustancial y, para los mismos índices, los rangos y, consecuentemente, el número de soluciones o de condiciones de resolubilidad de los problemas pueden resultar distintos.

Pero, al igual que en el caso de una circunferencia, en el contorno arbitrario las soluciones y condiciones de resolubilidad pueden ser expresadas en cuadraturas mediante los datos del problema.

3°. Se ha investigado también el problema de contorno de tipo II en la circunferencia. Hállese la función polianalítica a trozos $F^{\pm}(z, \bar{z})$ según las condiciones de contorno

$$\Delta^k F^+(t, \bar{t}) = G_k(t)\Delta^k F^-(t, \bar{t}) + g_k(t) \left(k = 0, 1, \ldots, m, \; m = \left[\frac{n-1}{2}\right]\right), \tag{32.46}$$

$$\frac{\partial \Delta^l F^+(t, \bar{t})}{\partial n_+} = G_l^*(t) \frac{\partial \Delta^l F^-(t, \bar{t})}{\partial n_+} + g_l^*(t) \left(l = 0, 1, \ldots, m_1, \; m_1 = \left[\frac{n-2}{2}\right]\right).$$

La investigación de este caso resulta mucho más complicada que en el problema I. No se consiguen resultados exactos incluso en el caso de la circunferencia. Expondremos, por esto, esquemáticamente los resultados principales.

Se construye un sistema de n funciones analíticas a trozos auxiliares $\Phi_k(z)$, $\Phi_l^*(z)$ (que se expresan en términos de las funciones buscadas $f_k(z)$ de una manera bastante compleja) tal que el problema de contorno (32.46) se descompone en n diferentes problemas de contorno de Riemann. De este modo, para las funciones analíticas auxiliares resulta factible calcular con precisión el número de soluciones linealmente independientes y condiciones de resolubilidad y presentar las soluciones en cuadraturas.

La búsqueda de las funciones $f_k^{\pm}(z)$ a base de las conocidas Φ_k, Φ_l^* se reduce a la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales. Se logra también resolverlo en cuadraturas. Pero resulta que las funciones determinadas $f_k^-(z)$ han de tener en el infinito los ceros de cierto orden determinado. Esto conduce, en el caso general, a la resolución de los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales con respeto de parámetros contenidos en la solución. Con este motivo, por analogía con lo que se decía más arriba del problema I para un contorno arbitrario, los resultados exactos se logra obtenerlos sólo en el caso en que los índices reducidos son todos no negativos y positivos. Si los índices son de signos

opuestos, el número de soluciones y condiciones de resolubilidad se expresa en términos del rango de cierta matriz.

Indiquemos que la investigación del problema II ofrece cálculos voluminosos. Los dos problemas restantes (III, IV) hasta ahora no están investigados.

§ 33. Problema de contorno inverso de las funciones analíticas

Por problemas de contorno inversos se entienden aquellos que tienen por objeto la búsqueda del contorno de un dominio según ciertas magnitudes dadas en el contorno. El planteamiento habitual de tales problemas consiste en lo que en el dominio buscado se busca una función (sea analítica o sea una solución de alguna ecuación dada) que pertenezca a la clase prefijada, con la particularidad de que en el contorno se definen las condiciones independientes en cantidad mayor en una unidad en comparación con el número requerido para la resolución de un problema de contorno ordinario (para el dominio dado) en la clase dada de funciones. La condición de contorno superflua se utiliza para buscar el contorno del dominio. Existe un número considerable de diversos planteamientos de los problemas de contorno inversos. Consideraremos aquí un problema de las funciones analíticas el cual de una manera aproximada puede enunciarse *como problema de búsqueda del contorno según los valores de contorno (dados en él) de una función analítica.*

33.1. Planteamiento del problema. Sea dadas dos funciones de parámetro s $(0 \leqslant s \leqslant l)$:

$$u = u(s), \quad v = v(s), \tag{33.1}$$

que son periódicas (de período l) y tienen las primeras derivadas las cuales satisfacen la condición de Hölder, y que no se reducen simultáneamente a cero, satisfaciendo la condición: para dos valores del parámetro $s_1 \neq s_2$ se tiene

$$[u(s_1) - u(s_2)]^2 + [v(s_1) - v(s_2)]^2 \neq 0.$$

Las ecuaciones (33.1) determinan en el plano de una variable compleja $w = u + iv$ una curva cerrada simple de Liapunov que divide el plano en dos dominios: el interior D_w^+ y el exterior D_w^-.

PROBLEMA «INTERIOR». *Hállese en el plano z la curva L_z que limita el dominio finito D_z^+ (de varias hojas, en el caso general) de un modo tal que, al tomar s por la longitud del arco de la curva L_z, la expresión $w(s) = u(s) + iv(s)$ sea el valor de contorno de una función analítica que aplique conformemente el dominio D_z^+ sobre el dominio D_w^+ o D_w^-.*

PROBLEMA «EXTERIOR». *Hállese en el plano z la curva L_z que limita el dominio D_z^- (el cual contiene un punto infinitamente alejado y es, en el caso general, múltiplemente conexo) de un modo tal que al tomar el parámetro s por la longitud del arco de la curva L_z, la expresión $w(s) = u(s) + iv(s)$ sea el valor de contorno de una función analítica que aplique conformemente el dominio D_z^-* sobre el dominio D_w^- o D_w^+.

Si se tratase de un problema de contorno ordinario (con el contorno prefijado), para hallar una función analítica en el dominio (salvo un sumando constante) sería suficiente dar sólo una de las funciones ($u(s)$ o $v(s)$). La definición de la segunda función permite determinar el contorno buscado L_z.

Al combinar los dominios $D_z^{\pm}$, $D_w^{\pm}$, sólo podemos obtener cuatro problemas. Pero es fácil ver que son esencialmente distintos solamente aquellos que se diferencian en signos de los dominios D_z, puesto que el dominio D_w^- de antemano puede ser aplicado conformemente sobre cierto dominio de tipo D^+. Para concretar, convengamos en considerar que desde el principio está definido el dominio D_w^+. En lo sucesivo omitiremos el símbolo$^+$, atribuido al dominio D_w^+, y designaremos este último simplemente con D_w. En el plano z, donde L_z es el contorno buscado, el dominio exterior no puede ser reducido al interior, a consecuencia de lo cual nos vemos obligados a resolver por separado cada uno de los problemas que difieren en signos del dominio D_z.

Vamos a considerar que los sentidos positivos de los contornos dado L_w y buscado L_z están elegidos de una manera tal que en el transcurso del recorrido de éstos los dominios D_z^+ y D_w^+ queden a la izquierda. Entonces, en virtud de las propiedades de una aplicación conforme, obtendremos, como condición necesaria de resolubilidad, el requisito de que, al crecer s desde 0 hasta l, *el contorno L_w se recorra en el sentido positivo para el problema interior y en el sentido negativo, para el problema exterior.* Vamos a considerar en lo ulterior que estas condiciones se cumplen.

33.2. Resolución del problema interior. Partimos de la propiedad bien conocida de las aplicaciones conformes de que la razón de longitudes de elementos lineales, correspondientes una a otra en la aplicación, es igual al módulo de la derivada de la función de aplicación. La longitud del elemento de arco en el contorno L_z ya está definida, siendo representada por la diferencial del parámetro ds. Sirviéndonos de las fórmulas de la geometría diferencial, determinamos con facilidad, a base de las ecuaciones (33.1), la longitud del elemento de la curva L_w

$$d\sigma = \sqrt{u'^2(s) + v'^2(s)}\, ds.$$

De aquí

$$\left|\frac{dw}{dz}\right| = \frac{d\sigma}{ds} = \sqrt{u'^2(s) + v'^2(s)}.$$

De este modo, el módulo de la derivada de la función $w = w(z)$, que aplica conformemente el dominio D_z^+ sobre D_w, se conoce como función del arco s. Ya que el contorno L_z es desconocido, la fórmula obtenida todavía no puede servir de fuente de la resolución del problema. Con el fin de obtener tal fórmula, pasemos a la función

inversa $z = z(w)$, considerando el contorno dado L_w en calidad del portador de los datos.

La igualdad $\sigma = \int_0^s \sqrt{u'^2 + v'^2}\, ds$ definirá σ como función monótona creciente de s. Al invertir la última obtendremos $s = s(\sigma)$. En este caso se tiene

$$\left|\frac{dz}{dw}\right| = \frac{1}{\sqrt{u'^2[s(\sigma)] + v'^2[s(\sigma)]}}. \tag{33.2}$$

Por lo tanto, en el contorno L_w sabemos el módulo de la derivada $\frac{dz}{dw}$ de la función que aplica conformemente el dominio D_w sobre el D_z^+.

De este modo hemos llegado al siguiente problema que se denomina *fundamental* en la teoría de los problemas de contorno inversos.

Hállese una función que es analítica en el dominio D_w y no se reduce en él a cero[1]), *partiendo de los valores de su módulo prefijados en el contorno.*

Este problema se reduce con facilidad al de Schwarz. El logaritmo del módulo de una función, que es analítica y no se reduce en el dominio a cero, es la función armónica que representa la parte real del logaritmo de la propia función analítica. Por consiguiente,

$$\ln \frac{dz}{dw} = -\frac{1}{2} S \ln \{u'^2[s(\sigma)] + v'^2[s(\sigma)]\} + i\alpha, \tag{33.3}$$

donde S es el operador de Schwarz para el dominio D_w, y α es una constante real arbitraria.

Potenciando e integrando a continuación, llegamos a la propia función $z(w)$. De este modo se puede obtener una solución completa del problema. No obstante, en la práctica resulta más cómodo operar con un dominio, para el cual está conocida la expresión explícita del operador de Schwarz, por lo cual se realiza previamente el paso del dominio D_w a cierto dominio estándar. Expondremos detalladamente este método de la resolución, al elegir a título del dominio estándar un círculo unitario.

Sea $w = w(\zeta)$ una función analítica que aplica conformemente el círculo unitario γ del plano ζ sobre el dominio D_w. Pasando al contorno, tendremos la igualdad

$$u(s) + iv(s) = w(e^{i\theta}).$$

Por ser biunívoca la correspondencia entre los puntos de los contornos L_w y γ, de la última igualdad se puede determinar s como función uniforme del ángulo polar θ

$$s = \omega(\theta). \tag{33.4}$$

[1]) Lo último se deduce de la exigencia de que la aplicación sea conforme.

Ahora podemos abandonar el plano w y resolver el problema de contorno inverso, tomando en consideración la correspondencia entre el plano z y el plano auxiliar ζ. Teniendo en cuenta que el ángulo polar equivale numéricamente a la longitud del arco del círculo unitario, en virtud de la propiedad ya utilizada de las aplicaciones conformes, tendremos

$$\left|\frac{dz}{d\zeta}\right| = \frac{ds}{d\theta} = \omega'(\theta).$$

Al tomar los logaritmos de ambos miembros, llegamos de nuevo al problema de Schwarz para la función $\ln\frac{dz}{d\zeta}$. El último se resuelve ahora mediante la integral de Schwarz

$$\ln\frac{dz}{d\zeta} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\omega'(\theta)\frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}\,d\theta + i\alpha = \chi(\zeta) + i\alpha.$$

Potenciando, obtenemos

$$\frac{dz}{d\zeta} = e^{i\alpha}e^{\chi(\zeta)},$$

de donde

$$z = f(\zeta) = e^{i\alpha}\int e^{\chi(\zeta)}\,d\zeta + C, \qquad (33.5)$$

donde C es una constante compleja arbitraria.

Introduciendo en la expresión para la función $f(\zeta)$ los valores del argumento $\zeta = e^{i\theta}$, obtendremos una ecuación paramétrica del contorno buscado en forma compleja

$$z = f(e^{i\theta}) = x(\theta) + iy(\theta).$$

Según muestra la fórmula (33.5), el dominio buscado se determina con la precisión hasta el movimiento (el parámetro α determina el giro, y C, el traslado paralelo). Una arbitrariedad consistente en la posibilidad de movimiento es natural y se desprende del planteamiento del problema. Vamos a considerar, por ello, como una solución todas las soluciones que se diferencian sólo en la posición del dominio.

Para establecer lo que el movimiento es la única arbitrariedad admitida por la solución del problema, es necesario al principio convenir en cómo entender que dos distintos contornos buscados llevan datos iguales. Tomemos por definición lo siguiente:

Se considera que los dos contornos L_z y L_{z_1} *llevan los datos iguales* $w(s)$, $w_1(s)$, si, realizándose una aplicación conforme de los dominios limitados por estos contornos, los valores de las funciones prefi-

jadas y los de sus derivadas son iguales en los puntos que corresponden en la aplicación uno al otro, es decir,

$$w(s) = w_1(s_1), \quad w'(s) = w_1'(s_1).$$

Supongamos ahora que dos contornos L_z y L_{z_1} son las soluciones del problema inverso y sea $z_1 = z_1(z)$ una función que realiza la aplicación conforme de los dominios limitados por estos contornos.

Al derivar la primera igualdad respecto a s, tenemos $w'(s) = w_1'(s_1)\frac{ds_1}{ds}$. De aquí, tomando en consideración que las derivadas son iguales, tendremos

$$\left|\frac{dz_1}{dz}\right| = \frac{ds_1}{ds} = 1$$

y, a continuación,

$$\ln\left|\frac{dz_1}{dz}\right| = 0, \quad \ln\frac{dz_1}{dz} = i\alpha, \quad z_1 = e^{i\alpha}z + C.$$

Por consiguiente, el contorno L_{z_1} puede ser obtenido de L_z mediante un movimiento, lo que se trataba de demostrar.

33.3. Otros métodos de la definición. En el problema examinado los valores de contorno de la función analítica se han definido como funciones de la longitud del arco del contorno buscado. Por esta definición ha sido determinado el método de resolución (la búsqueda del logaritmo del módulo de la derivada). Si a título del parámetro, que liga los prefijados valores de contorno u, v con el contorno buscado, tomamos otras magnitudes geométricas, por ejemplo, la abscisa u ordenada del contorno buscado, su radio-vector, el ángulo polar, etc., entonces los métodos de resolución serán distintos. Por una función de partida se debe tomar ya no el logaritmo de la derivada, sino una función analítica que se encuentra en relaciones más estrechas con el parámetro elegido.

Supongamos, por ejemplo, que el parámetro es la abscisa x,

$$u = u(x), \quad v = v(x).$$

Realizando la aplicación de D_w sobre el círculo $|\zeta| < 1$, y razonando igual que en lo anterior, determinemos la abscisa como función del ángulo polar θ, $x = x(\theta)$. Al tener en cuenta que $x = \operatorname{Re} z$, obtenemos

$$z = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\theta)\,\frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}\,d\theta + i\alpha.$$

El contorno L_z se determina aquí con la precisión hasta la traslación a lo largo del eje imaginario. Análogamente se resuelve el problema en que el parámetro está representado por la ordenada y. Si el pará-

metro es un radio-vector ρ o un ángulo polar θ, en calidad de la función de partida debe tomarse $\ln z$.

No nos fijemos aquí en la cuestión de superar las dificultades relacionadas con el hecho de que las representaciones de u, v en términos de los parámetros indicados serán, quizás, no unívocas[1]).

33.4. Resolución del problema exterior. En este caso cierto punto del dominio D_w debe pasar en el punto infinitamente alejado, razón por la cual la función de aplicación $z(w)$ ha de tener el polo en el dominio D_w. Debido a la exigencia de conformidad de la aplicación, este polo debe ser simple. De este modo, a diferencia de lo antecedente, en el caso dado debe buscarse una función que sea analítica en D_w, a excepción de un punto[2]), donde ésta posee el polo simple. Al igual que en el punto anterior, consideremos que se ha realizado la aplicación del dominio D_w sobre un círculo unitario del plano auxiliar ζ y s está calculado como función del ángulo polar θ

$$s = \omega(\theta).$$

Sea $F(\zeta)$ la función que realiza la aplicación conforme del círculo $|\zeta| < 1$ sobre D_z^-, y sea ζ_0 el punto que pasa en el punto infinitamente alejado. Entonces,

$$\left|\frac{dz}{d\zeta}\right| = |F'(\zeta)| = \omega'(\theta).$$

La función $F'(\zeta)$ tendrá en el punto ζ_0 el polo de segundo orden. Reduzcamos la búsqueda de $F'(\zeta)$ al caso de la función analítica, ya considerado por nosotros, empleando el procedimiento de eliminación de polos y ceros que está conocido en la teoría de funciones de la variable compleja.

La función $\frac{\zeta-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0\zeta}$ realiza, para ζ_0 arbitrario, la aplicación del círculo sobre sí mismo, a consecuencia de lo cual su módulo en el contorno es igual a la unidad.

Por consiguiente,

$$\varphi(\zeta) = \left(\frac{\zeta-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0\zeta}\right)^2 F'(\zeta)$$

será analítica en el círculo unitario y tendrá en el contorno del círculo el mismo módulo que tiene $F'(\zeta)$. De aquí, empleando las mismas designaciones y aprovechando los mismos razonamientos que en el punto 33.3, tendremos

$$\varphi(\zeta) = e^{i\alpha}e^{\chi(\zeta)}, \quad z = F(\zeta) = e^{i\alpha}\int\left(\frac{1-\bar{\zeta}_0\zeta}{\zeta-\zeta_0}\right)^2 e^{\chi(\zeta)}d\zeta + C. \qquad (33.6)$$

[1]) Véase M. T. Nuzhin 1)*.

[2]) En este caso se supone en adición que el dominio D_z^- consta de una hoja en el entorno del punto infinitamente alejado.

La última fórmula determina la función que, además del polo simple, tiene en el punto ζ_0 (en el caso general) también una singularidad logarítmica. La función obtenida será solución del problema planteado sólo en el caso en que tal singularidad esté ausente. Para ello es necesario y suficiente que el residuo de la función $\left(\frac{1-\overline{\zeta}_0\zeta}{\zeta-\zeta_0}\right)^2 \times$ $\times\, \varphi(\zeta)$ con respecto al punto ζ_0 sea nulo. Calculemos este residuo.

Al tomar los desarrollos en el entorno del punto ζ_0 de las funciones

$$(1-\overline{\zeta}_0\zeta)^2 = (|\zeta_0|^2-1)^2 + 2\overline{\zeta}_0(|\zeta_0|^2-1)(\zeta - \zeta_0) + \overline{\zeta}_0^2(\zeta-\zeta_0)^2,$$

$$\varphi(\zeta) = \varphi(\zeta_0) + \varphi'(\zeta_0)(\zeta-\zeta_0) + \ldots$$

y al multiplicarlos, llegamos a que el residuo buscado, que es igual al coeficiente de la primera potencia $(\zeta - \zeta_0)$ de este producto tendrá por expresión

$$c_{-1} = (|\zeta_0|^2-1)[2\overline{\zeta}_0\varphi(\zeta_0) + (|\zeta_0|^2-1)\varphi'(\zeta_0)].$$

Igualando este coeficiente a cero, encontramos que para la resolubilidad del problema exterior la coordenata compleja del polo ζ_0 debe satisfacer la ecuación

$$\frac{\varphi'(\zeta_0)}{\varphi(\zeta_0)} = \frac{2\overline{\zeta}_0}{1-|\zeta_0|^2}. \tag{33.7}$$

La resolubilidad del problema exterior quedará demostrada, si establecemos la resolubilidad de la última ecuación. Procedamos a esta demostración. Los razonamientos que se emplean con este objeto llevan un carácter algo artificial. Para orientar al lector, indiquemos que la primera mitad de los cálculos es análoga a los usados en la teoría de funciones analíticas de una hoja, cuando se demuestran los llamados teoremas de alteración.

Designemos $|\zeta_0| = r$. Multiplicando ambos miembros de la igualdad (33.7) por ζ_0 y aprovechando la identidad[1]) $r\frac{\partial}{\partial r} = \zeta_0\frac{\partial}{\partial\zeta_0}$, comuniquemos a la ecuación en investigación la forma siguiente

$$r\frac{\partial \ln\varphi}{\partial r} = \frac{2r^2}{1-r^2}$$

o bien

$$\frac{\partial}{\partial r}\ln|\varphi| + i\frac{\partial}{\partial r}\arg\varphi = \frac{2r}{1-r^2}.$$

---

[1]) Partimos de la igualdad $\zeta_0 = re^{i\theta}$ y tenemos en cuenta que, al pasar de la derivación respecto a r a la derivación respecto a ζ_0, el argumento θ se debe considerar constante.

El objeto de los razonamientos ulteriores consiste en reducir la ecuación compleja en consideración a un sistema de dos ecuaciones reales que expresen las condiciones del extremo de cierta función real.

Haciendo uso de una de las condiciones de Cauchy—Riemann en coordenadas polares $\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$, y tomando en consideración que

$$\frac{\partial}{\partial r}\ln(1-r^2) = \frac{-2r}{1-r^2}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta}\ln(1-r^2) = 0,$$

reduzcamos la condición investigada a la forma

$$\frac{\partial}{\partial r}\ln[(1-r^2)\,|\,\varphi\,|] - i\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\ln[(1-r^2)\,|\,\varphi\,|] = 0;$$

la última ecuación es equivalente al sistema de dos ecuaciones reales:

$$\frac{\partial}{\partial r}\ln[(1-r^2)\,|\,\varphi\,|] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta}\ln[(1-r^2)\,|\,\varphi\,|] = 0, \qquad (33.8)$$

que representa una condición necesaria para el extremo de la superficie

$$t = \Phi(r,\ \theta) = \ln[(1-r^2)\ |\ \varphi(r,\ \theta)\ |].$$

Así, pues, para demostrar la resolubilidad de la ecuación (35.7), basta establecer que la función $\Phi(r, \theta)$ alcanza su extremo dentro del círculo unitario. Y no es difícil hacerlo. En efecto, como $u'(s)$, $v'(s)$ pertenecen, por hipótesis, a la clase H, resulta fácil concluir que también $\omega'(s)$ y, consecuentemente, $\ln \omega'(s)$ no pueden sino satisfacer la condición de Hölder. De aquí, en vista de las propiedades de la integral de Schwarz, las condiciones de frontera $\varphi(\zeta)$ satisfarán también la condición H, y, por lo tanto, serán acotadas. De aquí

$$\lim_{r\to 1}(1-r^2)\,|\,\varphi\,| = 0, \quad \lim_{r\to 1}\ln[(1-r^2)\,|\,\varphi\,|] = -\infty.$$

En la circunferencia de radio $r = 1 - \varepsilon$, para ε suficientemente pequeño, $\Phi(r, \theta)$ tomará valores negativos tan grandes, en su magnitud absoluta, como se quiera. Por ser $\Phi(r, \theta)$ acotada en el interior del círculo, su cota superior, que se alcanza en el círculo cerrado, no puede ser alcanzada en el contorno. Por consiguiente, esta cota superior, que representa el máximo de la función, se alcanza en el interior del círculo. De aquí se deduce que las ecuaciones (33.8) y, por lo tanto, la ecuación de partida (33.7) se satisfacen, lo que se trataba de demostrar.

33.5. Sobre el número de soluciones del problema exterior. Si ζ_0—raíz de la ecuación (33.7)—es un número determinado, entonces, según lo muestra la fórmula (33.6), el problema exterior admite la

misma arbitrariedad en forma de un movimiento que el interior es decir, de acuerdo con la hipótesis, tendrá la única solución. Consecuentemente, la cuestión sobre el número de soluciones del problema exterior se reduce a la investigación de la cantidad de soluciones de la ecuación (33.7). La última es, en el caso general, trascendente y no se logra efectuar su investigación completa. Sin embargo, se ha establecido un hecho fundamental de que su solución puede ser no la única. Esto fue probado por V. S. Rogozhin 4)* con un ejemplo siguiente.

Sea el dominio D_w un círculo unitario definido por las ecuaciones

$$u = \cos\theta, \quad v = \operatorname{sen}\theta, \quad \theta = \theta(s),$$
$$0 \leqslant s \leqslant l, \quad 0 \leqslant \theta(s) \leqslant 2\pi,$$

con la particularidad de que la función $\theta(s)$ está dada por la ecuación diferencial

$$\frac{d\theta}{ds} = e^{\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{a}}, \quad 0 < a < 1.$$

Aquí, el mismo dominio D_w es estándar, de suerte que el problema para él puede resolverse en seguida, sin recurrir a la aplicación auxiliar.

Sea $z = F(w)$ una función que realiza la aplicación conforme del círculo D_w sobre el dominio D_z. En este caso tendremos

$$|F'(w)| = \left|\frac{dz}{dw}\right| = \frac{ds}{d\theta} = e^{-\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{a}}.$$

De aquí

$$\ln|\varphi(w)| = \ln\left|\left(\frac{w-w_0}{1-\bar{w}_0 w}\right)^2 F'(w)\right| = -\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{a}.$$

El miembro derecho es un valor de contorno de la parte real de la función $i\frac{w^2}{a}$. Por consiguiente

$$\varphi(w) = \left(\frac{w-w_0}{1-\bar{w}_0 w}\right)^2 F'(w) = e^{i\alpha} e^{\frac{iw^2}{2}}.$$

De aquí, según las fórmulas (33.6),

$$z = F(w) = e^{i\alpha}\int\left(\frac{1-\bar{w}_0 w}{w-w_0}\right)^2 e^{\frac{iw^2}{a}}\,dw + C. \qquad (33.6')$$

La imagen del punto infinitamente alejado w_0 se determinará de la ecuación (33.7), la cual tomará la forma

$$i\frac{w_0}{a} = \frac{\bar{w}_0}{1-|w_0|^2}.$$

Haciendo $w_0 = re^{i\beta}$, llegaremos a un sistema de dos ecuaciones:

$$r\,(1 - r^2)\cos 2\beta = 0,$$
$$r\,[(1 - r^2)\operatorname{sen} 2\beta + a] = 0.$$

Este sistema se satisface con tres valores de w_0, dispuestos dentro del círculo:

$$w_0 = 0,\quad w_0^* = \sqrt{1-a}\,e^{-\frac{\pi}{4}i},\quad w_0^{**} = -\sqrt{1-a}\,e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

(despreciamos las raíces $\pm\sqrt{1+a}\,e^{\frac{\pi}{4}i}$).

Al introducir estos valores de w_0 en la fórmula (33.6), obtendremos tres soluciones del problema, las cuales denotaremos con F, F^*, F^{**}, respectivamente. Ahora queda por demostrar que estas soluciones son esencialmente distintas. Ya se ha mencionado que los contornos que sólo se diferencian en su posición en el plano corresponden a una solución del problema de contorno inverso. Es esidente, además, que una transformación conforme del círculo $|w| < 1$ en sí mismo tampoco cambia la solución.

Demostremos que F, F^* no pueden satisfacer la identidad

$$F^*(w) = e^{i\beta}F\left(\frac{w-b}{1-\bar{b}w}\right) + C.$$

Derivando la última expresión y tomando en consideración (33.6') y también que $w_0 = 0$, obtendremos

$$\left(\frac{1-w_0^*w}{w-w_0}\right)^2 e^{i\frac{w^2}{a}} = e^{i\beta}\left(\frac{1-\bar{b}w}{w-b}\right)^2 e^{\frac{i}{a}\left(\frac{w-b}{1-\bar{b}w}\right)^2}\frac{1-|b|^2}{(1-\bar{b}w)^2}$$

o

$$e^{\frac{i}{a}\left[w^2-\left(\frac{w-b}{1-\bar{b}w}\right)^2\right]} = e^{i\beta}\left(\frac{w-w_0^*}{1-\bar{w}_0^*w}\right)^2\left(\frac{1-\bar{b}w}{w-b}\right)\frac{1-|b|^2}{(1-\bar{b}w)^2}.$$

Como a la izquierda figura una función transcendental y a la derecha, una racional, entonces, cualquiera que sea la elección de b ($|b| < 1$) para a prefijado ($0 < a < 1$), la última identidad no puede cumplirse. De una manera análoga se puede demostrar una diferencia esencial que existe entre las dos soluciones consideradas y la tercera solución. De este modo, en el ejemplo examinado el problema de contorno inverso exterior tiene tres soluciones esencialmente distintos. Por consiguiente, la solución de este problema puede resultar no única.

33.6. Acerca del problema de Schwarz con la singularidad logarítmica en el contorno. Al resolver el problema de Schwarz se suponía que la parte real definida en el contorno satisface la condición de Hölder. En lo sucesivo nos encontraremos con el caso en que dicha

parte pueda poseer unas singularidades de carácter logarítmico. Empezaremos con la investigación de un caso particular. Examinemos el valor de contorno de una función que es analítica en el círculo unitario $|\zeta| < 1$

$$\varphi(\zeta) = \ln(\zeta - \zeta_0) = \ln(\zeta - e^{i\theta_0}).$$

Tendremos

$$\varphi(e^{i\theta}) = \ln(e^{i\theta} - e^{i\theta_0}) = \ln\left[e^{i\frac{\theta+\theta_0}{2}}\left(e^{i\frac{\theta-\theta_0}{2}} - e^{-i\frac{\theta-\theta_0}{2}}\right)\right] =$$

$$= \ln\left[ie^{i\frac{\theta+\theta_0}{2}} \cdot 2\operatorname{sen}\frac{\theta-\theta_0}{2}\right] = \ln\left|2\operatorname{sen}\frac{\theta-\theta_0}{2}\right| + i\gamma.$$

donde

$$\gamma = \begin{cases} \dfrac{\theta+\theta_0+\pi}{2} & \text{para} \quad \theta > \theta_0, \\ \dfrac{\theta+\theta_0+3\pi}{2} & \text{para} \quad \theta < \theta_0. \end{cases}$$

De aquí se deduce que de solución del problema de Schwarz en el clase de funciones, provistas de singularidades logarítmicas en el contorno, cuando el valor de contorno de la parte real es $u(\theta) = \ln\left|2\operatorname{sen}\frac{\theta-\theta_0}{2}\right|$, sirve la función

$$\varphi(\zeta) = \ln(\zeta - \zeta_0) + i\alpha.$$

La unicidad de la solución obtenida en la clase que se considera se establece por la demostración de que el problema homogéneo que sigue está privado de soluciones que sean distintas de la constante imaginaria:

Hállese la función analítica en un círculo unitario (en el contorno pueden haber unas singularidades logarítmicas), cuya parte real en el contorno sea nula.

La función buscada aplica una circunferencia unitaria en el eje imaginario. Por consiguiente, en este caso puede ser usado el principio de simetría. Al hacer prolongar por simetría la función buscada al exterior del círculo, obtendremos una función analítica en todo el plano, a excepción de algunos puntos aislados, en los cuales son posibles singularidades logarítmicas. Dado que la exigencia de uniformidad de la función subsiste, ella debe necesariamente tener cortes que unen los supuestos puntos logarítmicos de ramificación. Pero, por ser la función analítica (y, consecuentemente, continua), los cortes son imposibles, razón por la cual las singularidades supuestas son eliminables. La función es analítica en todo el plano; en virtud

del teorema de Liouville, ella es una constante la cual, obviamente, será puramente imaginaria. Con esto queda establecida la unicidad [1]).

Si la parte real de la función buscada está definida en forma de la suma

$$u(\theta) = \ln\left|2\operatorname{sen}\frac{\theta-\theta_0}{2}\right| + u_0(\theta),$$

donde $u_0(\theta)$ es una función que satisface la condición de Hölder, entonces, al sustraer de la función buscada la integral de Schwarz de densidad $u_0(\theta)$, llegamos al caso considerado.

Al tomar en consideración que la función

$$\ln\left|2\operatorname{sen}\frac{\theta-\theta_0}{2}\right| - \ln|\theta-\theta_0| = \ln\left|\frac{2\operatorname{sen}\frac{\theta-\theta_0}{2}}{\theta-\theta_0}\right|$$

es analítica en el entorno del punto $e^{i\theta_0}$ y, por lo tanto, satisface la condición de Hölder, llegamos a que si el valor de contorno de la parte real de la función analítica buscada está representado en forma de una suma $\ln|\theta-\theta_0| + u_0(\theta)$, entonces la solución tendrá por expresión[2]) $\ln(\zeta-\zeta_0) + \varphi_0(\zeta)$, donde φ_0 es acotada en ζ_0.

33.7. Puntos singulares del contorno. Las condiciones impuestas sobre las funciones definidas $u(s)$, $v(s)$ — 1) su pertenencia a la clase de Hölder, 2) la ausencia en ellas de ceros comunes—aseguran la suavidad del contorno buscado L_z (esto es, para ser más preciso, la pertenencia del contorno a la clase de las curvas de Liapunov). Si alguna de estas condiciones no se cumple, la suavidad del contorno será perturbada, es decir, L_z, en el caso general, tendrá ciertas singularidades. Investiguemos el carácter de éstas suponiendo que la segunda condición está violada. Supondremos que las funciones dadas se desarrollan en el entorno del punto examinado según la fórmula de Taylor.

Supongamos que u, v están definidas mediante los siguientes desarrollos:

$$\begin{aligned} u &= (s-s_0)^p\,[u_0 + (s-s_0)\,a(s)], \\ v &= (s-s_0)^p\,[v_0 + (s-s_0)\,b(s)], \end{aligned} \tag{33.9}$$

[1]) Este razonamiento sigue siendo válido también en el caso en que en lugar de las singularidades logarítmicas se consideran admisibles unas singularidades potenciales de orden inferior a la unidad, y asimismo el producto de la potencia de orden inferior a la unidad por el logaritmo. Mas, la generalización ulterior resulta imposible. Si en el contorno se admiten unas singularidades polares, entonces existen funciones, distintas de cero, cuya parte real en el contorno se reduce a cero. A título de un ejemplo pueden servir la función $1 - \frac{2}{z}$, analítica dentro de la circunferencia definida por la ecuación $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

[2]) Haciendo uso de la aplicación conforme, el resultado puede ser extendido al caso de cualquier contorno cerrado.

donde u_0, v_0 son unas constantes que no se reducen a cero simultáneamente, mientras que $a(s)$, $b(s)$ tienen derivadas que satisfacen la condición de Hölder.

Del curso de la geometría diferencial sabemos que si p es impar, el origen de coordenadas ($s = s_0$) será un punto ordinario del contorno L_w; si, en cambio, p es par, tendremos un punto de retroceso. En el último caso se deben distinguir dos posibilidades, cuando el ángulo es nulo o igual a 2π. Examinemos esquemáticamente todos los casos.

1. PUNTO ORDINARIO DE CONTORNO L_w. Supongamos que la función $w = w(\zeta)$ aplica conformemente el círculo $|\zeta| < 1$ sobre el dominio D_w, con la particularidad de que al valor s_0 le corresponde el valor del ángulo θ_0 ($\zeta_0 = e^{i\theta_0}$). En el entorno de ζ_0 la función de aplicación tiene la forma

$$w(\zeta) = (\zeta - \zeta_0)\, w_1(\zeta), \quad w_1(\zeta_0) \neq 0. \tag{33.10}$$

De la correlación en el contorno $|u(s) + iv(s)| = |w(e^{i\theta})|$, al tener en cuenta (33.9) y (33.10), obtendremos

$$|s - s_0|^p \varphi(s) = |\theta - \theta_0| \psi(\theta), \quad \varphi(s_0) > 0,$$
$$\psi(\theta_0) > 0$$

o bien, al extraer la raíz,

$$|s - s_0| \sqrt[p]{\varphi(s)} = |\theta - \theta_0|^{\frac{1}{p}} \sqrt[p]{\psi\theta}.$$

Aplicando la teoría de funciones implícitas, se puede obtener la siguiente correlación

$$\frac{ds}{d\theta} = |\theta - \theta_0|^{\frac{1}{p}-1} \psi_1(\theta), \quad \psi_1(\theta_0) > 0,$$

donde $\psi_1(\theta)$ satisface la condición de Hölder. De aquí

$$\ln\left|\frac{dz}{d\zeta}\right| = \ln\frac{ds}{d\theta} = \left(\frac{1}{p} - 1\right)\ln|\theta - \theta_0| + \psi_2(\theta).$$

De acuerdo con los resultados del p. 33.6, tendremos

$$\ln\frac{dz}{d\zeta} = \left(\frac{1}{p} - 1\right)\ln(\zeta - \zeta_0) + X_0(\zeta).$$

De aquí

$$z = (\zeta - \zeta_0)^{-\frac{1}{p}} F(\zeta).$$

De la última expresión y de las propiedades de una aplicación conforme se desprende que el contorno L_z tiene, para $\theta = \theta_0$, un punto angular de ángulo equivalente a π/p.

2. PUNTO DE RETROCESO DE ÁNGULO 2π. La función que aplica el círculo unitario sobre el dominio D_w tiene en el entorno de ζ_0 la si-

guiente expresión: $w = \omega(\zeta) = (\zeta - \zeta_0)^2 \cdot \omega_1(\zeta)$ $(\omega_1(\zeta_0) \neq 0)$. De aquí

$$\omega(e^{i\theta}) = (\theta - \theta_0)^2 \psi(\theta), \quad (\psi(\theta_0) \neq 0).$$

Mediante unas operaciones análogas a las usadas en el caso antecedente, se obtiene

$$\frac{ds}{d\theta} = |\theta - \theta_0|^{\frac{2}{p}-1} f(\theta) \quad (f(\theta_0) > 0).$$

$$z = (\zeta - \zeta_0)^{\frac{2}{p}} F(\zeta) \quad (F(\zeta_0) \neq 0).$$

De lo último se deduce que el punto considerado del contorno L_z es un punto angular de ángulo $2\pi/p$. Si, en el caso particular, $p = 2$, el punto angular se convierte en un punto ordinario.

3. PUNTO DE RETROCESO DE ÁNGULO NULO. La función de aplicación tiene por expresión

$$\omega(\zeta) = \frac{c}{\ln(\zeta - \zeta_0) + c_0 + \varphi(\zeta)}.$$

Omitiendo las investigaciones que aquí resultan mucho más complicadas en comparación con los dos casos considerados, indiquemos que el contorno buscado tiene en el punto de investigación un punto de retroceso. Los detalles el lector puede encontrarlos en la obra de F. D. Gájov e I. M. Mélnik 1)*. En esta obra se han investigado también los casos en que la función dada tiene ciertas singularidades de carácter elemental.

EJEMPLO

$$\begin{aligned} u &= u(s) = a \cos s (1 + \cos s), \\ v &= v(s) = a \operatorname{sen} s (1 + \cos s) \end{aligned} \qquad 0 \leqslant s \leqslant 2\pi.$$

El contorno L_w es una cardioide.

Se tiene $u'(\pi) = v'(\pi) = 0$. El desarrollo en el entorno de $s = \pi$ tiene por expresión

$$u(s) = (s - \pi)^2 \left[-\frac{a}{2} + \alpha(s) \right], \quad v(s) = (s - \pi)^3 \beta(s).$$

Aquí $p = 2$. El origen de coordenadas $(s = \pi)$ es un punto de retroceso de ángulo 2π [1]).

El contorno buscado L_z tendrá aquí un punto angular de ángulo $\frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{2} = \pi$, es decir, un punto ordinario.

---

[1]) Lo último puede ser establecido también por análisis del desarrollo de $u(s)$, $v(s)$ en el entorno de $s = \pi$ (F. D. Gájov e I. M. Mélnik 1)*).

El contorno buscado L_z puede encontrarse mediante unos razonamientos elementales. La función $w = w(\zeta) = \frac{a}{2}(\zeta+1)^2$ aplica el círculo unitario sobre el interior de la cardioide. En la frontera vamos a tener

$$u(s)+iv(s)=w(e^{i\theta}),\ ae^{is}(1+\cos s)=\frac{a}{2}(e^{i\theta}+1)^2.$$

De aquí tenemos

$$s=\theta,\ \left|\frac{dz}{d\zeta}\right|=\frac{ds}{d\theta}=1,\quad \ln\frac{dz}{d\zeta}=e^{i\alpha},$$

$$z=z(\zeta)=e^{i\alpha}\zeta+C.$$

La última transformación es un movimiento. Por consiguiente, el contorno L_z es también una circunferencia unitaria.

33.8. Sobre la univalencia de la solución. El requisito impuesto por el planteamiento del problema en el sentido de que la aplicación del dominio D_z sobre D_w sea conforme, excluye los ceros de la derivada de la función de aplicación y, consecuentemente, excluye los puntos de ramificación. Pero, no lleva a que la aplicación sea univalente. Por hipótesis, el contorno L_w es simple y el dominio D_w es univalente, no obstante, la función $z(w)$, que se obtiene como resultado de resolverse el problema de contorno inverso, puede resultar no univalente. En este último caso el contorno L_z será no simple, sino tendrá puntos múltiples.

Aclaremos esto con un ejemplo. Como base se toma una aplicación conocida realizada por la función exponencial $z = e^w$.

Supongamos que en el plano w está definido un círculo

$$u = a\cos\theta,\quad v = a\,\text{sen}\,\theta,$$

donde $\theta = \theta(s)$ se da por la ecuación

$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{a}e^{-a\cos\theta}\quad(\theta(0)=0).$$

Se tiene

$$d\tau = a\,d\theta,\ \left|\frac{dz}{dw}\right|=\frac{ds}{d\sigma}=\frac{1}{a}\frac{ds}{d\theta}=e^{a\cos\theta},$$

$$\ln\left|\frac{dz}{dw}\right|=a\cos\theta=\operatorname{Re}w.$$

De aquí

$$\ln\frac{dz}{dw}=w+i\alpha,\quad \frac{dz}{dw}=e^{i\alpha}e^{w},$$

$$z=e^{i\alpha}e^{w}+C.$$

Dispongamos los ejes de coordenadas en el plano z de una manera tal que sea $\alpha = 0$, $C = 0$. Entonces, la función, que aplica D_w sobre

D_z, tomará la forma $z = e^w$. Al hacer en la última ecuación $w = a \cos\theta + ia \operatorname{sen}\theta$, obtendremos una ecuación paramétrica del contorno buscado L_z en coordenadas de Descartes

$$x = e^{a\cos\theta} \cos(a \operatorname{sen}\theta),$$

$$y = e^{a\cos\theta} \operatorname{sen}(a \operatorname{sen}\theta), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

La ecuación paramétrica de la misma curva en coordenadas polares puede ser escrita en la forma

$$\rho = e^{a\cos\theta}, \quad \varphi = a \operatorname{sen}\theta.$$

La construcción del contorno resulta más fácil, si se realiza a base de la última ecuación. La forma de la curva L_z dependerá considerablemente de la magnitud a, radio del círculo definido en el plano w. Si $a < \pi$, la función $z = e^w$ aplica el círculo de modo univalente y

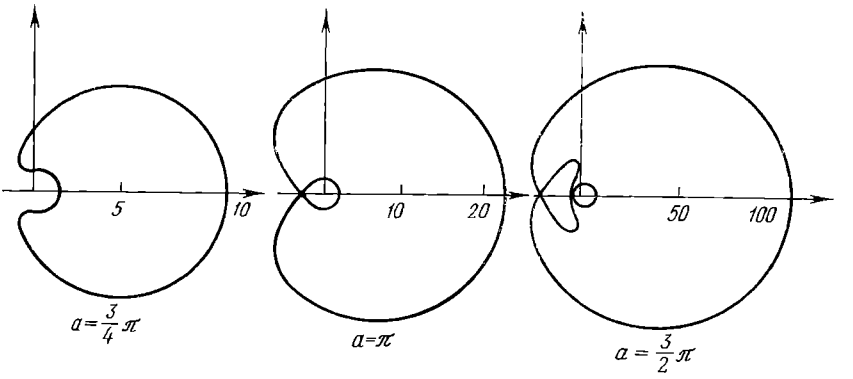


Fig. 14

el contorno L_z será simple; cuando $a > \pi$, la aplicación será multivalente y L_z tendrá puntos múltiples. En el caso de frontera, cuando $a = \pi$, el contorno L_z tiene un punto de osculación (se llama también tacnodo).[1]) En la fig. 14 está dibujado el contorno L_z para tres casos de radio $a = \frac{3}{4}\pi$, π, $\frac{3}{2}\pi$. Recomendamos que el lector realice esta construcción.

En todas las aplicaciones conocidas de los problemas de contorno inversos se necesitan contornos sin puntos múltiples. Con este motivo

[1]) Este resultado puede deducirse de las propiedades geométricas de la función e^w, las cuales están bien conocidas. La función aplica de modo univalente la banda $-\pi < \operatorname{Im} w < \pi$ sobre un plano con corte a lo largo del semieje real negativo. Si el dominio D_w se dispone enteramente en el interior de dicha banda, la aplicación será univalente y L_z, simple. En el caso contrario la aplicación es multivalente y L_z tiene puntos múltiples.

surge un problema de importancia: indicar los criterios de univalencia de la aplicación los cuales se expresen en términos de las funciones prefijadas $u(s)$, $v(s)$ con la mayor sencillez posible. La resolución de este problema se apoya en la teoría sobre la univalencia de la aplicación conforme; esta teoría sale de los márgenes de este libro, por lo cual no nos profundizamos en los pormenores de esta cuestión importante. Demos a conocer sólo algunos resultados.

Los criterios existentes actualmente de que la solución de los problemas de contorno inversos es univalente se refieren no a las funciones originalmente definidas $u(s)$, $v(s)$, sino a la función «reducida» $P(\theta) = \ln \frac{dz}{d\zeta}$. Suponiendo que la última satisface la condición de Lipschitz $|P(\theta_1) - P(\theta_2)| < N|\theta_1 - \theta_2|$, se indican las fronteras admisibles de la constante N.

El primer criterio suficiente de univalencia fue indicado por I. S. Krasnovídova y V. S. Rogozhin 1)*:

Para que la solución de un problema de contorno inverso interior sea univalente, es suficiente que se cumpla la condición $N \leqslant \frac{\pi}{4 \ln 2}$.

Ulteriormente varios autores (F. G. Avjadíev, L. A. Axéntiev, V. N. Gaiduk, S. N. Kudriaschov, V. S. Rogozhin) han expuesto diferentes formas de los criterios para la univalencia de las soluciones de los problemas de contorno inversos interior y exterior, empleando los diversos criterios referentes a la univalencia de la aplicación conforme.

Se ha planteado la cuestión acerca de la necesidad de encontrar tal constante $N_0^{\pm}$ en la condición de Lipschitz que, para $N < N_0^{\pm}$, la solución del problema de contorno inverso interior (exterior) sea univalente, y, para $N \geqslant N_0^{\pm}$, exista por lo menos una función tal que la solución no sea univalente. Actualmente se han obtenido las siguientes acotaciones[1]):

$$1{,}73\ldots = \sqrt{3} < N_0^{+} < 2{,}69\ldots,$$

$$0{,}88\ldots = \frac{4 \ln 2}{\pi} < N_0^{-} < 1{,}30\ldots$$

La cuestión acerca del grado de precisión de las acotaciones todavía no se ha resuelto. Además, se debe tener en cuenta que aquí, como en general suele suceder en el caso de acotaciones útiles para toda la clase de funciones, incluso una acotación absolutamente exacta puede resultar aproximada, cuando ella se aplica para un representante de la clase por separado.

---

[1]) La acotación izquierda para el problema interior fue dada por F. G. Avjadíev y V. N. Gaiduk 1)*; la derecha, por V. N. Gaiduk 1)*. Para el problema exterior las acotaciones izquierda y derecha se han indicado por L. A. Axéntiev, F. G. Avjadíev 1)* y S. N. Kudriaschov 1)*, respectivamente.

Para una serie de los problemas prácticos se indican los criterios de univalencia especiales más exactos en comparación con los que se obtienen de la teoría general.

33.9. Algunos problemas adicionales. Expondremos brevemente, además, los siguientes tres problemas importantes de la teoría en consideración.

1°. APLICACIONES. La teoría de problemas de contorno inversos se utiliza para construir contornos que posean las propiedades prefijadas con anticipación. Las aplicaciones que se conocen actualmente pertenecen principalmente a la hidromecánica. El problema fundamental de ésta consiste en la construcción del contorno según la distribución prefijada de velocidad en el flujo de líquido ideal. La principal aplicación técnica se reduce a la obtención de un perfil aéreo según la distribución prescrita de presiones.

Partiendo de la magnitud de velocidad se puede determinar por integración la potencial del flujo $\varphi(s)$. El perfil contorneado representa una línea de corriente y por esta razón la función de corriente en él es constante, $\psi = \text{const}$ (se puede tomar esta constante igual a cero). Por consiguiente, en el contorno buscado sabemos el valor de contorno de la función característica del flujo $w = \varphi + i\psi$. El contorno L_w aquí es siempre un segmento del eje Ox. Al aplicar el plano cortado a lo largo de este segmento sobre el exterior del círculo unitario, llegan al problema de contorno inverso de tipo $D\zeta$, $\overline{Dz}$.

Los flujos existentes en realidad son turbulentos. Por ello, el problema de contorno inverso (correspondiente al problema mecánico mencionado) en su planteamiento matemático consiste en la búsqueda de una función, analítica en $\overline{D\zeta}$, que en un punto infinitamente alejado tenga una singularidad logarítmica. Esto introduce en las investigaciones unas complicaciones considerables. Para el indicado problema particular se logra superar todas las dificultades y obtener una solución completa. La complicación ulterior del planteamiento (la admisión de que en el flujo o en el contorno buscado hay fuentes o torbellinos) conduce a un planteamiento más general del problema de contorno inverso. Las dificultades teóricas que se encuentran aquí son enormes y hasta ahora no están superadas (véase más abajo).

No tocamos en este libro otras aplicaciones prácticas. A los lectores que revelan interés por ellas, les recomendamos la obra [27], en la cual se exponen todas las aplicaciones de los problemas de contorno inversos, acompañadas de la literatura referente a la cuestión.

2°. GENERALIZACIONES DE CARÁCTER FUNCIONAL. El planteamiento del problema de contorno inverso, considerado más arriba, aseguraba la existencia de soluciones continuas hasta el contorno (las singularidades, admitidas en el p. 33.7, se han investigado cada una por separado). Resulta natural levantar la pregunta ¿ para qué suposiciones más amplias respecto a las funciones prefijadas $u(s)$, $v(s)$, queda en vigor el planteamiento del problema y el esquema utilizado de la resolución?. La investigación se apoya en los métodos de la teoría de funciones de una variable real. Demos a conocer los resultados.

La teoría de aplicación conforme dice que la clase más general $u(s)$, $v(s)$, para la cual resulta posible el planteamiento del problema en el sentido del p. 33.1, es la clase de funciones absolutamente continuas. Para poder aplicar en la resolución del problema el aparato matemático, nos vemos obligados a imponer, además, dos restricciones adicionales: 1) $u'(s)$ y $v'(s)$ tienen derivadas acotadas en casi todo punto; 2) el conjunto de puntos, donde $u'(s)$, $v'(s)$ se reducen a cero simultáneamente, tiene medida cero. Las condiciones indicadas son suficientes para demostrar la resolubilidad del problema de contorno inverso.

Con el planteamiento del problema tan amplio se debe tomar en consideración el hecho de que en la solución puede figurar el factor adicional $e^{\gamma(\zeta)}$, donde

$$\gamma'(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,d\psi(\theta),$$

$\psi(\theta)$ es la llamada función singular (no creciente, cuya derivada es igual a cero en casi todo punto). Por ello, el teorema de unicidad del problema de contorno inverso interior, demostrado en el p. 33.1, ya no subsiste aquí, siempre que sobre el contorno buscado L_z no se imponen las restricciones adicionales. La unicidad puede ser conservada al limitar la clase de contornos buscados con las curvas de V. I. Smirnóv [1]).

El lector, que tiene interés por las generalizaciones de carácter funcional, puede referirse para los pormenores a las obras de F. D. Gájov 3), 4)*, de donde se han extraído los resultados enunciados (véase también S. N. Andriánov 1)*).

3° SOBRE EL PLANTEAMIENTO GENERAL DEL PROBLEMA DE CONTORNO INVERSO. El planteamiento del problema, tal como se expone en el p. 33.1, cuando se requiere hallar una función que da una aplicación conforme de los dominios y, por lo tanto, se excluyen por completo los puntos de ramificación y de todas las singularidades sólo puede ser admisible el polo simple (en el caso de un problema exterior), es elemental. La práctica nos ofrece los problemas de mayor complejidad. El problema inverso de la hidromecánica, según se ha mostrado anteriormente, en su caso más simple conduce a la búsqueda de una función con la singularidad logarítmica en el dominio. Sus planteamientos generalizados exigirán una solución en la clase de funciones con cualquier número de puntos singulares logarítmicos y polares. La teoría topológica de las funciones de una variable compleja enseña que una función analítica que tiene en el dominio el número determinado de singularidades logarítmicas y polares y cuyos valores de contorno están prefijados, posee en el dominio el número precisamente determinado de puntos de ramificación. Las fórmulas correspondientes se han obtenido en la obra de F. D. Gájov y Yu. M. Krikunov 1)*. En este caso ya no puede exigirse que el contorno prefijado L_w sea simple. El dominio D_w se dispondrá en cierta superficie de Riemann y el contorno L_w en ella será simple, mientras que su proyección sobre un plano tendrá, en general, puntos múltiples.

Enunciaremos, ahora, el problema de contorno inverso en una forma general [2]). Sean dadas 2ν funciones de parámetro s

$$u=u_k(s),\quad v=v_k(s),\quad 0\leqslant s\leqslant l_k\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu),$$

que definen en el plano de la variable compleja w ν curvas L_{kw} (con puntos múltiples, en el caso general). Hállese, en el plano de la variable compleja z, ν curvas cerradas L_{kz}, que limitan cierto dominio finito D_z^+ multivalente, en el caso general, pero privado de puntos de ramificación) de un modo tal que, al tomar el parámetro s por la longitud del arco del contorno buscado $L_z=L_{1z}+L_{2z}+\ldots+L_{\nu z}^+$, la expresión $w(s)=u_k(s)+iv_k(s)$ sea el valor de contorno en el contorno L_{kz} de la función $w=f(z)$, analítica en el dominio D_z^+, a excepción de unos puntos, donde ella puede tener singularidades de tipo prescrito (las logarítmicas o polares) con la parte principal prefijada.

---

[1]) *La curva de Smirnov* es una curva cuyo logaritmo del módulo de la derivada de una función, que aplica conformemente el dominio limitado por ella sobre un círculo, puede ser representado por una integral de Poisson en términos de sus valores de frontera (véase [18], pág. 250).

[2]) Sobre la solución del problema de contorno inverso para un dominio multiplemente conexo véase el § 38.

El número de preimágenes de los puntos de ramificación (los puntos, donde $f'(z) = 0$), según lo indicado anteriormente, se determina mediante fórmulas proporcionadas por la teoría topológica, por lo cual también debe considerarse conocido.

La solución del problema general enunciado no existe actualmente. Unos casos particulares que se encontraban en las aplicaciones prácticas se resolvían a base de los razonamientos mecánicos sin argumentación matemática, lo que fue reflejado en la obra ya mencionada [27].

Indiquemos esquemáticamente los problemas teóricos fundamentales que se encuentran en el camino hacia la resolución del problema general.

El problema principal consiste en la construcción de aquella superficie de Riemann en la cual los contornos, definidos por las ecuaciones $u = \varphi_k(s)$, $v = \psi_k(s)$, determinan un dominio semejante al univalente, esto es, tal dominio que pueda ser aplicado de una manera conforme y biunívoca (en todos los puntos, salvo los de ramificación) sobre cierto dominio univalente estándar, por ejemplo, sobre un plano con cortes rectilíneos o con círculos excluidos. Están dados un contorno, definido por los valores de contorno de la función buscada, el número y carácter de singularidades, el númsro de puntos de ramificación con sus multiplicidades respectivas. Nos esperan las siguientes dificultades en el camino hacia la solución: 1) la determinación del número y carácter de las singularidades prefijadas (y, correspondientemente, del número de puntos de ramificación), admisibles para los valores de contorno dados; 2) la disposición admisible de las singularidades y de los puntos de ramificación, para los cuales el contorno prefijado l_w puede hacerse el de un dominio semejante al univalente; 3) el número de dominios esencialmente distintos que aparecen cuando se emplean diferentes métodos de sujeción de las hojas. Lo último está ligado con el número de soluciones del problema de contorno inverso.

§ 34. Notas históricas

El problema de contorno de Hilbert, que a la par con el de Riemann examinado en el capítulo II, pertenece a los problemas de contorno fundamentales de funciones analíticas, es un problema más antiguo entre todos los problemas de este tipo. Fue primero en ser planteado, elaborado y resuelto con la obtención de una solución completa. Lo mismo puede decirse también sobre el tiempo de las primeras aplicaciones teóricas (a la investigación de ecuaciones integrales singulares) y prácticas (a la resolución de los problemas hidrodinámicos), como también del tiempo cuando se iniciaron distintas generalizaciones.

El primer planteamiento del problema de Hilbert puede ser relacionado con la obra de Riemann [21] «Fundamentos de la teoría general de funciones» (1851). En el apartado XIX, hablando de los métodos posibles de definir la función analítica en un dominio, él indica que en lugar de prefijar en el contorno su parte real (lo que conduce a la resolución del problema de Dirichlet) se puede definir una cierta correlación entre las partes real e imaginaria de la función. Este es el planteamiento más general del problema de contorno de este tipo.

Con el fin de justificar la circunstancia de que el problema (27.7) (de Hilbert), examinado en el presente capítulo, se atribuye en menor grado al nombre de Riemann [1]) que el problema (14.1) cap. II (de Riemann), se debe indicar sin ambigüedades que la cuestión sobre la búsqueda verdadera de la función analítica según una correlación, prefijada en el contorno, entre sus partes real e imaginaria de ninguna manera se proponía por Riemann como un problema práctico para la resolución. Se trataba aquel entonces sólo de los métodos de

[1]) Algunos autores lo llaman problema de Riemann — Hilbert.

definir la función. Riemann no ofreció ningunas fórmulas: la observación acerca de la posibilidad de definir la función mediante la mencionada correlación de contorno se hizo de paso con otros razonamientos más generales, por ejemplo, sobre la posibilidad de definir la función mediante una correlación que liga los valores de la parte real y la imaginaria en n puntos distintos del contorno. (Ha de ser notado que los problemas de este género no han sido considerados hasta ahora.) Contrariamente a lo dicho, el problema de contorno (14.1) (de Riemann) se ha propuesto por Riemann como un problema práctico a ser resuelto. Decir la verdad, esto fue hecho no con el objeto de considerarlo en calidad de un problema de contorno independiente de funciones analíticas, sino en relación con la resolución de un problema de otro tipo (véanse las notas históricas al capítulo II, § 19). De este modo, la conexión del problema de contorno (14.1) con el nombre de Riemann está más justificada históricamente que la con el problema de contorno, examinado en el presente capítulo.

La enunciación precisa del problema de contorno de Hilbert [1]) (27.1), al igual que las tentativas de su resolución, se deben originalmente, por lo visto, a Volterra 1)** en 1883. Sin embargo, por razones desconocidas esta obra resultó aislada de otras obras y no ejerció influencia considerable en las investigaciones posteriores. Parece extraño y difícil de explicar el hecho de que esta obra de importancia no es citada en ninguna obra referente a los problemas de contorno, salvo la obra del autor [6].

La solución completa del problema de contorno considerado la dio Hilbert [10] en 1905. No obstante, la solución no se ha obtenido de una vez. La primera solución de este problema, puesta de manifiesto por Hilbert en su informe ante el tercer congreso internacional de los matemáticos en Geidelberg en 1904 y basada en la reducción a una ecuación integral singular con núcleo $\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}$, fue errónea (véase la obra [6]). La solución definitiva de Hilbert [10], aunque no elaborada con detalles, fue tomada de base para todas las investigaciones posteriores referentes a esta cuestión. De las obras ulteriores la de Noether 1)** es de mayor importancia; a continuación viene la obra de S. L. Sóbolev 1)*. En estas obras el problema de Hilbert se ha elaborado con todos los pormenores.

Noether hizo en su obra un paso nuevo de principio hacia adelante. Si antes de Noether los investigadores trataban de obtener la solución de los problemas de contorno (de Hilbert y de Riemann) a partir de las ecuaciones integrales, aquí, viceversa, la solución del problema de contorno (de Hilbert) fue utilizada para investigar las ecuaciones integrales singulares $\left(\text{con núcleo } \operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\right)$. Los resultados obtenidos de esta manera fueron exclusivamente fructíferos; ellos ayudaron a establecer las propiedades fundamentales de ecuaciones singulares (teoremas de Noether) e influyeron muchísimo en las investigaciones posteriores (véanse las notas históricas al capítulo III, § 26).

La solución del problema de Hilbert que se expone en el presente capítulo y se apoya en el concepto del factor de regularización, la dio el autor en 1941 en su tesis de doctorado 2)* (véase también [6]). Esta solución se diferencia de las dadas anteriormente sólo en el enfoque metódico el cual, como le parece al autor, es más natural para el problema dado. En relación con la resolución del problema de Hilbert conviene mencionar también la obra de I. N. Vekua 4)*, en la que la cuestión se expone de una manera más detallada.

La exposición completa de la resolución del problema de Hilbert para un círculo unitario se da en el curso [22]. El concepto general de factor de regularización se ha introducido por primera vez por el autor en las obras citadas más

---

[1]) El término « problema de Hilbert» se ha introducido originalmente por Picard [19].

arriba. Este concepto resultó útil en la resolución del problema de Hilbert, como también de los problemas de contorno inversos. La cuestión acerca de la posibilidad de otras aplicaciones del factor de regularización por el momento queda abierta.

Las ecuaciones integrales singulares con núcleo de Hilbert $\operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2}$ se encuentran por primera vez en la obra de Hilbert 1)* [1]. Estas fueron, por lo visto, las primeras ecuaciones singulares que se hicieron conocidas a los matemáticos. La teoría completa de la ecuación con núcleo de Hilbert, la dio, como ya se ha indicado, Noether en su obra bien conocida. La teoría de la ecuación característica con núcleo de Hilbert en la forma más sencilla en comparación con la noetheriana fue expuesta por el autor en la obra [6].

V. S. Rogozhin 1)* fue el primero en elaborar los métodos de reducir los problemas de contorno para funciones poliarmónicas y polianalíticas, en el caso de los contornos elementales (una recta y una circunferencia), al problema de contorno de Hilbert. La investigación detallada de la cuestión fue realizada por M. P. Ganin; una parte de los resultados obtenidos se ha publicado en las obras 1), 2)*. La exposición del § 32 está dada, en lo principal, de conformidad con las obras de M. P. Ganin.

El problema de contorno inverso fue enunciado por Riabouchinsky 1)** como un problema de funciones armónicas: hallar un contorno según los valores, definidos en él, de la función armónica en un dominio y la derivada normal de ésta. Démtchenko trataba de resolver este problema en tal planteamiento. Como en este planteamiento el contorno portador de los datos está ausente, Démtchenko tuvo que introducir, a título de definición, que el portador es un cierto círculo auxiliar. El panteamiento y la solución del problema examinado en el § 33 fueron dados por M. T. Nuzhin 1)*. Un aporte esencial de la última obra, consiste en la introducción del portador natural de los datos, esto es, del contorno L_w, determinado por los propios datos del problema. La demostración de existencia de la solución del problema exterior (p. 33.4) se ha dado en la obra de F. D. Gájov 4)*. Un gran número de las aplicaciones técnicas encontraron su expresión en las obras de los mecánicos de Kazán. La exposición de estas obras y su bibliografía completa hasta el año 1957 están dadas en la obra de G. G. Tumashev y M. T. Nuzhin [27]. Algunas otras obras matemáticas referentes a los problemas de contorno inversos han sido indicadas en el texto.

PROBLEMAS AL CAPITULO IV

1. Pruébese que la expresión general del operador de Schwarz para el semiplano superior tiene la forma

$$Su = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi) \left[\frac{1}{\xi - z} + C(\xi) \right] d\xi,$$

donde $C(\xi)$ es una función real arbitraria de la variable real ξ. Dedúzcanse de aquí dos expresiones distintas para el operador de Schwarz:

$$1)\ Su = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi)}{\xi - z}\, d\xi; \quad 2)\ Su = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi) \frac{1 + \xi z}{\xi - z} \frac{d\xi}{1 + \xi^2}.$$

[1]) Al mismo tiempo en la obra de Poincaré [20].

2. Demuéstrese que la función $Q(z)$, que es la solución del problema A_0 (p. 27.3) para el semiplano superior, puede tener por expresión

$$Q(z)=\sum\left[c_k\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^k-\bar{c}_k\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^k\right]+i\beta_0.$$

3. Obténgase la expresión para la función $Q_1(z)$ que posee las siguientes propiedades:

1. Es analítica en el círculo unitario, a excepción de los puntos dados z_1, z_2, . . ., z_m, donde ella tiene polos simples.

2. En la circunferencia unitaria la parte real de $Q_1(z)$ se reduce a cero.

Respuesta. $Q_1(z)=i\beta_0+\sum_{k=1}^{m}\left[c_k\frac{z-z_k}{1-\bar{z}_k z}-\bar{c}_k\frac{1-\bar{z}_k z}{z-z_k}\right]$.

4. Generalícense los resultados del problema anterior para el caso en que los polos son múltiples de multiplicidades, respectivamente, p_1, p_2, . . ., p_m.

Respuesta. $Q_1(z)=i\beta_0+\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{p_k}\left[c_j\left(\frac{z-z_k}{1-\bar{z}_k z}\right)^j-\bar{c}_j\left(\frac{z-z_k}{1-\bar{z}_k z}\right)^{-j}\right]$.

5. Resuélvanse los problemas de Hilbert para un círculo unitario:

a) $e^{-\operatorname{sen} 2s}\cos(\cos 2s)\,u(s)-e^{-\operatorname{sen} 2s}\operatorname{sen}(\cos 2s)\,v(s)=e^{\cos s}\cos(\operatorname{sen} s)$;

b) $\left(\cos s+\frac{1}{2}\right)u(s)+\left(\operatorname{sen} s-\frac{1}{3}\right)v(s)=$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{49}{36}+\cos s-\frac{2}{3}\operatorname{sen} s\right)\ln(5-4\cos s).$$

Respuesta. a) $F(z)=e^{-iz^2}(e^z+i\beta_0)$;

b) $F(z)=$

$$=\left(z+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}i\right)\left[\ln(z-2)+i\beta_0+c\,\frac{6z+3-2i}{6+(3+2i)z}-\bar{c}\,\frac{6+(3+2i)z}{6z+3-2i}\right]$$

(β_0 es un parámetro real arbitrario; c, un parámetro complejo arbitrario).

6. Pruébese que el problema de Hilbert para un círculo unitario

$$\cos s\cdot u(s)-\left(\operatorname{sen} s+\frac{1}{2}\right)v(s)=\cos 2s+h$$

es resoluble sólo para el valor del parámetro $h=1/4$. Dése la solución del problema para este caso.

Respuesta. $F(z)=z-\frac{1}{2}i$.

7. Muéstrese que la ecuación integral singular homogénea de índice cero

$$(\cos s+2)\,u(s)-\frac{\operatorname{sen} s}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma=\operatorname{sen} s$$

es incondicionablemente resoluble. Dése su solución.

Respuesta. $u(s)=\frac{1}{2}\operatorname{sen} s$.

8. Pruébese que la ecuación integral no homogénea de índice cero

$$u(s)\cos s-\frac{\operatorname{sen} s+2}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma=(5+4\operatorname{sen} s)(\cos s+h)$$

es resoluble sólo cuando el parámetro $h=0$. Dése la solución de la ecuación para este caso.

Respuesta. $u(s)=\cos 2s-2\operatorname{sen} s-\beta_0(\operatorname{sen} s+2)$.

9. Pruébese que para la función compleja $a(s)+ib(s)$, prefijada en el contorno L, la definición del factor de regulariazición $R(t)=\alpha(s)+i\beta(s)$, de cuya representación sirve la curva Γ, dada por la ecuación $\beta=f(\alpha)$, puede reducirse a la resolución del siguiente problema de contorno

$$bu-av=-(a^2+b^2)\,f\left(\frac{au+bv}{a^2+b^2}\right),$$

donde $u+iv$ es una función analítica definida por le ecuación

$$R(t)\,[a(s)+ib(s)]=u(s)+iv(s).$$

10. Sea $G(t)=a(s)+ib(s)$ una función de índice $\varkappa$, definida en el contorno L, y sea $R(t)$ su factor de regularización, cuyo índice, por hipótesis, es ν. Supongamos, además, que $\Phi^+(z)$ es una función que en L satisface la condición $R(t)\,G(t)=\Phi^+(t)$ y es analítica en el dominio D^+, a excepción, quizás, de los puntos dados $z_1, z_2, \ldots, z_m$, donde ella tiene los órdenes $n_1, n_2, \ldots, n_m$, con la particularidad de que todos los n_k son de un mismo signo y $\sum_{k=1}^{m} n_k=\varkappa+\nu$.

Pruébese que la función $\Phi^+(t)$ y el factor de regularización $R(t)$ se determinan salvo un multiplicador que es el valor de contorno de una función la cual es analítica en D^+ y tiene en éste el orden cero.

11*. Dése la solución del problema de contorno de Hilbert para un semiplano.

Indicación. Utilícense los resultados de los problemas 2 y 3.

12. Dése la solución del problema de contorno de Hilbert para un dominio que es exterior con relación a la circunferencia unitaria.

13. Sea D^- un dominio, limitado por el contorno simple L. Pruébese que la solución general del problema de contorno de Hilbert

$$\operatorname{Re}[\,{}^{\prime}F^-(t)]=0$$

donde

$$t'=\frac{dt}{ds}$$

será la función

$$F^-(z)=\alpha_0\frac{\omega'(z)}{\omega(z)},$$

donde $\omega(z)$ es la función que aplica conformemente el dominio D^- sobre el exterior del círculo unitario. (I. N. Vekua [2], pág. 272).

14. ¿A qué condiciones debe satisfacer la función $c(s)$ para que el problema de Hilbert

$$\operatorname{Re}[t'(s) F^+(t)] = c(s)$$

sea resoluble

15. Pruébese que una ecuación integral singular

$$a(s) u(s) + \frac{b(s)}{l} \int_L u(\sigma) \frac{\partial G^{\pm}(s, \sigma)}{\partial \sigma} d\sigma = c(s) \quad (a^2 + b^2 = 1),$$

donde G y l implican lo mismo que en el problema 23 del cap. I, se reduce al problema de contorno de Hilbert

$$\operatorname{Re}\left[\frac{F^{\pm}(t)}{a(s) \pm ib(s)}\right] + c(s)$$

con la condición complementaria de que $\int_L v^{\pm}(\sigma)\, d\sigma = 0$ para el dominio D^+ o D^-. [Hilbert 1)**.]

16. Haciendo uso de las relaciones que existen entre el núcleo de Hilbert y el de Cauchy, redúzcase la resolución de una ecuación singular característica con núcleo de Hilbert a la resolución del problema de contorno de Riemann. Obténgase de aquí la investigación completa de la ecuación indicada.

17*. Dedúzcanse los teoremas de Noether directamente para la ecuación con núcleo de Hilbert. [Noether 1)**.]

18*. Pruébese que para el operador integral singular

$$K(u) \equiv a(s) u(s) - \frac{b(s)}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma + \int_0^{2\pi} K(s, \sigma) u(\sigma) d\sigma$$

el operador conjugado

$$K'\xi = a(s) \xi(s) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} b(\sigma) \xi(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma + \int_0^{2\pi} K(\sigma, s) \xi(\sigma) d\sigma$$

es un regularizador equivalente. (V. D. Kupradze 3)*.)

19*. Haciendo uso del método, empleado en el p. 32.3, dése la solución de los problemas de contorno II, III de funciones polianalíticas (p. 32.2) para un círculo.

20*. Dése la solución de los problemas de contorno I—IV de funciones polianalíticas para un semiplano.

21*. Resuélvase el problema fundamental de la teoría de elasticidad (p. 32.5) para un dominio D^-, limitado por una elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, haciendo uso del hecho de que el dominio D^- se aplica conformemente sobre el interior del círculo unitario mediante la función $z = \omega(\zeta) = -R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right)$, y sobre el exterior del círculo unitario, por la función $z = R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right)$, donde

$$R = \frac{1}{2}(a + b), \quad Rm = \frac{1}{2}(a - b).$$

22*. Pruébese que el problema de contorno I de funciones polianalíticas para un contorno arbitrario puede ser reducido a n problemas de Hilbert y, por lo tanto, resuelto en forma cerrada (M. P. Ganin 1)*.)

CAPITULO V

DIVERSOS PROBLEMAS DE CONTORNO GENERALIZADOS [1]

Los problemas de contorno fundamentales de Riemann y de Hilbert admiten las generalizaciones en diferentes sentidos. En este capítulo serán examinadas las siguientes generalizaciones:

1. La admisión de que en las condiciones de contorno (de los problemas de tipo de Hilbert y de Riemann), a la par con los valores de las funciones, figuran los valores de sus derivadas y también los términos de carácter integral.

2. La consideración de los dominios múltiplemente conexos.

3. El planteamiento de los problemas de contorno para funciones de la clase más general que incorporan funciones armónicas y analíticas como caso particular, por ejemplo, para las soluciones de las ecuaciones de tipo elíptico, como también de los sistemas de este tipo[2]).

Ha de notarse que la generalización del problema de contorno de Riemann para el caso de un dominio múltiplemente conexo ya ha sido examinada anteriormente. En lo que se refiere al problema de Hilbert, el paso de un dominio simplemente conexo a un múltiplemente conexo representa dificultades de principio y lo hace aproximarse, tanto por el método empleado de resolución como por los resultados que se logran obtener, a los problemas de este capítulo.

Las posibilidades para las generalizaciones no se limitan, por supuesto, a las mencionadas. Así, por ejemplo, en el siguiente capítulo estudiaremos la cuestión acerca de la ampliación de la clase de coeficientes y contornos admisibles (coeficientes discontinuos y contornos abiertos).

---

[1]) Como el contenido principal de los capítulos VI y VII no depende del material que se expone en el capítulo presente, el lector puede omitir este último y pasar, en el caso de necesidad, a los capítulos VI y VII, volviendo a este capítulo después de estudiar los últimos.

[2]) Lo último no está incluido en esta edición del libro.

Es natural una generalización en el sentido del aumento del número de funciones buscadas, definidas por el sistema de condiciones conjuntas de contorno, pero estas cuestiones no las tocaremos en esta obra.

§ 35. Problema de contorno de tipo del problema de Hilbert con la condición de contorno que contiene derivadas

35.1. Planteamiento del problema y diversas formas de la condición de contorno. Los diferentes autores, que resolvían el problema, escogían distintas formas de la condición de contorno, las cuales, aunque diferían una de la otra en su apariencia exterior, eran, de hecho, equivalentes. Para que el lector se dé cuenta de estas formas, demos a conocerlas.

El autor de este libro, al examinar por primera vez el problema en su obra [5], publicada en el año 1938, lo enunció así:

Hállese la función $\Phi(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *que sea analítica en el dominio* D^+, *limitado por un contorno suave simple* L, *y satisfaga en el contorno la condición de contorno*

$$\sum_{k=0}^{m} \left[a_k(s) \frac{d^k u}{ds^k} + b_k(s) \frac{d^k v}{ds^k} \right] = f(s), \tag{35.1}$$

donde los coeficientes $a_k(s)$, $b_k(s)$, $f(s)$ *son funciones continuas reales; entre ellas* $a_m(s)$, $b_m(s)$, $f(s)$ *satisfacen la condición de Hölder.*

I. N. Vekua 4)* consideraba *la condición de contorno en la forma*

$$\operatorname{Re} \sum_{k=0}^{m} \left[a_k(t) \Phi^{(k)}(t) + \int_L h_k(t, \tau) \Phi^{(k)}(\tau) d\tau \right] = f(t), \tag{35.2}$$

donde $a_k(t)$, $h_k(t, \tau)$ *son funciones complejas y* $f(t)$ *una función real de igual carácter que los coeficientes de la condición de contorno* (35.1); $h_k(t, \tau)$ *son núcleos fredholmianos. Por* $\Phi^{(k)}(t)$ *se entiende el valor de frontera de la derivada de k-ésimo orden de la función* $\Phi(z)$.

D. I. Sherman 1)* enunció de hecho el mismo problema como problema de funciones armónicas.

Hállese la función $u(x, y)$, *armónica en el dominio* D^+, *que satisfaga la condición de contorno*

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{k} a_{kj}(s) \frac{\partial^k u}{\partial x^{k-j} \partial y^j} = f(s), \tag{35.3}$$

donde los coeficientes $a_{kj}(s)$, $f(s)$ *tienen el mismo carácter que el mencionado más arriba.*

De las tres condiciones de contorno escritas la más general es (35.2), puesto que en ella están contenidos términos integrales. Los términos extraintegrales que figuran en las condiciones (35.1) y (35.2) son idénticos; en las condiciones (35.3) está ausente el término con $v(s)$, es decir, si reducimos esta condición de contorno a la forma (35.1), resultará que $b_0(s) \equiv 0$.

En principio, los problemas de contorno (35.1) — (35.3) son equivalentes tanto por los métodos que pueden emplearse para resolucionar cualquiera de ellos, como por los resultados que se obtienen. El asunto consiste en lo que, según veremos en adelante, la investigación se efectúa sólo por totalidad de términos extraintegrales que contienen derivadas superiores, las cuales, a su turno, forman la parte característica de la ecuación integral singular obtenida (véase el p. (35.6)). El cambio de los demás términos sólo tiene por resultado la alteración de la parte regular del núcleo lo que no influye en el asunto, puesto que ésta en cualquier caso contiene funciones definidas arbitrariamente, esto es, los coeficientes de la condición de contorno.

Nuestro propósito es resolver el problema de contorno principalmente en la forma (35.2). Señalemos, por ello, cómo se reducen a esta forma otras dos condiciones de contorno. En el caso de (35.3) esto se hace sin dificultades algunas. Será suficiente servirse de las correlaciones

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{dt}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = i\frac{d}{dt},$$

que fluyen de la regla para derivar una función compuesta ($t = x + iy$). Tendremos

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{k} a_{kj}\frac{\partial^k u}{\partial x^{k-j}\,\partial y^j} = \operatorname{Re}\left[\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{k} a_{kj}\frac{\partial^k \Phi}{\partial x^{k-j}\,\partial y^j}\right] =$$

$$= \operatorname{Re}\left[\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{k} i^j a_{kj}\Phi^{(k)}(t)\right].$$

Al designar $\sum_{j=0}^{k} i^j a_{kj}$ mediante $a_k(t)$, llegamos a la forma (35.2).

Para pasar de la condición de contorno (35.1) a (35.2), expresaremos las derivadas respecto al arco s en términos de las derivadas respecto a la coordenada compleja del contorno t:

$$\frac{d\Phi}{ds} = \Phi'(t)\,t', \quad \frac{d^2\Phi}{ds^2} = \frac{d}{ds}[\Phi'(t)\,t'] = \Phi''(t)\,t'^2 + \Phi'(t)\,t'',$$

$$\frac{d^m\Phi}{ds^m} = \Phi^{(m)}(t)\,t'^m + \text{términos que contienen derivadas de la función } \Phi(t) \text{ de orden} < m.$$

Entonces,

$$\sum_{k=0}^{m}\left[a_k(s)\frac{d^k u}{ds^k}+b_k(s)\frac{d^k v}{ds^k}\right]=$$

$$=\operatorname{Re}\left[\sum_{k=0}^{m}(a_k-ib_k)\frac{d^k\Phi}{ds^k}\right]=\operatorname{Re}\left[t'^m(a_m-ib_m)\Phi^{(m)}(t)\right]+$$

$+$ términos que contienen las derivadas de Φ de orden inferior. (35.2′)

De una manera análoga se hace con facilidad el paso de cualquiera de las tres formas de la condición de contorno que se consideran a las dos otras.

Mostremos con un ejemplo particular, cómo se pasa de la forma (35.1) a las (35.2), (35.3).

Sea dada la ecuación de tipo (35.1):

$$\operatorname{sen} s\frac{du}{ds}+(2-\cos s)\frac{dv}{ds}-2u(s)=f(s).$$

Transformándola con ayuda de las fórmulas citadas arriba, obtendremos

$$\operatorname{Re}\{[\operatorname{sen} s-i(2-\cos s)]\,t'(s)\,\Phi'(t)-2\Phi(t)\}=f(s),$$

es decir, la condición de contorno en la forma de I. N. Vekua, si se considera que s está expresado en términos de t mediante la ecuación del contorno. Por fin, suponiendo $t'(s)=x'(s)+iy'(s)$, llegaremos a la condición en forma de D. I. Sherman:

$$[x'(s)\operatorname{sen} s+y'(s)(2-\cos s)]\frac{\partial u}{\partial x}+$$

$$+[y'(s)\operatorname{sen} s-x'(s)(2-\cos s)]\frac{\partial u}{\partial y}-2u(s)=f(s).$$

Indiquemos ahora mismo que el caso particular del problema en consideración para $m=1$ fue investigado por Poincaré en 1902 en relación con la teoría de mareas ascendentes. Precisamente este problema incitó al ilustre matemático para dedicarse al estudio de las ecuaciones integrales singulares (véanse las notas históricas al capítulo III, § 26).

En lo sucesivo (pp. 35.3—35.6) expondremos el método de resolución de D. I. Sherman 4)*, quien reduce el problema de contorno directamente a una ecuación integral de Fredholm, dejando a parte una ecuación singular[1]).

[1]) Resulta que en este caso los núcleos de las ecuaciones obtenidas se expresan en términos de funciones elementales (privadas de cuadratura) lo que representa ciertas comodidades al aplicarse los métodos numéricos de la resolución.

35.2. Representación de la función analítica mediante una integral de tipo de Cauchy con densidad real. Es notorio el gran papel que desempeñan, en la resolución de los problemas de contorno de la física matemática, las representaciones de las soluciones de ecuaciones diferenciales de diversos géneros mediante los potenciales. Con ayuda de las representaciones de este tipo los problemas de contorno para funciones que sirven de soluciones de las ecuaciones diferenciales de la clase en consideración, se reducen a las ecuaciones integrales con relación a la densidad del potencial. Los potenciales más simples son potenciales logarítmicos ordinarios de capa simple y de capa doble que se emplean en la resolución de los problemas de contorno de funciones armónicas[1]).

Tomando en consideración la íntima conexión que existe entre las integrales de tipo de Cauchy y los potenciales (§ 10), parece natural esperar que en la teoría de los problemas de contorno de funciones analíticas el papel de importancia pertenece a las representaciones de las funciones analíticas mediante las integrales de tipo de Cauchy y sus generalizaciones.

Empecemos por considerar un caso más simple, pasando a continuación a los casos más complejos.

Sea $\Phi^+(z)$ una función analítica definida en el dominio D^+, que está limitado por el contorno simple L. Estudiemos la cuestión acerca de la posibilidad de representarla por una integral de tipo de Cauchy:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\sigma)}{\tau - z}\, d\tau, \tag{35.4}$$

sobre cuya densidad $\mu(\sigma)$ no se imponen ningunas condiciones complementarias, salvo el cumplimiento de la igualdad (35.4). ¿Será posible tal representación y en qué medida está definida la función μ según la función dada $\Phi^+(z)$?

Como es sabido, la fórmula (35.4) determina simultáneamente dos funciones analíticas: la función dada $\Phi^+(z)$ para $z \in D^+$, y, además, cierta otra función $\Phi^-(z)$ para $z \in D^-$. Aplicando las designaciones habituales para los valores límites de las funciones en el contorno L, obtendremos de acuerdo con la fórmula de Sojotski (4.9)

$$\mu(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t). \tag{35.5}$$

La última fórmula muestra que la densidad de la integral de tipo de Cauchy $\mu(t)$ se determina, según la función dada $\Phi^+(z)$, con la

[1]) Además de éstos, están bien estudiados también los potenciales de calor y de onda. Entre las ideas de este mismo círculo se encuentra también el método operacional que se reduce a la representación de las funciones buscadas por las integrales de Laplace, Fourier y por diversas generalizaciones de éstas.

precisión hasta un sumando que sirve de valor de contorno de una función, analítica en el dominio D^- y subordinada a la única restricción $\Phi^-(\infty) = 0$. Viceversa, si ponemos en la fórmula (35.4) el valor (35.5), entonces, en vista del teorema de Cauchy y de la fórmula de Cauchy, obtenemos para $z \in D^+$ la función dada $\Phi^+(z)$.

Para que el problema de representar la función analítica dada mediante una integral de tipo de Cauchy se haga definida, se deben imponer sobre la densidad $\mu(\sigma)$ ciertas condiciones complementarias. Estas condiciones pueden ser muy diversas[1]). Consideraremos primero una condición más simple: exigiremos que $\mu(\sigma)$ sea una función *real*.

En este caso, al igual que en el capítulo IV, definiremos las magnitudes en consideración o bien como funciones de las coordenadas complejas de los puntos t, τ, o bien como funciones de las variables reales (abscisas de arco) s, σ. Ellas están ligadas mediante la ecuación del contorno $t = t(s)$. De este modo, $\mu(t) = \mu[t(s)] = \mu(s)$.

Volviendo al problema en consideración, eliminaremos en (35.5) la función buscada $\mu(t)$, al tomar las partes imaginarias. Obtendremos

$$\operatorname{Im} \Phi^-(t) = \operatorname{Im} \Phi^+(t).$$

El segundo miembro de la última igualdad es una función conocida. Con el fin de determinar la función $\Phi^-(z)$, obtendremos un problema de Schwarz para el dominio D^- con la condición complementaria $\Phi^-(\infty) = 0$, que, en el caso general, hace el problema insoluble. Por esta razón, en general, resulta imposible representar la función arbitraria $\Phi^+(z)$ mediante una integral de tipo de Cauchy con densidad real.

Para hacer posible la representación, introduzcamos en el segundo miembro de (35.4) un sumando puramente imaginario, por el momento arbitrario, es decir, busquemos la representación en la forma

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\sigma)}{\tau - z} d\tau + iC. \tag{35.6}$$

Aquí y siempre en lo sucesivo al considerar representaciones integrales, por $\Phi(z)$, definida en el dominio complementario, se comprenderá una función dada sólo mediante una integral de tipo Cauchy sin términos adicionales que figuran en la representación integral. Por ejemplo, en el caso que se considera

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\sigma)}{\tau - z} d\tau \text{ para } z \in D^-.$$

[1]) Este problema tiene mucho común con el problema de definir el factor de regularización.

Escribamos la fórmula (35.6) en la forma

$$\Phi(z) - iC = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\sigma)}{\tau - z} d\tau$$

y apliquemos a la integral de tipo de Cauchy la fórmula de Sojotski. Obtendremos

$$\mu(t) = [\Phi^+(t) - iC] - \Phi^-(t). \tag{35.7}$$

De aquí

$$\operatorname{Im}[\Phi^-(t) + iC] = \operatorname{Im} \Phi^+(t).$$

Ahora hemos llegado al problema de Schwarz para un dominio exterior sin restricciones algunas; este problema se resuelve de un modo único. Sea

$$\operatorname{Im}[\Phi^-(z) + iC] = v(x, y).$$

Entonces, de la condición $\operatorname{Im} \Phi^-(\infty) = 0$ de un modo único se determina la constante C. La parte real de $\Phi^-(z)$ se determina, según la ecuación de Cauchy—Riemann, con precisión hasta un sumando constante. El último se halla de la condición $\operatorname{Re} \Phi^-(\infty) = 0$. Así pues, la parte real de $\Phi^-(z)$ también se determinará con exactitud. Por lo tanto, la densidad $\mu(t)$ se determina por la fórmula (35.7) de un modo único.

De suerte que se obtiene el resultado siguiente:

La representación de la función $\Phi^+(z)$, *que es arbitraria y analítica en el dominio* D^+, *en la forma* (35.6) *es factible, con la particularidad de que* C *y* $\mu(\sigma)$ *se determinan por* $\Phi^+(z)$ *de un modo único.*

Supongamos ahora que $\Phi(z)$ es una función analítica en D^-. En este caso, teniendo presente que la integral de tipo de Cauchy desaparece en el infinito, buscamos la representación en la forma

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\sigma)}{\tau - z} d\tau + \Phi(\infty). \tag{35.8}$$

Razonando por analogía con lo anterior, llegaremos a la siguiente igualdad que sirve para determinar $\mu(t)$:

$$\mu(t) = \Phi^+(t) - [\Phi^-(t) - \Phi(\infty)]. \tag{35.9}$$

De aquí, para determinar la parte imaginaria de $\Phi^+(z)$ llegamos al problema de Schwarz que se resuelve unívocamente

$$\operatorname{Im} \Phi^+(t) = \operatorname{Im}[\Phi^-(t) - \Phi(\infty)].$$

La misma función $\Phi^+(z)$ se determina salvo un sumando real, después de lo cual *la densidad* $\mu(t)$ *se halla según la fórmula* (35.9), *también salvo un sumando real.*

35.3. Integral de tipo de Cauchy cuya densidad es un producto de la dada función compleja por cierta función real. Pasemos al examen de una representación más general de las funciones analíticas mediante integrales de tipo de Cauchy, cuando la densidad constituye un producto de la función dada, la cual se escribirá en la forma $\frac{1}{a(s)+ib(s)}$, por una función real buscada $\mu(s)$.

Así pues, buscaremos la representación de la función analítica $\Phi(z)$ en la forma

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\sigma)}{a(\sigma)+ib(\sigma)}\frac{d\tau}{\tau-z}. \tag{35.10}$$

Supondremos que $a+ib\neq 0$. Sin restringir la generalidad se puede considerar $a^2+b^2=1$.

Vamos a considerar el caso en que $z\in D^+$, es decir, convengamos en que la función $\Phi^+(z)$ es prefijada y la $\Phi^-(z)$, arbitraria. Más arriba hemos mostrado que la cuestión acerca de la representación de una función analítica en la forma de una integral de tipo de Cauchy con densidad real se reduce a la resolución del problema de Schwarz para un dominio complementario. Análogamente, la cuestión acerca de la representación en la forma (35.10) se reduce al problema de Hilbert. Puesto que lo último depende esencialmente del índice, consideraremos varios casos.

1°. $\varkappa=\operatorname{Ind}(a+ib)>0$. Por analogía con lo anterior tenemos

$$\frac{\mu(s)}{a(s)+ib(s)}=\Phi^+(t)-\Phi^-(t). \tag{35.11}$$

Despejándonos del denominador y tomando las partes imaginarias, obtendremos

$$\operatorname{Im}\{[a(s)+ib(s)]\,\Phi^-(t)\}=\operatorname{Im}\{[a(s)+ib(s)]\,\Phi^+(t)\}.$$

La igualdad obtenida es la condición de contorno del problema de Hilbert para el dominio exterior D^- (véase el p. 29.4) con la única diferencia de que el factor $\frac{1}{a+ib}$ está sustituido por $a+ib$[1]) (véase, además el final del p. 27.3).

Al multiplicar los dos miembros de la última igualdad por el factor de regularización $p(s)$ (para el dominio D^-) de la función $a+ib$, y designando

$$p(s)\operatorname{Im}[(a+ib)\,\Phi^+(t)]=f(s),$$

llegamos a la igualdad

$$\operatorname{Im}[t^{\varkappa}e^{i\gamma(t)}\Phi^-(t)]=f(s).$$

[1]) El cambio indicado conduce a que los resultados de este punto se diferencian de los obtenidos en el p. 29.4 en signo del índice.

Al hacer uso de los resultados del p. 29.4 y de la fórmula (27.10), obtenemos

$$\Phi^-(z) = z^{-\varkappa} e^{-i\gamma(z)} [iSf + iQ(z)]. \qquad (35.11')$$

A continuación determinamos, según la fórmula (35.11), la función $\mu(s)$. Puesto que $\Phi^-(\infty) = 0$, la función $Q(z)$, definida por la fórmula (29.27), sólo contiene $2\varkappa - 1$ constantes reales arbitrarias. Por consiguiente, *cuando* $\varkappa > 0$, *la representación* (35.10) *resulta factible y la función* $\mu(s)$ *depende de* $2\varkappa - 1$ *constantes reales arbitrarias.*

2°. $\varkappa \leqslant 0$. Cuando el índice no es positivo, al tomar la representación en la forma (35.10), llegaríamos al problema de Hilbert que es, en el caso general, insoluble. Con el fin de asegurar la resolubilidad, introduzcamos en la representación un polinomio adicional y buscaremos la función $\Phi(z)$ en la forma

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\sigma)}{a(\sigma) + ib(\sigma)} \frac{d\tau}{\tau - z} + \sum_{k=0}^{-\varkappa} c_k z^k, \qquad (35.12)$$

donde c_k son, por el momento, coeficientes arbitrarios.

Procediendo de un modo sumamente análogo a lo anterior, obtendremos al principio

$$\mu(s) = [a(s) + ib(s)] \left[\Phi^+(t) - \Phi^-(t) - \sum_{k=0}^{-\varkappa} c_k t^k\right], \qquad (35.13)$$

y luego llegaremos al problema

$$\operatorname{Im}\left\{t^{\varkappa} e^{i\gamma(t)} \left[\Phi^-(t) + \sum_{k=0}^{-\varkappa} c_k t^k\right]\right\} = f(s),$$

cuya solución se da en la forma

$$\Phi^-(z) = z^{-\varkappa} e^{-i\gamma(z)} [iSf + \alpha_0] - \sum_{k=0}^{-\varkappa} c_k z^k.$$

Desarrollaremos el segundo miembro en una serie en el entorno de $z = \infty$, designando

$$z^{-\varkappa} e^{-i\gamma z} [iSf + \alpha_0] = \sum_{k=-\infty}^{-\varkappa} A_k z^k.$$

Por hipótesis, debemos tener

$$\Phi^-(\infty) = 0.$$

Lo último se cumplirá, si ponemos

$$c_k = A_k \quad (k = 0, 1, \ldots, -\varkappa).$$

Los coeficientes $c_0, c_1, \ldots, c_{-\varkappa-1}$ se determinan de las últimas igualdades de un modo único. En vista de que en el coeficiente $A_{-\varkappa}$ está contenida una magnitud real arbitraria α_0, la igualdad $c_{-\varkappa} = A_{-\varkappa}$ no determina enteramente el coeficiente complejo $c_{-\varkappa}$, sino que proporciona dos ecuaciones reales con tres incógnitas reales. Examinemos estas ecuaciones más detalladamente.

Sean

$$iSf + \alpha_0 = \alpha_0 + i\beta_0 + \frac{B}{z} + \ldots,$$

$$e^{-i\gamma(z)} = e^{\omega} e^{-i\omega} = \alpha_1 - i\beta_1 + \frac{D}{z} + \ldots$$

los desarrollos de las funciones correspondientes en el entorno $z = \infty$, con la particularidad de que

$$\alpha_1 = e^{\omega_1(\infty)} \cos \omega(\infty), \quad \beta_1 = e^{\omega_1(\infty)} \operatorname{sen} \omega(\infty).$$

Entonces, de la igualdad

$$c_{-\varkappa} = c_{-\varkappa}^{(1)} + i c_{-\varkappa}^{(2)} = (\alpha_1\alpha_0 + \beta_1\beta_0) + i(\alpha_1\beta_0 - \beta_1\alpha_0)$$

obtendremos dos ecuaciones para tres magnitudes arbitrarias

$$c_{-\varkappa}^{(1)}, \; c_{-\varkappa}^{(2)}, \; \alpha_0:$$

$$\alpha_1\alpha_0 + \beta_1\beta_0 = c_{-\varkappa}^{(1)}, \quad \alpha_1\beta_0 - \beta_1\alpha_0 = c_{-\varkappa}^{(2)}. \tag{35.14}$$

Los coeficientes conocidos α_1, β_1 no pueden reducirse a cero simultáneamente. Si ambos son distintos de cero, el sistema (35.14) puede ser satisfecha, si igualamos a cero una de las constantes $c_{-\varkappa}^{(1)}$, $c_{-\varkappa}^{(2)}$, es decir, si tomamos $c_{-\varkappa}$ real o puramente imaginario (no importa que sea). Si, con todo esto, uno de los números α_1, β_1 se reduce a cero (es decir, si $\cos \omega(\infty) = 0$ ó $\operatorname{sen} \omega(\infty) = 0$), entonces $c_{-\varkappa}$ puede elegirse real para $\beta_1 \neq 0$, y puramente imaginario para $\alpha_1 \neq 0$. De este modo, $c_{-\varkappa}$ siempre puede considerarse o bien real o bien imaginario.

Consecuentemente, cuando $\varkappa \leqslant 0$, la representación (35.12) es factible, con la particularidad de que los coeficientes $c_0, c_1, \ldots, c_{-\varkappa-1}$ son ciertas constantes complejas y $c_{-\varkappa}$, un número real o puramente imaginario. De modo que *la representación* (35.12) *contiene* $-2\varkappa + 1$ *parámetros reales, los cuales deben ser introducidos para que la representación sea posible.*

Análogamente se resuelve también el problema para el caso en que la función $\Phi(z)$ está definida en el dominio D^-. Aquí, la cuestión acerca de la representación de $\Phi^-(z)$ en la forma citada se reduce a la resolución del problema de Hilbert para el dominio interior D^+. Sin exponer los detalles demos a conocer los resultados.

1°. $\varkappa = \operatorname{Ind}(a + ib) \leqslant 0$. La función $\Phi(z)$, analítica en el dominio D^-, puede ser representada en este caso en la forma

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\sigma)}{a(\sigma) + ib(\sigma)} \frac{d\tau}{\tau - z} + \Phi(\infty), \tag{35.15}$$

con la particularidad de que $\mu(s)$ contiene $-2\varkappa + 1$ constantes reales arbitrarias.

2°. $\varkappa > 0$. En este caso la representación puede ser dada en la forma

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\sigma)}{a(\sigma) + ib(\sigma)} \frac{d\tau}{\tau - z} + \Phi(\infty) + \sum_{k=1}^{\varkappa} \frac{c_k}{(z - z_0)^k}, \tag{35.16}$$

donde z_0 es cierto punto fijo en D^+; c_k son ciertas constantes determinadas unívocamente en términos de $\Phi(z)$, con la particularidad de que $c_\varkappa$ puede ser tanto real como puramente imaginario.

35.4. Representación integral de una función analítica cuya m-ésima derivada es representada mediante una integral de tipo de Cauchy. En la resolución de los problemas de contorno de tipo (35.1)—(35.3) resulta provechoso disponer de una representación integral para las funciones analíticas, en la cual la derivada superior que figura en la condición de contorno, se representa mediante una integral de tipo de Cauchy de un género examinado en el punto antecedente.

El núcleo de tal representación integral puede obtenerse, evidentemente, si integramos m veces el núcleo de Cauchy $\frac{1}{\tau - z}$. Sin embargo, con el objeto de simplificar la exposición, nos limitemos a comprobar los resultados realizando m derivaciones[1]).

Demostremos la validez de la identidad

$$\frac{(-1)^m}{(m-1)!} \frac{d^m}{dz^m} \left[(\tau - z)^{m-1} \ln \left(1 - \frac{z}{\tau}\right) \right] = \frac{1}{\tau - z}. \tag{35.17}$$

La demostración puede realizarse por aplicación inmediata de la fórmula de Leibniz para diferenciar productos. No obstante, como vamos a considerar en lo sucesivo un caso más complejo, en el cual la aplicación de la fórmula de Leibniz será obstaculizada, demostremos la identidad (35.17) recurriendo al método de inducción matemática, tomando en consideración que, para $m = 1$, la identidad es,

---

[1]) No nos interesan aquí los sumandos adicionales que surgen durante el proceso de integración, puesto que nos hará falta sólo una expresión cualquiera para el núcleo.

obviamente, válida. Para $m = n + 1$ tenemos

$$\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}\left[(\tau-z)^n \ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right)\right]=$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\left[-n(\tau-z)^{n-1}\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right)-(\tau-z)^{n-1}\right].$$

Como, en virtud de la suposición de inducción,

$$\frac{d^n}{dz^n}\left[(\tau-z)^{n-1}\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right)\right]=\frac{(n-1)!}{(-1)^n}\frac{1}{\tau-z},$$

y $\frac{d^n}{dz^n}(\tau-z)^{n-1}=0$, la identidad (35.17) queda demostrada.

Pasemos ahora a la demostración de la representación integral. Su forma dependerá de la magnitud Ind $(a + ib) = \varkappa$, al igual que tuvo lugar en el caso más simple examinado en el p. 35.3. Además, la representación será la función del orden de la derivada m. *La forma de la representación será distinta, según sea* $m > \varkappa$ *ó* $m \leqslant \varkappa$.

1°. $m > \varkappa$. Demostremos que en este caso la función $\Phi^+(z)$ puede ser representada en la forma

$$\Phi(z)=\frac{(-1)^m}{(m-1)!}\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\sigma)}{a(\sigma)+ib(\sigma)}\times$$

$$\times(\tau-z)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right)d\tau+\sum_{k=0}^{m-\varkappa}c_k z^k, \qquad (35.18)$$

donde para el logaritmo se toma una rama que desaparece para $z = 0$. Durante la demostración hemos de considerar dos casos, según sea el signo de $\varkappa$.

a) $\varkappa \leqslant 0$. Derivando m veces la igualdad (35.18), obtenemos

$$\Phi^{(m)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\sigma)}{a(\sigma)+ib(\sigma)}\frac{d\tau}{\tau-z}+$$

$$+\sum_{k=m}^{m-\varkappa}k(k-1)\ldots(k-m+1)c_k z^{k-m}. \qquad (35.19)$$

Para la función $\Phi^{(m)}(z)$ hemos llegado a la representación (35.12) (al cambiar $k - m$ por k, y $(k + m)(k + m - 1) \ldots (k + 1)\, c_{k+m}$ por c_k). En virtud de las investigaciones realizadas en el p. 35.3, la representación (35.19) resulta posible, con la particularidad de que los coeficientes $c_m, c_{m+1}, \ldots, c_{m-\varkappa-1}$ son constantes complejas determinadas, mientras que $c_{m-\varkappa}$ puede tomarse tanto real como imaginario. La función $\mu(s)$ se determina de un modo único.

Con el fin de determinar los primeros m coeficientes de la suma comparemos los primeros m términos del desarrollo de ambos miem-

bros de la fórmula (35.18) en la serie de Taylor. (Los demás términos serán idénticos en vista de la igualdad (35.19). Tendremos

$$\frac{1}{k!}\Phi^{(k)}(0) = -\frac{(-1)^m}{(m-1)!}\frac{\alpha_k}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\sigma)\,\tau^{m-k-1}}{a(\sigma)+ib(\sigma)}\,d\tau + c_k$$
$$(k=0, 1, \ldots, m-1), \qquad (35.20)$$

donde los coeficientes α_k, que se obtienen por multiplicación de las series para $(\tau - z)^{m-1}$ y $\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right)$, tienen expresiones bien determinadas

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_k = \frac{1}{k} - \frac{C_{m-1}^1}{k-1} + \ldots + \frac{(-1)^{k-1}C_{m-1}^{k-1}}{1}$$
$$(k=1, 2, \ldots, m-1).$$

Tenemos presente con ello que $\mu(s)$ es una función ya conocida.

De las igualdades (35.20) los coeficientes $c_0, c_1, \ldots, c_{m-1}$ se determinan de un modo único. Así pues, la representación (35.18) está demostrada. Además, se ha establecido que la suma, *incorporada* en (35.18), *contiene* $2(m-\varkappa)+1$ *parámetros reales.*

b) $\varkappa > 0$. Al derivar (35.18), llegaremos a la igualdad

$$\Phi^{(m)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\sigma)}{a(\sigma)+ib(\sigma)}\frac{d\tau}{\tau - z}. \qquad (35.21)$$

Para $\Phi^{(m)}(z)$ tenemos una representación de tipo (35.10). En virtud de las investigaciones realizadas en el p. 35.3, la representación (35.21) en este caso es factible, con la particularidad de que $\mu(s)$ dependerá, de acuerdo con las fórmulas (35.11) y (35.11'), de $2\varkappa - 1$ constantes reales arbitrarias.

Igualando, por analogía con el caso de $\varkappa \leqslant 0$, los primeros m términos del desarrollo de ambos miembros de la igualdad (35.18) en el entorno del origen, de nuevo obtendremos las igualdades (35.20), en las cuales se debe poner

$$c_{m-\varkappa+1} = c_{m-\varkappa+2} = \ldots = c_{m-1} = 0;$$

m ecuaciones complejas (34.20) (por consiguiente, $2m$ reales) contendrán sólo

$$2(m-\varkappa+1) + 2\varkappa - 1 = 2m + 1 \qquad (35.22)$$

parámetros reales. Se puede demostrar (lo que no hacemos aquí) que todas estas ecuaciones serán compatibles e independientes. De ellas pueden determinarse completamente los coeficientes $c_0, c_1, \ldots$

. . ., $c_{m-\varkappa-1}$ y las constantes arbitrarias que figuran en la expresión para $\mu(s)$; $c_{m-\varkappa}$ se puede tomar reales o puramente imaginarios.

De suerte que para este caso también está demostrada la representación (35.18) y, además se ha establecido que *la representación contiene* $2(m-\varkappa)+1$ *parámetros reales, y la densidad* $\mu(s)$ *se determina, siendo dada la función* $\Phi^+(z)$, *de un modo único.*

Examinemos, por fin, el último caso.

2°. $m \leqslant \varkappa$. Ahora podríamos esperar que la suma extraintegral en la representación (35.18) estará ausenta de cualquier manera, pero entonces, al tomar en cuenta la rama elegida $\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right)$, llegamos a que la función, que se representa por la integral, se reducirá a cero, cuando $z=0$. Por ello, para representar la función arbitraria $\Phi(z)$, se debe conservar en la suma un sumando constante c_0, es decir, buscar la representación en la forma

$$\Phi(z) = \frac{(-1)^m}{(m-1)!}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\mu(\sigma)}{a(\sigma)+ib(\sigma)}(\tau-z)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right)d\tau + c_0, \qquad (35.23)$$

donde

$$c_0 = \Phi(0). \qquad (35.24)$$

La demostración es enteramente análoga a la anterior. Primero establecemos que $\mu(s)$ se determina en términos de $\Phi^{(m)}(z)$ y contiene linealmente $2\varkappa-1$ constantes reales. (Hay que recordar que en este caso obligatoriamente $\varkappa > 0$). Luego, del desarrollo en el entorno del origen de coordenadas obtenemos la igualdad (35.24) y $m-1$ ecuaciones complejas más, que se satisfacen a consecuencia de la presencia de constantes en $\mu(s)$. Estas ecuaciones no prestan la posibilidad de determinar todas las constantes, sino sólo $2(m-1)$ de ellas; las restantes quedan arbitrarias y, por lo tanto, *la función* $\mu(s)$ *se determina, por medio de la función dada* $\Phi^+(z)$, *no de modo único, sino con la precisión hasta una expresión que depende linealmente de*

$$2\varkappa - 1 - 2(m-1) = 2(\varkappa - m) + 1 \qquad (35.25)$$

constantes reales arbitrarias.

35.5. Reducción del problema de contorno a una ecuación integral de Fredholm. Elijamos la condición de contorno en la forma (35.2):

$$\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{m}\left[a_k(t)\,\Phi^{(k)}(t) + \int\limits_L h_k(t,\tau)\,\Phi^{(k)}(\tau)\,d\tau\right] = f(s). \qquad (35.26)$$

Consideramos que $a_m(t) \neq 0$. En adición, para hacer factible el uso de la representación integral, elaborada en el p. 35.4, impondre-

mos sobre el contorno L una condición complementaria de que él es una curva de Liapunov (véase el p. 18.1).

Con el fin de resolver el problema apliquemos la representación integral (35.18), tomando a título de la función dada $a + ib$, que figura en esta representación, el coeficiente de la derivada de mayor orden de la condición de contorno $a_m(t)$:

$$\Phi(z) = \frac{(-1)^m}{(m-1)!}\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\sigma)}{a_m(\tau)}(\tau - z)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right)d\tau + \\ + \sum_{k=0}^{m-\varkappa} c_k z^k. \quad (35.27)$$

Al derivar la última fórmula m veces sucesivas, obtendremos una representación integral para todas las derivadas de $\Phi(z)$ hasta m-ésimo orden. Con ello, los núcleos de las representaciones de la misma función y de sus derivadas hasta $(m-2)$ — ésimo orden inclusive serán funciones continuas hasta el contorno y sus valores límites pueden obtenerse mediante una sustitución directa de la variable z por su valor en el contorno t. El núcleo de la $(m-1)$-ésima derivada tendrá en el contorno una singularidad de carácter logarítmico y será fredholmiano; su valor límite en el contorno también se obtendrá por sustitución de z por t. Y sólo la m — ésima derivada, que es representada por la integral de tipo de Cauchy (35.19), al pasar a los valores de contorno, dará según la fórmula de Sojotski el núcleo singular de Cauchy.

Examinaremos más detalladamente el término que contiene la derivada de orden superior y mostraremos que para la representación integral elegida $(a + ib = a_m(t))$ la integral singular se transforma en una ordinaria:

$$\operatorname{Re}\left[a_m(t)\,\Phi^{(m)}(t)\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2}\mu(s) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{a_m(t)}{a_m(\tau)}\frac{\mu(\sigma)}{\tau - t}\,d\tau\right].$$

Transformemos la última integral:

$$\int_L \frac{a_m(t)}{a_m(\tau)}\frac{\mu(\sigma)}{\tau - t}\,d\tau = \int_L \frac{a_m(t) - a_m(\tau)}{a_m(\tau)(\tau - t)}\mu(\sigma)\,d\tau + \int_L \frac{\mu(\sigma)}{\tau - t}\,d\tau. \quad (35.28)$$

En vista de que $a_m(t)$ satisface la condición de Hölder, la primera integral es ordinaria. La cuestión, por tanto, se reduce al examen de la integral

$$\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\sigma)}{\tau - t}\,d\tau\right].$$

Recordemos el desarrollo de la integral de tipo de Cauchy en una suma de dos potenciales que fue mostrado en el § 10. De acuerdo con las fórmulas (10.3), (10.4)

$$\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\sigma)}{\tau - t}\,d\tau\right] = \frac{1}{2\pi}\int_L \mu\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_L \mu(\sigma)\,\frac{\cos(r, n)}{r}\,d\sigma, \qquad (35.29)$$

donde todas las designaciones se han tomado conforme al § 10.

Bajo las condiciones impuestas sobre el contorno L (una curva de Liapunov), el potencial de capa doble que figura en el miembro derecho de la última igualdad, representa una integral ordinaria, es decir, el núcleo $\frac{\cos(r, n)}{r}$ es el de Fredholm.

Pasemos, ahora a las variables reales, sustituyendo t, τ por funciones del arco s, σ. Como resultado, para determinar $\mu(s)$ obtendremos una ecuación de Fredholm:

$$\mu(s) + \int_L K(s, \sigma)\,\mu(\sigma)\,d\sigma = 2f(s) - \operatorname{Re}\sum_{k=0}^{m-\varkappa} c_k \omega_k(s), \qquad (35.30)$$

donde $K(s, \sigma)$ es el núcleo de Fredholm que puede escribirse explícitamente (no lo hacemos, dado que la expresión explícita no nos hará falta en lo ulterior); $\omega_k(s)$ son ciertas funciones complejas determinadas que se obtienen como resultado de introducir la suma $\sum_{k=0}^{m-\varkappa} c_k t^k$ y sus derivadas en la condición de contorno y agrupar los términos que contienen una misma constante c_k. Cuando $m \leqslant \varkappa$ en la suma debe conservarse un término $c_0\omega_0(s)$.

Al resolver la ecuación integral y aplicar la fórmula (35.27), obtendremos la solución del problema de contorno inicial (35.26). Por consiguiente, *el estudio de las cuestiones de resolubilidad del problema de contorno se reduce a la investigación de la resolubilidad de la ecuación integral* (35.30).

Antes de proceder a investigar la ecuación integral señalemos el papel doble que desempeñan las constantes c_k en la deducción de una representación integral por una parte y en la investigación de la ecuación integral, por otra parte.

Cuando deducíamos la representación integral, la función $\Phi(z)$ se consideraba definida, por lo cual también se consideraban conocidas las constantes c_k que figuraban en la representación y se determinaban mediante esta función. Contrariamente a lo dicho, al emplearse la representación integral para resolver problemas de contorno, la función $\Phi(z)$ es una incógnita que debe ser determinada. Con este motivo, las constantes que figuran en la representación integral también deben considerarse como magnitudes desconocidas

y, consecuentemente, en el estudio de las cuestiones de resolubilidad se deben tomar por parámetros arbitrarios.

De este modo, la cuestión se reduce a la investigación de resolubilidad de una ecuación integral de Fredholm, cuyo miembro derecho contiene cierto número de parámetros arbitrarios.

35.6. Cuestiones de resolubilidad del problema de contorno. Al introducir en la consideración las partes reales e imaginarias de los parámetros c_k y de las funciones $\omega_k(s)$, y al tomar en consideración que $c_{m-\varkappa}$ es real o puramente imaginario, escribamos la ecuación integral (35.30) en la forma

$$\mu(s) + \int_L K_1(s, \sigma)\, \mu(\sigma)\, d\sigma = 2f(s) + \sum_{k=1}^{2m-2\varkappa+1} \alpha_k g_k(s), \quad (35.31)$$

donde α_k son parámetros reales arbitrarios, y $g_k(s)$, funciones reales determinadas.

Antes de empezar la investigación hagamos ciertas observaciones de carácter general sobre la resolución de los problemas de contorno por el método de ecuaciones integrales.

La investigación de problemas de contorno por el método de ecuaciones integrales puede considerarse completa, siempre que, sin resolver la propia ecuación integral, se logra calcular el número de sus soluciones linealmente independientes y expresar este resultado en términos de cierta magnitud que caracteriza el problema de contorno. La investigación de esta índole puede ser realizada en dos casos:

1. Cuando el núcleo de la ecuación es una función bien determinada que no depende de funciones arbitrarias contenidas en la condición de contorno. Con el caso de tal género nos encontramos, por ejemplo, resolviendo los problemas de contorno de Dirichlet y de Neumann, donde los núcleos de las ecuaciones son, respectivamente, un núcleo del potencial de capa doble y una derivada normal del potencial de capa simple.

2. Cuando el núcleo contiene funciones arbitrarias, mas debido a ciertos razonamientos adicionales de carácter físico, geométrico o analítico deducidos del mismo sentido del problema de contorno en investigación, se puede demostrar la unicidad de la solución (irresolubilidad del problema homogéneo). Una situación de este género tiene lugar, por ejemplo, en los problemas de contorno de la hidrodinámica y de la teoría de elasticidad, cuando la investigación se realiza a base de la unicidad de solución, previamente demostrada, de los problemas mecánicos correspondientes. Precisamente con tal caso nos encontramos en el § 17, donde el núcleo contuvo una función arbitraria $\alpha(t)$, no obstante logramos demostrar de antemano, partiendo de razonamientos analíticos, que el problema con salto nulo era insoluble (p. 17.2).

En el caso que se considera el núcleo de la ecuación $K(s, \sigma)$ incorpora unos coeficientes de la condición de contorno que son funciones definidas arbitrariamente. Por otra parte, en vista de la amplia generalidad del problema de contorno en consideración, no hay posibilidad de hacer una conclusión acerca del número de soluciones, basándose directamente en la condición de contorno. Es por eso que en el caso dado no se tiene en cuenta investigar completamente el problema de contorno calculando el número de soluciones, sino dar ciertas conclusiones de la resolubilidad del problema sin resolver la ecuación integral.

1°. Examinemos detalladamente el caso de $m > \varkappa$, el cual, según muestran los resultados del p. 35.3, se caracteriza por lo que la densidad $\mu(s)$ y los coeficientes c_k (y por lo tanto, también α_k) se expresan en términos de la función $\Phi(z)$ de un modo único y, además, homogéneo, es decir, para $\Phi(z) \equiv 0$, también $\mu \equiv 0$, $\alpha_k = 0$. Lo recíproco, evidentemente, se deduce de la forma de la representación integral (35.27).

De esta propiedad llegamos fácilmente a que si las soluciones del problema de contorno $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$ son linealmente independientes, entonces resulta imposible escojer las constantes distintas de cero p_1 y p_2 tales que se satisfagan las igualdades

$$p_1\mu_1 + p_2\mu_2 \equiv 0, \quad p_1\alpha_k^{(1)} + p_2\alpha_k^{(2)} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, 2(m - \varkappa) + 1). \tag{35.32}$$

Con el fin de investigar la ecuación integral (35.31), hagamos uso del tercer teorema de Fredholm (p. 20.2). Supongamos que una ecuación homogénea, correspondiente a la ecuación dada (35.31), tiene q soluciones. En este caso, la ecuación

$$\nu_i^*(s) + \int_L K(\sigma, s)\,\nu(\sigma)\,d\sigma = 0,$$

transpuesta a la dada, también tiene q soluciones. Sea

$$\nu_1(s), \ \nu_2(s), \ \ldots, \ \nu_q(s)$$

sistema completo de estas soluciones.

Para que la ecuación (35.31) sea resoluble, es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones

$$\int_0^l \left[2f(s) + \sum_{k=1}^{2(m-\varkappa)+1} \alpha_k g_k(s)\right] \nu_j(s)\,ds = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, q). \tag{35.33}$$

Designando

$$2\int_0^l f(s)\,\nu_j(s)\,ds = -f_j, \qquad \int_0^l g_k(s)\,\nu_j(s)\,ds = g_{jk}, \tag{35.34}$$

obtenemos que la resolubilidad de la ecuación dada es equivalente a la del siguiente sistema de ecuaciones algebraicas lineales con relación a las constantes arbitrarias α_k:

$$\sum_{k=1}^{2(m-\varkappa)+1} g_{jk}\alpha_k = f_j \quad (j = 1, 2, \ldots, q). \tag{35.35}$$

Examinaremos primero un problema de contorno homogéneo ($f(s) \equiv 0$). Entonces, todas las $f_j = 0$, y el sistema (35.35) se hace homogéneo. Denotemos con r el rango de la matriz $\| g_{jk} \|$ del sistema, es decir, el número de las ecuaciones linealmente independientes que hacen parte del sistema. Obviamente, $r \leqslant$ mín $\{q, 2(m-\varkappa)+1\}$. Un sistema homogéneo de ecuaciones algebraicas es, como se sabe, siempre resoluble. Por ello, el sistema homogéneo (35.35) es incondicionalmente resoluble y tiene $2(m-\varkappa)+1-r$ soluciones linealmente independientes.

Escribiendo, sirviéndose de la resolvente, la solución general de la ecuación integral (35.31) (para $f(s) \equiv 0$)

$$\mu(s) = \sum_{k=1}^{2(m-\varkappa)+1} \alpha_k \left[g_k(s) + \int_L R(s, \sigma)\, g_k(\sigma)\, d\sigma \right] + \sum_{k=1}^{q} \beta_k \mu_k(s) \tag{35.36}$$

(donde la última suma representa una solución general de la ecuación homogénea (35.31)), vemos que esta solución depende de $2(m-\varkappa)+1-r+q$ parámetros linealmente independientes. Al introducir este valor de μ en la representación integral (35.27), encontramos que la solución del problema de contorno contendrá el mismo número de parámetros. Tomando en consideración que $r \leqslant q$, obtendremos lo siguiente:

Para $m > \varkappa$ el problema homogéneo es incondicionalmente resoluble y tiene no menos que $2(m-\varkappa)+1$ (exactamente, $2(m-\varkappa)+1+q-r$) soluciones.

Pasemos al problema de contorno no homogéneo ($f(s) \not\equiv 0$). De la álgebra lineal se sabe que si el rango de una matriz ampliada, que se obtiene por adición de una columna de términos independientes, es también r, entonces, el sistema no homogéneo (35.35) es resoluble. De aquí se puede obtener la siguiente deducción.

Teorema. *Para que el problema de contorno no homogéneo* (35.26) *sea soluble, es necesario y suficiente que el rango r de la matriz* $\| g_{jk} \|$ *del sistema* (35.35) *no crezca como resultado de la adición a la matriz de una columna de términos independientes.*

Si esta condición resulta cumplida, esto es, si el problema de contorno no homogéneo es soluble, entonces la solución depende linealmente de $2(m-\varkappa)+1+q-r$ constantes reales.

2°. Sea, ahora, $m \leqslant \varkappa$. La peculiaridad de este caso en comparación con el recién examinado consiste en lo que $\mu(s)$, expresada a través de $\Phi(z)$ en la representación integral, contiene constantes arbitrarias cuyo número, en virtud de la fórmula (35.25), es igual a $2(\varkappa-m)+1$. Por esta razón existen tales soluciones no nulas de la ecuación integral, a las cuales corresponden las soluciones nulas del problema de contorno. De aquí se deduce con facilidad que el número de soluciones del problema de contorno es en $2(\varkappa-m)+1$ menor que el número de soluciones de la ecuación integral. Teniendo en cuenta esta circunstancia, la investigación se efectúa por analogía completa con el caso antecedente. No nos detenemos aquí en los pormenores.

El razonamiento expuesto es típico para muchos problemas. Se emplea en todos los problemas de contorno de tipo general, que se consideran en el capítulo presente y, en adición, en varias otras cuestiones (por ejemplo, en la teoría de las ecuaciones diferenciales integrales de Fredholm sobre las cuales está en circulación la voluminosa literatura). En una forma esquemática este razonamiento se reduce a lo siguiente.

Para resolver un problema, se escribe una ecuación integral cuyo miembro derecho depende linealmente de cierto número de parámetros. Se hace una suposición acerca del número de soluciones de la ecuación integral transpuesta y, a base del tercer teorema de Fredholm, se obtienen las condiciones de resolubilidad. Se tiene, como resultado, un sistema de ecuaciones algebraicas lineales respecto a los parámetros. Hechas ciertas suposiciones acerca del rango del sistema, llegan a la conclusión sobre la resolubilidad y el número de soluciones del problema de partida.

De suerte que la investigación se realiza conforme al esquema «si..., entonces...» sin tener la posibilidad de indicar, en el caso general, cuando exactamente se cumple este «si». Los resultados precisos se logran obtener sólo en ciertos casos particulares. Uno de los resultados, de carácter general, lo mostraremos en el punto que sigue.

35.7. Otros métodos de investigación. Al comienzo del párrafo ya hemos mencionado otros métodos de resolver el problema en consideración propuestos por I. N. Vekua y F. D. Gájov. El método de I. N. Vekua consiste en el empleo de una representación integral, obtenida por él en relación con la resolución del problema dado. Esta representación en nuestras designaciones puede escribirse en la forma

$$\Phi(z)=\frac{(-1)^m}{(m-1)!}\frac{1}{2\pi i}\int_L \mu(\sigma)\left(1-\frac{z}{\tau}\right)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right)d\sigma+c_0. \quad (35.37)$$

Es fácil ver que esta representación puede ser obtenida de la representación integral de D. I. Sherman (35.23), si ponemos

$$a + ib = \tau^{m-1}\tau'.$$

El índice de la última expresión es m, lo que precisamente corresponde a la fórmula (35.23). Haciendo uso de esta representación[1]), I. N. Vekua reduce el problema de contorno a una ecuación integral singular con núcleo de Cauchy (con la mayor facilidad se podría obtener el núcleo de Hilbert), cuyo índice es igual a 2 $(m - \varkappa)$, donde $\varkappa = \operatorname{Ind} a_m(t)$. Al aplicar a lo último la teoría de ecuaciones integrales singulares, él estableció los resultados obtenidos en el punto antecedente[2]).

En el método de F. D. Gájov se utilizan las fórmulas de Hilbert que ligan los valores de contorno de las partes real e imaginaria de una función analítica. Para un círculo estas fórmulas, que tienen una forma bastante simple, fueron establecidas en el p. 6.2. Para un contorno arbitrario las fórmulas tienen una forma más compleja (véase el problema 23 al cap. I) que requiere la presencia de la función de Green.

Este método conduce a las ecuaciones integrales cuyos núcleos son más complejos en comparación con los dos mencionados más arriba, a consecuencia de lo cual surgen ciertas dificultades en la resolución práctica del problema. No obstante, en principio, este método lleva ventaja ante los otros en la investigación de la cuestión de resolubilidad, puesto que aquí no debemos superar las dificultades relacionadas con la elaboración de representaciones integrales y, además, la interpretación de los resultados obtenidos resulta más fácil, ya que la incógnita de la ecuación integral es la propia función buscada del problema de contorno y no función auxiliar (la densidad de una representación integral) como sucede en los otros métodos.

Con el fin de economizar el lugar, no entramos en los pormenores de otros métodos de la resolución (véanse las ediciones anteriores).

Llamaremos *parte principal del problema de contorno un* conjunto de términos extraintegrales que contienen derivadas de orden superior, este conjunto está igualado a cero. Por la *parte complementaria* se comprenderán los demás términos de la condición de contorno.

---

[1]) I. N. Vekua dio su representación antes de que lo hizo D. I. Sherman.

[2]) I. N. Vekua enuncia las condiciones de resolubilidad también en otra forma, con ayuda de la noción de completitud del núcleo. El hecho de que el núcleo dado es completo o no puede ser establecido a través de la resolución de la ecuación integral correspondiente. Por ello, los resultados exactos proporcionados por I. N. Vekua son válidos sólo para los casos en que el núcleo no contiene funciones arbitrarias (problema de Dirichlet y problema de Hilbert).

La parte principal tendrá por expresión:

$$a_m(s)\frac{d^m u}{ds^m}+b_m(s)\frac{d^m v}{ds^m}=0 \quad \text{(en la forma de F.D. Gájov)}, \tag{35.38}$$

$$\operatorname{Re}[c_m(t)\,\Phi^{(m)}(t)]=0 \quad \text{(en la forma de I.N. Vekua)}. \tag{35.39}$$

Al analizar los resultados obtenidos llegamos a la conclusión de que éstos se reducen, de hecho, a los dos siguientes:

1) *El problema puede ser reducido a una ecuación integral lineal de Fredholm.* (Las ecuaciones singulares obtenidas por los métodos de F. D. Gájov y I. N. Vekua constituyen sólo una etapa intermedia.)

2) *Cuando* $\varkappa \geqslant 0$, *el número de soluciones del problema de contorno no es inferior al número de soluciones de su parte principal*[1]).

Surge, naturalmente, la pregunta: ¿cuándo el número de soluciones del problema general es mayor (para $\varkappa \geqslant 0$) que el número de soluciones de su parte principal, esto es, cuándo los términos complementarios cambian el número de soluciones? Si se considera cada problema por separado, nada puede decirse de modo concreto, mas una conclusión interesante se puede obtener para todo el conjunto de problemas con la parte principal común.

Si reducimos la condición de contorno (35.2) a una ecuación integral singular equivalente, recurriendo con este fin a uno de los métodos indicados en el presente punto, entonces resulta fácil calcular que la parte característica de la ecuación dependerá sólo de la parte principal del problema de contorno. Si en la parte complementaria introducimos, a título de factor, un parámetro arbitrario λ entonces a tal problema de contorno le corresponderá una ecuación integral singular cuyo término regular contendrá el parámetro λ como un factor. Según proviene de las investigaciones realizadas en el p. 24.6, el número de sus soluciones es superior al número de soluciones de la correspondiente ecuación característica sólo para el conjunto de valores del parámetro λ los cuales son valores propios del núcleo fredholmiano, por consiguiente, sólo para el conjunto discreto de valores de λ con un punto límite en el infinito.

Puesto que el conjunto de todos los valores posibles de λ es un continuo, se puede deducir: *el número de soluciones del problema de contorno general* (35.1)—(35.3) *coincide, en el caso general, con el número de soluciones de su parte principal. Los casos de no coincidencia son excepcionales y se realizan sólo en el conjunto discreto de los valores del parámetro* λ. (Véase, además el p. 36.2)

---

[1]) Para $\varkappa < 0$ este resultado puede ser falso, puesto que el problema elemental tiene m soluciones $\Phi_k(z) = z^k$ ($k = 0, 1, \ldots, m-1$), mientras que el problema general puede no tener ni una de ellas.

§ 36. Problema de contorno de tipo del problema de Riemann con una condición de contorno que contiene derivadas

El problema de contorno de Riemann puede ser generalizado en el mismo sentido que en el párrafo antecedente se lo hizo para el problema de Hilbert. El problema generalizado se enunciará así:

Sea dado un simple contorno cerrado y suave L que divide el plano en dos dominios D^+, D^-. Hállense dos funciones $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$, analíticas, respectivamente, en los dominios D^+, D^- (una función analítica a trozos $\Phi(z)$), que satisfacen en el contorno la siguiente condición de contorno:

$$\sum_{k=0}^{n}\left[a_k(t)\frac{d^k\Phi^+(t)}{dt^k}+\int_L A_k(t,\tau)\frac{d^k\Phi^+(\tau)}{d\tau^k}\,d\tau\right]-$$

$$-\sum_{k=0}^{p}\left[b_k(t)\frac{d^k\Phi^-(t)}{dt^k}+\int_L B_k(t,\tau)\frac{d^k\Phi^-(\tau)}{d\tau^k}\,d\tau\right]=f(t), \qquad (36.1)$$

donde $a_k(t)$, $b_k(t)$ son funciones continuas dadas, con la particularidad de que $a_n(t)$, $b_p(t)$ satisfacen la condición de Hölder y no se reducen a cero; $A_k(t,\tau)$, $B_k(t,\tau)$ son núcleos fredholmianos.

El método de resolución del problema de contorno enunciado, al igual que del problema resuelto en el § 35, consiste en su reducción a una ecuación integral y L. G. Magnaradze 2)* fue primero en hacerlo. Aquí, no obstante, expondremos un método más simple de resolución, apoyándonos en una representación integral especial, dada por Yu. M. Krikunov 1)*.

36.1. Representación integral para las funciones analíticas a trozos. La representación integral, que se elabora más abajo, se necesita para expresar las funciones buscadas y todas sus derivadas contenidas en la condición de contorno (36.1) en términos de una función incógnita. Además, el núcleo de la representación integral se elige de una manera tal que las derivadas de orden superior se expresen por una integral de tipo de Cauchy.

Supondremos que los valores límites en el contorno de n-ésima derivada de la función $\Phi^+(z)$ y de p-ésima derivada de la función $\Phi^-(z)$ satisfacen en L la condición de Hölder. Para concretar, convengamos en que el origen de coordenadas pertenece al dominio D^+.

Demostremos que *las funciones $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$ pueden ser representadas mediante las fórmulas siguientes:*

$$\Phi^+(z)=\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\frac{1}{2\pi i}\int_L \mu(\tau)(\tau-z)^{n-1}\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right)d\tau+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{c_k}{k!}z^k, \qquad (36.2)$$

$$\Phi^-(z)=\frac{(-1)^p}{(p-1)!}\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\tau)}{\tau^p}\left[(\tau-z)^{p-1}\ln\left(1-\frac{\tau}{z}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{p-2}\beta_k\tau^{p-k-1}z^k\right]d\tau+\Phi^-(\infty), \qquad (36.3)$$

donde $\mu(\tau)$ *es una función compleja que satisface la condición de Hölder*; c_k *son constantes complejas, con la particularidad de que* $\mu(\tau)$ *y* c_k *se determinan según* $\Phi^+(z)$ y $\Phi^-(z)$ *de un modo único*:

$$\beta_k=\frac{(-1)^{k+1}C_{p-1}^{k+1}}{1}+\frac{(-1)^{k+2}C_{p-1}^{k+2}}{2}+\ldots+\frac{(-1)^{p-1}C_{p-1}^{p-1}}{p-k-1}$$

($C_{p-1}^{k+1}, C_{p-1}^{k+2}, \ldots, C_{p-1}^{p-1}$ *son coeficientes binomiales*). *Por* $\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right)$ *se entiende una rama que desaparece para* $z=0$. *y por* $\ln\left(1-\frac{\tau}{z}\right)$, *una rama que desaparece para* $z=\infty$.

Demostración. Al deducir la representación que satisfaga las condiciones establecidas al principio, es necesario recordar que la derivada de p-ésimo orden de una función analítica se reduce en el infinito a cero de orden $p+1$. Teniendo en cuenta esta circunstancia, al deducir las fórmulas (36.2), (36.3), partiremos de lo que la función $\frac{d^n\Phi^+(z)}{dz^n}$, analítica en D^+, y la función $z^p\frac{d^p\Phi^-(z)}{dz^p}$, que es analítica en D^- y desaparece en el infinito, pueden ser representadas por una integral de tipo de Cauchy de la misma densidad (p. 14.2):

$$\frac{d^n\Phi^+(z)}{dz^n}=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\mu(\tau)}{\tau-z}d\tau, \qquad (36.4)$$

$$\frac{d^p\Phi^-(z)}{dz^p}=\frac{z^{-p}}{2\pi i}\int_L\frac{\mu(\tau)}{\tau-z}d\tau. \qquad (36.5)$$

La densidad $\mu(t)$ se determina en términos de las funciones $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$ mediante la fórmula de Sojotski:

$$\mu(t)=\frac{d^n\Phi^+(t)}{dt^n}-t^p\frac{d^p\Phi^-(t)}{dt^p}. \qquad (36.6)$$

Las representaciones para las funciones $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$ se obtienen de las igualdades (36.4), (36.5) después de integrarlas, respectivamente, n y p veces respecto a z.

De la identidad (35.17), establecida en el p. 35.4:

$$\frac{d^n}{dz^n}\left[\frac{(-1)^n}{(n-1)!}(\tau-z)^{n-1}\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right)\right]=\frac{1}{\tau-z}$$

se desprende que el resultado, obtenido después de integrar n veces respecto a z ambos miembros de la igualdad (36.4), puede ser representado en la forma (36.2).

Las constantes arbitrarias de integración c_k pueden determinarse del desarrollo de ambos miembros de la igualdad (36.2) en serie en el entorno del origen de coordenadas:

$$\frac{1}{k!}[\Phi^+(0)]^{(k)} = -\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\frac{\alpha_k}{2\pi i}\int_L \mu(\tau)\,\tau^{n-k-1}d\tau + \frac{c_k}{k!}, \quad (36.7)$$

donde

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_k = \frac{1}{k} - \frac{C_{n-1}^1}{k-1} + \frac{C_{n-1}^2}{k-2} - \ldots + \frac{(-1)^{k-1}C_{n-1}^{k-1}}{1}$$

($k = 1, 2, \ldots, n-1$); compárese con las igualdades (35.20).

De las igualdades (36.7) se determinan todas las constantes. Por consiguiente, la representación (36.2) está demostrada. Al introducir en la igualdad (36.2) los valores de los coeficientes determinados de las ecuaciones (36.7), se puede comunicar a la representación de $\Phi^+(z)$ otra forma, a saber:

$$\Phi^+(z) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\frac{1}{2\pi i}\int_L \mu(\tau)\left[(\tau-z)^{n-1}\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right) + \sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k\tau^{n-k-1}z^k\right]d\tau + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}[\Phi^+(0)]^{(k)}z^k. \quad (36.8)$$

La última fórmula es muy cómoda para ser utilizada en aquellos casos cuando los valores de $\Phi^+(0)$, $[\Phi^+(0)]'$, $\ldots$, $[\Phi^+(0)]^{(n-1)}$ se definen de antemano. Entonces, la representación (36.8) no contendrá ningunas constantes arbitrarias. Si los valores iniciales de la función y de las derivadas no están conocidas con anticipación, será más cómodo servirse de la representación en la forma (36.2).

Al aplicar, por analogía con lo que se hacía en la deducción de la identidad (35.17), el método de inducción, obtendremos la siguiente identidad:

$$\frac{(-1)^p}{(p-1)!}\tau^{-p}\frac{d^p}{dz^p}\left[(\tau-z)^{p-1}\ln\left(1-\frac{\tau}{z}\right)\right] = \frac{1}{z^p(\tau-z)}. \quad (36.9)$$

Partiendo de esto, llegamos a que el resultado, obtenido después de integrar p veces ambos miembros de la igualdad (36.5), tendrá

por expresión

$$\Phi^-(z)=\frac{(-1)^p}{(p-1)!}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\mu(\tau)}{\tau^p}(\tau-z)^{p-1}\ln\left(1-\frac{\tau}{z}\right)d\tau+$$

$$+\sum_{k=0}^{p-1} d_k z^k. \quad (36.10)$$

Para determinar las constantes de integración d_k, hagamos uso del desarrollo de ambos miembros de la última igualdad en el entorno $z=\infty$. Teniendo presente que el desarrollo de la función $\Phi^-(z)$, analítica en D^-, no contiene potencias positivas, tendremos

$$d_0=\frac{(-1)^p}{(p-1)!}\frac{\beta_0}{2\pi i}\int\limits_L \mu(\tau)\tau^{-1}d\tau+\Phi^-(\infty),$$

$$d_k=\frac{(-1)^p}{(p-1)!}\frac{\beta_k}{2\pi i}\int\limits_L \mu(\tau)\tau^{-k-1}d\tau \quad (k=1, 2, \ldots, p-2),$$

$$d_{p-1}=0.$$

Aquí, β_k se definen mediante las fórmulas

$$\beta_k=\sum_{j=k+1}^{p-1}\frac{(-1)^j C_{p-1}^j}{j-k}.$$

Sustituyendo los valores encontrados de d_k en la fórmula (36.10), obtendremos la fórmula (36.3).

De este modo, las representaciones integrales (36.2), (36.3) quedan enteramente demostradas.

36.2. Resolución del problema de contorno. Para resolver el problema de contorno (36.1), hagamos uso de las representaciones integrales (36.2) y (36.3) que acabamos de establecer.

Derivando sucesivamente n veces la igualdad (36.2) y p veces, la igualdad (36.3), obtenemos las representaciones integrales para todas las derivadas de las funciones $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$ hasta los órdenes correspondientes. Los núcleos de estas derivadas, cuando z tiende a un punto del contorno t, se comportan igual que los núcleos de las derivadas de la representación integral (35.27), es decir, los núcleos de las derivadas respectivamente hasta $(n-1)$-ésimo y $(p-1)$-ésimo órdenes inclusive son fredholmianos; las derivadas de órdenes superiores (n y p, respectivamente) se expresarán mediante las integrales de tipo de Cauchy (36.4), (36.5), y sus valores límites según

las fórmulas de Sojotski tendrán por expresión

$$[\Phi^+(t)]^{(n)} = \frac{1}{2}\mu(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\tau)}{\tau - t}\,d\tau,$$

$$[\Phi^-(t)]^{(p)} = -\frac{1}{2}\frac{\mu(t)}{t^p} + \frac{t^{-p}}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\tau)}{\tau - 1}\,d.$$

Al sustituir los valores de contorno de las funciones $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ y de sus derivadas en la condición de contorno (36.1), obtendremos, para determinar la función $\mu(t)$, una ecuación integral singular

$$a(t)\,\mu(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\mu(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \int_L k(t, \tau)\,\mu(\tau)\,d\tau = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k \omega_k(t), \quad (36.11)$$

donde

$$a(t) = \frac{1}{2}[a_n(t) + t^{-p}b_p(t)], \quad b(t) = \frac{1}{2}[a_n(t) - t^{-p}b_p(t)], \quad (36.12)$$

donde $k(t, \tau)$ es un núcleo fredholmiano bien determinado, y $\omega_k(t)$ son funciones obtenidas por agrupación de los términos que contienen la misma constante c_k.

Como

$$a(t) + b(t) = a_n(t) \neq 0 \quad \text{y} \quad a(t) - b(t) = t^{-p}b_p(t) \neq 0,$$

la ecuación (36.11) es integral singular con núcleo de Cauchy de tipo normal y a ella puede ser aplicada la teoría general de estas ecuaciones (cap. III).

La investigación de las cuestiones de resolubilidad puede realizarse de acuerdo con el mismo procedimiento que se ha usado en el § 35. En este caso dos métodos son posibles: o bien se efectúa la investigación directa de la ecuación singular con la ayuda de los teoremas de Noether (como lo hizo I. N. Vekua), o bien se hace al principio una regularización y después se aprovechan los teoremas de Fredholm (como se ha hecho en el p. 35.6). Sin entrar en los pormenores señalemos los resultados principales de la investigación.

En vista de la fórmula (21.5) el coeficiente del problema de Riemann, correspondiente a la ecuación (36.11), tendrá por expresión:

$$G(t) = \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)} = t^{-p}\frac{b_p(t)}{a_n(t)}. \quad (36.13)$$

Denotemos

$$\operatorname{Ind}\frac{b_p(t)}{a_n(t)} = \operatorname{Ind} b_p(t) - \operatorname{Ind} a_n(t) = \varkappa_1 \quad (36.14)$$

y llamémoslo *índice del problema de contorno* (36.1). Entonces, el índice de la ecuación integral singular se determinará mediante la fórmula

$$\varkappa = \varkappa_1 - p. \tag{36.15}$$

Teniendo en cuenta que en el segundo miembro de la ecuación están contenidos n parámetros arbitrarios y también la propiedad de una ecuación integral singular (p. 23.3) de que el número de sus soluciones no es inferior al número de soluciones de la correspondiente ecuación característica, llegamos a la conclusión: *el número de soluciones linealmente independientes del problema de contorno* (36.1) *no es menor que* $\varkappa_1 - p + n$, *donde* $\varkappa_1$ *es el índice del problema*, n *es el orden superior de la derivada de la función* $\Phi^+(z)$ *que figura en la condición de contorno*, *y* p, *el orden correspondiente de la derivada de la función* $\Phi^-(z)$.

Esto es un resultado que puede ser obtenido sin resolver la propia ecuación (o, que es lo mismo, su ecuación transpuesta).

Por analogía con el p. 35.7, llamaremos parte principal del problema de contorno al conjunto de términos extraintegrales que contiene derivadas de orden superior y está igualado a cero; los términos restantes de la condición de contorno reciben el nombre de la parte complementaria. La parte principal en este caso se escribirá en la forma

$$a_n(t)[\Phi^+(t)]^{(n)} - b_p(t)[\Phi^-(t)]^{(p)} = 0 \tag{36.16}$$

o bien

$$[\Phi^+(t)]^{(n)} = \frac{b_p(t)}{a_n(t)}[\Phi^-(t)]^{(p)}.$$

Los resultados de la investigación, que se obtienen sin resolver la ecuación, se reducen a los dos siguientes:

1. *El problema de contorno* (36.1) *puede ser reducido a una ecuación integral lineal* (*primero a una singular y, después, a una fredholmiana*).

2. *Cuando* $\varkappa \geqslant 0$, *el número de soluciones del problema no es inferior al número de soluciones de su parte principal*[1]).

El primer resultado es obvio, explicaremos el segundo. Examinemos la parte principal (36.16). Tomando $[\Phi^+(z)]^{(n)}$, $[\Phi^-(z)]^{(p)}$ por funciones buscadas, podemos considerar el último problema de contorno como un problema ordinario de Riemann. La circunstancia de que de la función buscada «interior» sirve aquí una derivada de la función analítica en el dominio D^+, no impone sobre esta función ningunas condiciones complementarias. Mientras tanto, de la condición de que la función «exterior» es p-ésima derivada de una función,

[1]) Véase la nota al pie de la pág. 379

analítica en D^-, sirve el hecho de su reducción en el infinito a cero de $(p+1)$-ésimo orden.

Por consiguiente, el problema de contorno de Riemann (36.16) se debe resolver en la clase de funciones que se reducen en el infinito a cero de $(p+1)$-ésimo orden.

Es fácil advertir que el número de tales soluciones será $\varkappa_1 - p$, donde, como antes, $\varkappa_1 = \operatorname{Ind} \frac{b_p(t)}{a_n(t)}$ es el índice del problema. Siendo integrada la función «interior», aparecerán n nuevas constantes arbitrarias; la integración de la función «exterior» no ofrece nuevas constantes arbitrarias, puesto que todas las funciones que aparecen como resultado de integración, deben en el infinito reducirse a cero. Por lo tanto, el problema (36.16) tiene $\varkappa_1 - p + n$ soluciones, lo que concuerda con el resultado obtenido anteriormente. Se recomienda al lector realizar la investigación, adhiriéndose al esquema del p. 34.6 y apoyándose, en el caso dado, no en los teoremas de Fredholm, sino en los de Noether.

Consideraremos en conclusión el caso en que el número de soluciones del problema de contorno general resulte mayor que el número de soluciones de su parte principal (véase el p. 35.7). Al despejar en la condición de contorno (36.1) la parte principal (36.16), introduzcamos en la parte complementaria, a título de un factor, el parámetro arbitrario λ. Procediendo de una manera igual que en lo anterior, llegaremos, en lugar de (36.11), a una ecuación integral singular

$$a(t)\mu(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\mu(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \lambda \int_L k(t,\ \tau)\varphi(\tau)\,d\tau = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^k. \qquad (36.11')$$

Apoyándonos en los resultados del p. 24.6, con la ayuda de los razonamientos, análogos a los realizados en el p. 35.7, llegaremos a la conclusión de que, cuando $\varkappa \geqslant 0$, el número de soluciones linealmente independientes del problema de contorno completo (36.1) puede ser mayor que el de soluciones de su parte principal (36.16) sólo para el conjunto discreto de valores del parámetro λ, provisto de un punto límite en el infinito. Por consiguiente, el número de soluciones del problema general, en el caso general, coincide con el número de soluciones de su parte principal. Los casos de perturbación de esta regla son excepcionales.

36.3. Nuevo método de resolución del problema. V. S. Rogozhin 3)* obtuvo una nueva representación integral que permite reducir el problema de contorno (36.1), dejando a parte la ecuación integral singular, inmediatamente a la ecuación de Fredholm, por analogía con lo que se ha hecho en los pp. 35.3—35.6 para el problema

de contorno generalizado de tipo del problema de Hilbert. Esto se consigue por introducción en la densidad de la representación integral (36.2) de un factor adicional, el cual se elige a continuación de un modo correspondiente.

Se establece lo siguiente:

Sea c (t) una función dada en L que satisface la condición de Hölder y no se reduce a cero. Si $n \geqslant \varkappa = \operatorname{Ind} c(t)$, *entonces para una función analítica a trozos* $\Phi^{\pm}(z)$, *cuyos valores límites de las derivadas* $\Phi^{+(n)}(t)$, $\Phi^{-(p)}(t)$ *satisfacen en el contorno la condición de Hölder, se verifica la representación integral*

$$\Phi^{+}(z) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\tau)}{c(\tau)} (\tau - z)^{n-1} \ln\left(1 - \frac{z}{\tau}\right) d\tau + \\ + \sum_{k=0}^{n-\varkappa-1} g_k z^k, \qquad (36.17)$$

$$\Phi^{-}(z) = \frac{(-1)^p}{(p-1)!} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\tau)}{\tau^p} \left[(\tau - z)^{p-1} \ln\left(1 - \frac{\tau}{z}\right) + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{p-2} \beta_k \tau^{p-k-1} z^k \right] d\tau + \Phi^{-}(\infty), \qquad (36.18)$$

donde $\mu(\tau)$ *es una función compleja que satisface la condición de Hölder,* g_k *son constantes, determinadas mediante* $\Phi^{\pm}(t)$, *y* β_k *se definen por las expresiones*

$$\beta_k = \sum_{j=k+1}^{p-1} \frac{(-1)^j C_{p-1}^j}{j-k}.$$

Si $n = \varkappa$, *en la fórmula* (36.17) $\Sigma g_k z^k$ *se debe cambiar por* $g_0 = \Phi^{+}(0)$.

Igual que en el p. 35.4, la demostración se efectúa para tres variantes. He aquí los razonamientos para una de ellas: $n > \varkappa > 0$. Al derivar las fórmulas (36.17), (36.18) n y p veces, respectivamente, e introducir las designaciones simplificadas

$$\Phi^{+(n)}(z) = F^{+}(z), \quad z^p \Phi^{-(p)}(z) = F^{-}(z),$$

llegamos a las igualdades

$$F^{+}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\tau)}{c(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z}, \qquad (36.19)$$

$$F^{-}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\tau)}{\tau - z} d\tau. \qquad (36.20)$$

Al designar las funciones, definidas mediante unas integrales en los dominios complementarios, con $\Psi^-(z)$, $\Psi^+(z)$, respectivamente, según las fórmulas de Sojotski tendremos

$$F^+(t)+\Psi^-(t)=\frac{\mu(t)}{c(t)}, \quad \Psi^+(t)-F^-(t)=\mu(t). \tag{36.21}$$

Eliminando $\mu(t)$, llegaremos, para determinar $\Psi^{\pm}(z)$, al problema de Riemann

$$\Psi^+(t) = c(t)\,\Psi^-(t) + c(t)\,F^+(t) + F^-(t), \tag{36.22}$$

el cual se debe resolver bajo la condición de que $\Psi^-(\infty) = 0$. Su término independiente se reduce a cero sólo cuando $F(z) \equiv 0$. Efectivamente, igualándolo a cero, obtendríamos un problema de contorno de Riemann homogéneo con el coeficiente $-\frac{1}{c(t)}$ cuyo índice es negativo. De aquí resultaría que $F(z) = 0$. Conforme al p. 14.5, el problema (36.22) se resuelve incondicionalmente y su solución (la fórmula (14.18′)) contiene linealmente $\varkappa$ constantes arbitrarias.

Las constantes g_k, β_k, que figuran en la representación integral, como también $\varkappa$ constantes arbitrarias, contenidas en $\mu(t)$, se determinan igualando los primeros n términos del desarrollo de ambos miembros (36.17) en el entorno del origen de coordenadas a los primeros p términos (36.18) en el entorno de un punto infinitamente alejado. Esta operación la ya hemos realizado el en punto anterior y también en el p. 35.4, de suerte que no vamos a hacer lo mismo en este caso.

El caso de que $\varkappa < 0$ se diferencia en lo que para demostrar la representación nos vemos obligados a resolver un problema de Riemann con índice negativo. Después de derivar (36.17) quedan $|\varkappa|$ constantes arbitrarias que se escojen de una manera tal que este problema se haga resoluble. Lo demás se realiza de un modo más o menos semejante al caso anterior.

Haciendo uso de la representación integral obtenida, se puede reducir el problema de contorno (36.1) a una ecuación integral. Si en esta operación tomamos $c(t) = \frac{a_n(t)}{t^p b_p(t)}$, resulta fácil calcular que los términos, en los cuales están contenidas las derivadas de orden superior, nos darán una integral con núcleo

$$\left[\frac{b_p(\tau)}{\tau^p a_n(\tau)} - \frac{b_p(t)}{t^p a_n(t)}\right]\frac{1}{\tau - t}$$

y, por lo tanto, la ecuación integral será fredholmiana.

La investigación de la ecuación integral puede ser efectuada de una manera sumamente análoga a la aplicada en el p. 35.6.

36.4. Ecuación diferencial integral singular. Con el problema de contorno (36.1) está íntimamente ligada una ecuación diferencial integral con núcleo de Cauchy de tipo siguiente:

$$\sum_{k=0}^{p} \alpha_k(t)\, \nu^{(k)}(t) + \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{P_k(t, \tau)}{\tau - t}\, \nu^{(k)}(\tau)\, d\tau = f(t), \qquad (36.23)$$

donde $\alpha_k(t)$, $f(t)$, $P_k(t, \tau)$ son funciones dadas, que satisfacen la condición de Hölder, y $\nu(t)$ es una función desconocida que se busca en la clase de funciones cuya derivada de r-ésimo orden ($r = \max(p, q)$ satisface la condición de Hölder.

Escribamos la ecuación (36.23) en una forma en la cual la parte característica está despejada explícitamente:

$$\sum_{k=0}^{p} \alpha_k(t)\, \nu^{(k)}(t) + \sum_{k=0}^{q} \frac{\beta_k(t)}{\pi i} \int_L \frac{\nu^{(k)}(\tau)}{\tau - t}\, d\tau + \sum_{k=0}^{q} \int_L Q_k(t, \tau)\, \nu^{(k)}(\tau)\, d\tau = f(t), \qquad (36.24)$$

donde se pone $\beta_k(t) = P_k(t, t)$, $Q_k(t, \tau) = \frac{1}{\pi i} \cdot \frac{P_k(t, \tau) - P_k(t, t)}{\tau - t}$. Es evidente que $\beta_k(t)$ satisfacen la condición de Hölder y $Q_k(t, \tau)$ son núcleos fredholmianos.

Supondremos también que las magnitudes $\alpha_p(t)$ para $p > q$, $\beta_q(t)$ para $q > p$, $\alpha_p(t) \pm \beta_q(t)$ para $p = q$, en ningún punto se reducen a cero.

Introduzcamos una función analítica mediante una integral de tipo de Cauchy cuya densidad es la solución buscada de la ecuación diferencial integral

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\nu(\tau)}{\tau - z}\, d\tau. \qquad (36.25)$$

De acuerdo con las fórmulas de Sojotski (4.14), (4.15), tendremos

$$\nu^{(k)}(t) = \frac{d^k \Phi^+(t)}{dt^k} - \frac{d^k \Phi^-(t)}{dt^k}, \qquad (36.26)$$

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\nu^{(k)}(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = \frac{d^k \Phi^+(t)}{dt^k} + \frac{d^k \Phi^-(t)}{dt^k}.$$

Sustituyendo las expresiones (36.26) en la ecuación (36.24), obtendremos

$$\sum_{k=0}^{r}\left[a_k(t)\frac{d^k\Phi^+(t)}{dt^k}+\int_L Q_k(t,\ \tau)\frac{d^k\Phi^+(\tau)}{d\tau^k}\,d\tau\right]-$$

$$-\sum_{k=0}^{r}\left[b_k(t)\frac{d^k\Phi^-(t)}{dt^k}+\int_L Q_k(t,\ \tau)\frac{d^k\Phi^-(\tau)}{d\tau^k}\,d\tau\right]=f(t), \qquad (36.27)$$

donde

$$a_k(t)=\alpha_k(t)+\beta_k(t), \quad b_k(t)=\alpha_k(t)-\beta_k(t)$$
$$(k=0,1,\ \ldots,\ r),$$

además, se debe considerar que $\alpha_k(t)\equiv 0$ para $k>p$, cuando $p<q$; $\beta_k(t)\equiv 0$ para $k>q$, cuando $p>q$.

El problema de contorno (35.27) es, obviamente, un caso particular del problema (35.1), examinado más arriba y no se necesitan aquí los razonamientos relacionados con su resolución.

Al hallar la solución del problema (35.27), según la fórmula de Sojotski

$$\nu(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t)$$

obtendremos la solución para la ecuación diferencial integral de partida (36.23).

§ 37. Problema de contorno de Hilbert para un dominio múltiplemente conexo

La singularidad de una función analítica, definida en un dominio múltiplemente conexo, consiste en lo que ésta, quedando analítica en el dominio, es decir, admitiendo en el entorno de cada punto del dominio el desarrollo en una serie de Taylor, puede resultar no uniforme. Para el problema de Riemann, donde la condición de contorno se da en una forma compleja, esta circunstancia no ejerce influencia considerable en su solución. La definición unívoca de la condición de contorno en aquel caso conducía necesariamente a una solución unívoca. No es así en el caso en que la función analítica se busca según una condición de contorno, definida en la forma real, como ocurre en el problema de Hilbert. Aquí, el orden de conexión del dominio influye considerablemente en la resolubilidad del problema de contorno y en el número de sus soluciones.

La exposición que viene abajo consta de tres partes independientes. En la primera parte, al problema de Hilbert se le aplicará el método de factor de regularización (véase el § 29) con algunos cambios engendrados por el hecho de que el dominio es múltiplemente

conexo. La atención principal en este caso se presta a la investigación de la posibilidad de resolver efectivamente el problema de Hilbert mediante operadores de Schwarz. En la segunda parte el problema de Hilbert se investiga por el método de ecuaciones integrales. La tercera parte se dedica a la investigación de los casos singulares del problema de Hilbert homogéneo, que no admiten el estudio por el método de ecuaciones integrales.

Por analogía con lo hecho en el cap. IV empecemos la exposición por unas cuestiones auxiliares.

37.1. Problema de Dirichlet para un dominio múltiplemente conexo. Sea D un dominio $(m + 1)$-mente conexo, limitado con las simples curvas suaves $L_0, L_1, \ldots, L_m$ que no se intersecan, con la particularidad de que L_0 envuelve las demás curvas. Impondremos sobre los contornos una condición complementaria de que ellos son curvas de Liapunov (véase el p. 18.1).

El problema clásico de Dirichlet puede enunciarse así:

PROBLEMA DE DIRICHLET. *Hállese una función $u(x, y)$, que sea armónica en D^+ y continua en $D^+ + L$, según la condición de contorno*

$$u = f(s), \tag{37.1}$$

donde $f(s)$ es una función continua definida en el contorno.

Si el contorno L_0 está ausente y, consecuentemente, el dominio D^+ es infinito, se impone una condición más, a saber, que la función u sea acotada en el infinito.

Para un dominio simplemente conexo ya aprovechamos varias veces el hecho de que el problema de Dirichlet es resoluble y, además, de un modo único. Lo mismo subsiste también para el caso enunciado de un dominio múltiplemente conexo,siempre que sobre la función buscada no se imponen condiciones adicionales. En algunas aplicaciones (para nuestros razonamientos ulteriores inclusive) se requiere que la función buscada sea no sólo armónica, sino que constituya, además, la parte real de una función analítica uniforme. (En el caso general, es la parte real de una función analítica no uniforme.) Bajo esta condición adicional el problema de Dirichlet resulta, en general, no resoluble. Para hacerla resoluble, es necesario introducir en la definición de la función en el contorno ciertos elementos arbitrarios, lo que nos lleva al así llamado problema modificado de Dirichlet.[1])

PROBLEMA MODIFICADO DE DIRICHLET. *Hállese una función $u(x, y)$ que constituye la parte real de cierta función $\Phi(z)$, analítica y uniforme en el dominio D^+, y que es continua hasta el contorno, partiendo de la condición de contorno*

$$u = f(s) + h(s), \tag{37.2}$$

[1]) Este término se ha introducido por N. I. Musjelishvili.

donde $h(s)$ toma en los contornos L_j valores constantes arbitrarios h_j que no se dan de antemano.

Las constantes h_j se determinan, como lo muestran las investigaciones, por las condiciones del problema (el requisito de que $\Phi(z)$ sea uniforme), si se prefija una de ellas. Para lo sucesivo convengamos en considerar $h_0 = 0$.

La unicidad de la solución del problema clásico de Dirichlet se desprende de la suposición bien conocida de que una función armónica, distinta de una constante, alcanza mínimo o máximo en el contorno.

Con el fin de demostrar la unicidad de la solución del problema modificado, basta establecer que el problema homogéneo ($f(s) \equiv 0$) tiene sólo una solución nula.

Partimos de la fórmula bien conocida en la teoría de funciones armónicas

$$\iint\limits_{D^+} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy = \int\limits_L u \frac{\partial u}{\partial n}\, ds.$$

Al aplicar la ecuación de Cauchy—Riemann[1]) y los datos de contorno, tenemos

$$\int\limits_L u \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = -\int\limits_L u \frac{\partial v}{\partial s}\, ds = -\sum_{j=1}^{m} h_j \int\limits_{L_j} dv = 0,$$

puesto que la función v, por hipótesis, es uniforme. De aquí, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Por consiguiente, $u = \text{const}$. Pero, como en L_0 $u = 0$, entonces $u(x, y) = 0$ en todos los puntos.

Si despreciamos de la condición $h_0 = 0$, la solución del problema homogéneo será h_0 y dos soluciones del problema modificado pueden diferenciarse en una magnitud constante.

Resolvamos el problema modificado de Dirichlet con ayuda del potencial de capa doble. Supongamos que la función dada $f(s)$ satisface la condición de Hölder[2]).

La función analítica $\Phi(z)$ se buscará en la forma de una integral de tipo de Cauchy

$$\Phi(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\mu(\sigma)}{\tau - z}\, d\tau + iC \qquad (37.3)$$

[1]) No nos detenemos aquí en la argumentación de la validez de estas correlaciones en el contorno.

[2]) En lo sucesivo podríamos deshacernos de la exigencia de que la función $f(s)$ satisface la condición de Hölder y demostrar que la solución obtenida tiene lugar también en el caso en que $f(s)$ es meramente continua. No vamos a realizar aquí los razonamientos correspondientes (véase N. I. Musjelishvili [16], § 61).

con la desconocida densidad real $\mu(s)$, la cual, como consideraremos, satisfaga la condición de Hölder.

Al tomar, según la fórmula de Sojotski, el valor límite en el contorno, separando la parte real (véase el § 10) e introduciéndola en la condición de contorno (37.2), llegaremos a la ecuación integral de Fredholm

$$\mu(s)+\frac{1}{\pi}\int_L \mu(\sigma)\frac{\cos(r,\ n)}{r}\,d\sigma=2\,[f(s)+h(s)]. \qquad (37.4)$$

La ecuación integral homogénea

$$\mu(s)+\frac{1}{\pi}\int_L \mu(\sigma)\frac{\cos(r,\ n)}{r}\,d\sigma=0 \qquad (37.4')$$

tiene las siguientes soluciones

$$\mu_j(s)=\begin{cases} c_j \text{ para } t\in L_j \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ m), \\ 0 \text{ en los demás contornos.} \end{cases} \qquad (37.5)$$

Demostremos esto.

La ecuación (37.4') puede escribirse en la forma

$$\operatorname{Re}\lim_{z\to t(s)}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\sigma)}{\tau-z}\,d\tau\right]=0.$$

Si $\mu=\mu_j$, la integral a lo largo de L se reduce a la integral por L_j. Teniendo en cuenta que $\int_{L_j}\frac{\mu(\sigma)}{\tau-z}\,d\tau=0$, para z dispuesto fuera de L_j, llegamos a que las funciones (37.5) realmente satisfacen la ecuación (37.4').

La ecuación no puede tener otras soluciones en vista de los siguientes razonamientos. De conformidad con la propiedad de la integral de tipo de Cauchy, si una función $\mu(s)$ es la solución de la ecuación (37.4'), entonces ella sirve de valor de contorno de una función analítica en D^-. Mas, $\mu(s)$ es real. Por consiguiente, el valor de contorno de la parte imaginaria de una función, analítica en D^-, es igual a cero. Pero en este caso, toda la función analítica $\mu(z)$ es constante en D^-. Además, en cada dominio conexo D_0^-, D_1^-, . . ., D_m^- resultan admisibles distintos valores de esta constante. En el dominio D_0^- su valor es nulo. De este modo, a título de soluciones de la ecuación (37.4') pueden servir sólo aquellas $\mu(s)$, las cuales en cada uno de los contornos L_j toman ciertos valores constantes. Para que se satisfagan las igualdades (37.4'), se debe suponer que la constante en el contorno L_0 es nula. Al considerar todas las combinaciones de las constantes, llegaremos a las soluciones (37.5).

La solución general de la ecuación (37.4') será una combinación lineal de las siguientes m soluciones, linealmente independientes:

$$\beta_j(s) = \begin{cases} 1 \text{ para } t \in L_j & (j = 1, 2, \ldots, m), \\ 0 \text{ en las demás curvas.} \end{cases} \tag{37.5'}$$

De acuerdo con los teoremas de Fredholm, la ecuación homogénea transpuesta a (37.4'):

$$\alpha(s) - \frac{1}{\pi} \int_L \alpha(\sigma) \frac{\cos(r, n)}{r} d\sigma = 0 \tag{37.4''}$$

también tiene m soluciones, mientras que la ecuación no homogénea (37.4) será resoluble sólo cuando se cumplan m condiciones de ortogonalidad:

$$\int_L [f(s) + h(s)] \alpha_j(s)\, ds = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{37.6}$$

donde $\alpha_j(s)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación (37.4''). Al introducir la designación

$$B_{jk} = \int_{L_k} \alpha_j(s)\, ds \quad (j, k = 1, 2, \ldots, m), \tag{37.6'}$$

escribamos las igualdades (36.6) en forma de un sistema de ecuaciones lineales respecto a las constantes h_k:

$$\sum_{k=1}^{m} B_{jk} h_k = -\int_L f(s)\, \alpha_j(s)\, ds \quad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{37.6''}$$

Este sistema es unívocamente resoluble, lo que se deduce del hecho de que el sistema homogéneo (37.6'') tiene sólo una solución trivial. (De lo contrario, el problema de Dirichlet tendría para $f = 0$ una solución no nula.) Así pues, el problema modificado de Dirichlet es resoluble. Todas las constantes h_j, en este caso, adquieren unos valores bien determinados.

De la resolubilidad establecida del problema modificado de Dirichlet se puede concluir que una función armónica que constituye la parte real de la función analítica y uniforme $\Phi(z)$, puede ser representada de un modo único en forma del potencial de capa doble:

$$u(x, y) = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\sigma)}{\tau - z} d\tau\right].$$

De aquí puede deducirse un corolario de importancia.

COROLARIO. *La función* $\Phi(z)$, *que es analítica y uniforme en un dominio finito y múltiplemente conexo* D^+, *puede ser representada por una integral de tipo de Cauchy de densidad real*

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\sigma)}{\tau - z} d\tau + iC, \tag{37.7}$$

donde C *es una constante real arbitraria.*

En el caso de que esté ausente la curva L_0 y el dominio, por tanto, se hace infinito, se puede demostrar la validez de la representación

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\sigma)}{\tau - z} d\tau + \Phi(\infty). \tag{37.8}$$

La densidad $\mu(s)$ se determina por medio de la función dada $\Phi(z)$ con precisión hasta una constante arbitraria en todo contorno interior L_j (la fórmula (37.5)). Estos serán aquellos valores de μ, para los cuales la integral de tipo de Cauchy con $z \in D^+$ se reduce a cero.

Así pues, *para un dominio múltiplemente conexo son legítimas las mismas representaciones de funciones analíticas mediante las integrales de tipo de Cauchy, que se han deducido en el p.* 35.2 *para el caso de un dominio simplemente conexo (las fórmulas* (35.6), (35.8)), *con la única diferencia de que la densidad* μ *se determina a través de la función* $\Phi(z)$ *de una manera no unívoca.*

A base de esta investigación realizada del problema modificado de Dirichlet resulta fácil señalar un método de resolución del problema de Dirichlet clásico.

Buscaremos la solución del último problema bajo la forma

$$u(x, y) = U(x, y) + \sum_{k=1}^{m} A_k \ln | z - z_k |, \tag{37.9}$$

donde $U(x, y)$ es la parte real de una función analítica uniforme; z_k son ciertos puntos fijados al azar en los dominios $D_1^-, D_2^-, \ldots, D_m^-$, y A_k, unas constantes, por el momento no determinadas.

La función $U(x, y)$ tendrá que satisfacer la condición de contorno

$$U = f(s) - \sum_{k=1}^{m} A_k \ln | t - z_k |.$$

Al multiplicar esta igualdad por el sistema completo $\alpha_j(t)$ de soluciones de la ecuación (37.4″), obtendremos

$$0 = \int_L f(s)\, \alpha_j(s)\, ds - \sum_{k=1}^{m} A_k \int_L \ln | t - z_k |\, \alpha_j(s)\, ds \tag{37.10}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m).$$

El cero en el primer miembro se justifica por el hecho de que $U(x, y)$ debe constituir la parte real de una función uniforme. El sistema (37.10) se resuelve unívocamente respecto a las constantes $A_1, A_2, \ldots$ $\ldots, A_m$, puesto que debido a la unicidad de la solución del problema de Dirichlet, el sistema homogéneo, que le corresponde, sólo tiene una solución trivial.

Al introducir los valores determinados de $U(x, y)$ y A_j en la expresión (37.9), obtendremos la solución del problema de Dirichlet.

Si la curva L_0 está ausente, el teorema demostrado queda válido con el único cambio de que las constantes A_k se deben someter a la condición

$$\sum_{k=1}^{m} A_k = 0.$$

Esta condición se desprende del requisito de que la solución sea acotada en un punto infinitamente alejado.

D. I. Sherman 5)* ha mostrado que el problema de Dirichlet para un dominio múltiplemente conexo puede ser resuelto también mediante otro método, que no está relacionado con la necesidad de resolver el problema transformado. La función $u(x, y)$ se busca por Sherman en la forma

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_L \nu(s) \frac{\partial \ln r}{\partial n} ds + \sum_{j=1}^{n} B_j \ln r_j, \quad B_j = \int_{L_j} \nu(s)\, ds,$$

donde la densidad $\nu(s)$ es real y $r_j = |z - z_j|$. La ecuación integral para $\nu(s)$ (ella se compone igual que la (37.4)) resulta en este caso siempre resoluble unívocamente. Este método ya no requiere la composición y resolución del sistema (37.10).

37.2. Operador de Schwarz para un dominio múltiplemente conexo. El operador de Schwarz para un dominio múltiplemente conexo se determina de un modo sumamente igual al empleado en el p. 27.2 para el caso de un dominio suplemente conexo; hagamos uso de las designaciones y nociones de este punto.

Sea

$$G(z, \zeta) = \ln \frac{1}{r} + g(x, y; \xi, \eta)$$

la función de Green. La búsqueda de esta función, como se sabe, se reduce a la resolución de un caso particular del problema de Dirichlet, lo que precisamente establece el hecho de su existencia.

Sea $H(z, \zeta)$ una función armónica según la variable z, conjugada de G, y

$$M(z, \zeta) = G + iH$$

una función compleja de Green.

El sentido positivo del recorrido del contorno, lo tomaremos siempre en lo sucesivo con relación al dominio D^+. Esto significa que el contorno L_0 se recorrerá en el sentido contrahorario y los contornos L_j ($j = 1, 2, \ldots, m$), en el sentido horario. Por el sentido positivo de la normal se toma el que está orientado al interior del dominio D^+. De este modo, las direcciones positivas de la tangente y de la normal en cualquier curva del contorno están dispuestas igual que los ejes Ox y Oy.

Si $u + iv$ es una función analítica y si por $\frac{\partial}{\partial s}$, $\frac{\partial}{\partial n}$ en el contorno se comprenden valores límites de las derivadas según direcciones correspondientes en el dominio, entonces en el contorno se verificarán las ecuaciones de Cauchy—Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial n}, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial s} \tag{37.11}$$

Ha de ser notado, además, que bajo el signo de integral ds siempre implica una magnitud positiva.

Volveremos a la función compleja de Green y aclaremos su carácter analítico.

La función $M(z, \zeta)$ será multiforme a causa de dos razones: en primer lugar, ella contiene el sumando $-\ln(\zeta - z)$, y en el segundo, por ser el dominio múltiplemente conexo, ella, en el caso general, cuando el recorrido en el dominio D^+ se realiza cerca de cualquier curva interior L_j, adquiere cierto incremento. La función de Green $G(z, \zeta)$, por definición, es uniforme. Designemos con $2\pi\beta_j(\zeta)$ el incremento que adquiere $H(z, \zeta)$, cuando cierto contorno interior L_j se recorre en el sentido contrahorario. De acuerdo con la igualdad (37.11), estas magnitudes se expresarán mediante las fórmulas

$$\beta_j(\zeta) = -\frac{1}{2\pi}\int_{L_j}\frac{\partial H}{\partial s}\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_{L_j}\frac{\partial G}{\partial n}\,ds, \tag{37.12}$$

con la particularidad de que aquí ζ es un punto interior del dominio D^+ y z es un punto del contorno. Cuando los contornos L_j son recorridos en el sentido contrahorario, la función $M(z, \zeta)$ adquiere un incremento $i2\pi\beta_j(\zeta)$. El mismo incremento lo tiene la función $\beta_j(\zeta)\ln(z - z_j)$, donde z_j es un cierto punto dentro del contorno L_j. Por consiguiente, la función compleja de Green se representa así:

$$M(z, \zeta) = M_0(z, \zeta) - \ln(\zeta - z) + \sum_{j=1}^{m}\beta_j(\zeta)\ln(z - z_j),$$

donde $M_0(z, \zeta)$ es una función analítica y uniforme de la variable z.

Aclaremos el carácter de las funciones β_j. Escribamos la fórmula (37.12) cambiando las denominaciones de variables. El tomar en

consideración la simetría de las funciones de Green respecto a las variables z, ζ, tendremos

$$\beta_j(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_j} \frac{\partial G(z, \tau)}{\partial \nu} d\sigma. \tag{37.13}$$

Puesto que la función $\frac{\partial G}{\partial \nu}$ es armónica respecto de z, la última fórmula determina $\beta_j(z)$ como funciones armónicas en D^+. La comparación de la fórmula (37.13) con la (27.2), que nos da en la forma cerrada la solución del problema de Dirichlet por medio de la función de Green, muestra que en el contorno ella toma los siguientes valores[1])

$$\beta_j(\tau) = \begin{cases} 1, \text{ si } \tau \in L_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \\ 0 \text{ en las demás curvas.} \end{cases} \tag{37.14}$$

Ellas coinciden con las funciones (37.5) que forman un sistema completo de soluciones de la ecuación integral (37.4').

Compongamos, ahora, el núcleo de Schwarz, derivando M según la dirección positiva de la normal:

$$T(z, \zeta) = \frac{\partial M(z, \zeta)}{\partial \nu} = \frac{\partial M_0(z, \zeta)}{\partial \nu} -$$

$$- \frac{1}{\zeta - z} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \nu} + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j(\zeta) \ln(z - z_j), \tag{37.15}$$

donde

$$\alpha_j(\zeta) = \frac{\partial \beta_j(\zeta)}{\partial \nu}. \tag{37.14'}$$

Teniendo en cuenta los mismos razonamientos que en el p. 27.2, llegamos a que

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L T(z, \tau) u(\sigma) d\sigma + iv(z_0) \tag{37.16}$$

define una función analítica (pero no uniforme, en el caso general) cuya parte real toma en el contorno el valor prefijado $u(s)$.

Por consiguiente, al igual que en el p. 27.2, el operador de Schwarz se determina mediante la fórmula

$$Su \equiv \frac{1}{2\pi} \int_L T(z, \tau) u(\sigma) d\sigma. \tag{37.17}$$

La función analítica $F(z)$, definida por el operador de Schwarz

$$F(z) = Su + iv_0,$$

[1]) En la teoría de funciones armónicas las funciones $\beta_j(z)$ se llaman *medida armónica de la curva* L_j respecto del dominio D^+.

tiene el carácter siguiente

$$F(z) = F_0(z) + \sum_{j=1}^{m} \frac{v_j}{2\pi} \ln(z - z_j), \tag{37.18}$$

donde

$$F_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L \left[\frac{\partial M_0(z, \tau)}{\partial \nu} + \frac{1}{\tau - z} \frac{\partial \tau}{\partial \nu} \right] u(\sigma)\, d\sigma$$

es una función analítica uniforme y

$$v_j = \int_L u(\sigma)\, \alpha_j(\tau)\, d\sigma \tag{37.19}$$

son ciertas constantes.

La fórmula (37.18) muestra que las constantes v_j son iguales al incremento de la función $F(z)$ al recorrerse los contornos L_j.

Para que el operador de Schwarz defina una función uniforme, se debe, obviamente, exigir que todas las v_j se reduzcan a cero. De aquí se deduce el siguiente resultado importante:

Para que una función arbitraria $u(s)$, definida en un contorno, pueda representar la parte real de la función analítica y uniforme en el dominio, es necesario y suficiente que ella satisfaga m correlaciones

$$\int_L u(s)\, \alpha_j(t)\, ds = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{37.20}$$

Comparando estas correlaciones con las condiciones de resolubilidad (37.6), concluimos que las funciones (37.14′) forman un sistema completo de soluciones de la ecuación integral (37.4″).

En el caso del dominio infinito D^+, cuando el contorno L_0 está ausente, todas las fórmulas escritas quedan válidas, con la particularidad de que la condición de acotación en el infinito proporciona para β_j y α_j las condiciones

$$\sum_{j=1}^{m} \beta_j(\zeta) = 1, \quad \sum_{j=1}^{m} \alpha_j(\zeta) = 0. \tag{37.21}$$

Para un anillo circular la función compleja de Green puede expresarse en términos de la función ϑ_1, conocida en la teoría de funciones elípticas, mientras que el núcleo de Schwarz, en términos de la así llamada ζ-función de Weierstrass[1]).

Para un dominio múltiplemente conexo arbitrario E. I. Zverovich 2)* ha creado una nueva expresión para el operador de Schwarz

[1]) Las fórmulas necesarias el lector puede encontrar, por ejemplo, en el libro de N. I. Ajieser «Elementos de la teoría de funciones elípticas» págs. 221-229 (Н. И. Ахиезер, «Элементы теории эллиптических функций», Гостехиздат, 1948).

al expresar explícitamente el núcleo de Schwarz mediante la θ-serie de multiplicidad m y las funciones armónicas $\beta_j(z)$ cuyos valores límites se dan por las fórmulas (37.14).

37.3. Diferentes formas del planteamiento del problema de contorno de Hilbert para un dominio múltiplemente conexo. Supongamos que en la frontera L del dominio D^+ se han definido las funciones reales de un arco: $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$, que satisfacen la condición de Hölder. Se llamará problema de Hilbert al problema siguiente:

Hállense todas las funciones $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *que sean uniformes y analíticas en el dominio* D^+ *y, además, continuamente prolongables a la frontera* L *del dominio* D^+, *donde debe cumplirse la correlación lineal*[1])

$$a(s)\,u(s) + b(s)\,v(s) = c(s). \tag{37.22}$$

Cuando $c(s) \equiv 0$, tendremos un problema homogéneo, y si $c(s) \not\equiv 0$, el problema será no homogéneo.

Convengamos en que los coeficientes $a(s)$ y $b(s)$ no se reducen a cero simultáneamente. Al dividir la condición de contorno (37.22) por $\sqrt{a^2(s) + b^2(s)}$, transformémosla a una forma, cuando

$$a^2(s) + b^2(s) \equiv 1. \tag{37.23}$$

Considerando cumplida la condición (37.23) y suponiendo que $a(s) + ib(s) = \lambda[t(s)]$, la condición de contorno (37.22) puede escribirse en las siguientes formas equivalentes:

$$\operatorname{Re}\{(a - ib)\,f(t)\} = c(t), \tag{37.24}$$

$$\operatorname{Re}\{\overline{\lambda(t)}\,f(t)\} = c(t), \tag{37.25}$$

siendo $|\lambda(t)| \equiv 1$. La función $\lambda(t)$ se denominará *coeficiente del problema de Hilbert.*

Denotaremos

$$\frac{1}{2\pi}\{\arg\lambda(t)\}_{L_j} = \varkappa_j \quad (j = 0, 1, \ldots, m),$$

con la particularidad de que todas las curvas L_j se recorren en el sentido positivo respecto del dominio D^+ (las curvas internas se recorren en el sentido horario, la exterior, en el contrahorario). La magnitud

$$\varkappa = \sum_{j=0}^{m} \varkappa_j$$

se denominará *índice del coeficiente* $\lambda(t)$ del problema (37.25).

La función $(t - z_j)^{-\varkappa_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ tiene a lo largo de la curva L_j, para z_j ubicado en el interior de L_j, la misma alteración

[1]) Véase la nota al p. 27.1.

del argumento que tiene $\lambda(t)$. Por esta razón la función $\lambda(t) \prod_{j=1}^{m} \times$ $\times (t - z_j)^{\varkappa_j}$ es tal que la alteración del argumento en todas las curvas interiores es nula. Al realizar en (37.25) el cambio de la función desconocida

$$\varphi(z) = f(z) \prod_{j=1}^{m} (z - z_j)^{\varkappa_j},$$

obtendremos

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\varphi(t)}{\lambda(t) \prod_{j=1}^{m} (t - z_j)^{\varkappa_j}}\right\} = c(t).$$

Al dividir, por fin, ambos miembros de la última igualdad por $\left|\lambda(t) \prod_{j=1}^{m} (t - z_j)^{\varkappa_j}\right|$, llegamos a que el nuevo coeficiente tendrá un módulo unidad. De este modo, sin restringir la generalidad, podemos considerar que en el problema (37.25) $|\lambda(t)| \equiv 1$, mientras que la función $\arg \lambda(t)$ posee a lo largo de todas las curvas interiores el incremento nulo, y a lo largo de la curva L_0, el incremento $\varkappa$.

37.4. Método de factor de regularización en el caso de un dominio múltiplemente conexo. Supondremos que el origen de coordenadas se ubica en el dominio D^+. En el caso de un dominio simplemente conexo D^+ el problema de Hilbert puede ser reducido al problema A, es decir, a la forma (29.9), dividiendo su condición de contorno por un factor de regularización $p(t)$ especialmente elegido. Su existencia está asegurada por el hecho de que en el caso del dominio simplemente conexo el problema de Schwarz siempre tiene solución unívoca. Puesto que este último hecho no tiene lugar para los dominios múltiplemente conexos, en este caso no existe, en general, un factor de regularización positivo $p(t)$ que permitiría reducir el problema (37.25) a la forma (29.9).

Con el fin de asegurar la existencia del factor de regularización $p(t)$ para el dominio D^+ múltiplemente conexo, cambiemos su definición en comparación con el caso de un dominio simplemente conexo, introduciendo ciertos elementos arbitrarios. Buscaremos la función positiva $p(t)$ y los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_m$, ubicados estrictamente dentro del dominio D^+, de un modo tal que se verifique la igualdad

$$p(t)\,\lambda(t) = t^{\varkappa - m} \prod_{k=1}^{m} (z_k - t)\, e^{i\gamma(t)}, \quad t \in L, \tag{37.26}$$

donde $\gamma(z)$ es una función uniforme y analítica en D^+.

Dejando a parte la cuestión de búsqueda de todas las magnitudes que figuran en (37.26) (véase a continuación el p. 37.5), supondremos que ellas ya se han determinado. Al dividir por $p(t)$ la condición de contorno (37.25), obtendremos

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{e^{-i\gamma(t)}f(t)}{t^{\varkappa-m}\prod\limits_{k=1}^{m}(z_k-t)}\right\}=\frac{c(t)}{p(t)}, \quad t\in L. \tag{37.27}$$

Introduciendo aquí una nueva función desconocida $\Phi(z)=e^{-i\gamma(z)}f(z)$, llegamos a que *el problema de Hilbert para un dominio múltiplemente conexo puede ser reducido a un problema de Hilbert con el coeficiente racional*:

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\Phi(t)}{t^{\varkappa-m}\prod\limits_{k=1}^{m}(z_k-t)}\right\}=\frac{c(t)}{p(t)}, \quad t\in L. \tag{37.27'}$$

Al denotar la expresión, encerrada entre las llaves, con $F(t)$, obtenemos el problema A:

$$\operatorname{Re} F(t)=\frac{c(t)}{p(t)}, \tag{37.27''}$$

donde la función incógnita $F(z)$ es analítica en D^+, a excepción de los polos en los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_m \in D^+$ y del punto $z=0$, donde ella admite un polo de orden no superior a $\varkappa - m$, para $\varkappa \geqslant m$; cuando $\varkappa < m$, la función $F(z)$ debe poseer en el punto $z=0$ un cero de orden no inferior que $m-\varkappa$.

Para $c(t) \equiv 0$, el problema (37.27'') se denominará *problema* A_0. Su solución general designaremos con $Q(z)$. En el caso de un dominio simplemente conexo ($m=0$), los problemas A y A_0 se resuelven de un modo elemental, siempre que se conoce el operador de Schwarz del dominio D^+ (véase el § 27). Por ejemplo, la solución del problema A_0 para un dominio simplemente conexo, definida mediante la fórmula (27.8), tiene la siguiente forma en términos del operador de Schwarz:

$$Q(z)=i\beta_0+\sum_{k=1}^{\varkappa}\left\{\frac{\mu_k}{z^k}-S\left(\operatorname{Re}\frac{\mu_k}{t^k}\right)\right\}, \tag{27.8'}$$

donde S es el operador de Schwarz, y β_0, μ_k son constantes arbitrarias. Los resultados análogos tienen lugar para los dominios múltiplemente conexos:

Si se conoce el factor de regularización $p(t)$, ligado con el coeficiente $\lambda(t)$ mediante la fórmula (37.26), *la solución del problema de Hilbert para un dominio múltiplemente conexo puede construirse de un modo elemental en términos del operador de Schwarz.*

En efecto, si se conoce el factor de regularización, el problema de Hilbert (37.25) puede reducirse al problema equivalente A ((37.27″). De este modo, la cuestión se reduce a la construcción de la solución del problema A. Nos limitemos, por el momento, al caso en que $\varkappa \geqslant m$, y todos los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_m$, contenidos en (37.26), son distintos de dos en dos. La solución del problema (37.27″) se buscará en la forma

$$F(z) = \Psi(z) + i\beta_0 + \sum_{k=1}^{\varkappa-m} \frac{\mu_k}{z^k} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\nu_k}{z - z_k}, \qquad (37.28)$$

donde $\Psi(z)$ es una nueva función desconocida analítica en D^+; β_0 es una constante real arbitraria y μ_k, ν_k son unas constantes complejas indefinidas. Al sustituir la expresión para $F(z)$ de (37.28) en (37.27″), obtendremos un problema de contorno de Schwarz para la función $\Psi(z)$:

$$\operatorname{Re} \Psi(t) = \frac{c(t)}{p(t)} - \sum_{k=1}^{\varkappa-m} \operatorname{Re} \frac{\mu_k}{t^k} - \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Re} \frac{\nu_k}{t - z_k}, \quad t \in L. \qquad (37.29)$$

Conforme al planteamiento del problema de partida, su solución debe ser unívoca en D^+, por lo cual para el segundo miembro de la igualdad (37.29) se deben cumplir las condiciones (37.20):

$$\sum_{k=1}^{\varkappa-m} \int_L \operatorname{Re} \frac{\mu_k}{t^k} \alpha_j(t)\, ds + \sum_{k=1}^{m} \int_L \operatorname{Re} \frac{\nu_k}{t - z_k} \alpha_j(t)\, ds =$$

$$= \int_L \frac{c(t)}{p(t)} \alpha_j(t)\, ds \quad (j = 1, 2, \ldots, m). \qquad (37.30)$$

Las igualdades obtenidas forman un sistema de ecuaciones[1]), lineales respecto de Re μ_k, Im μ_k, Re ν_k, Im ν_k. Al sustituir la solución del problema (37.29) en (37.30), obtendremos la solución general buscada del problema A:

$$F(z) = i\beta_0 + \sum_{k=1}^{\varkappa-m} \frac{\mu_k}{z^k} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\nu_k}{z - z_k} +$$

$$+ S\left(\frac{c(t)}{p(t)} - \sum_{k=1}^{\varkappa-m} \operatorname{Re} \frac{\mu_k}{t^k} - \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Re} \frac{\nu_k}{t - z_k} \right). \qquad (37.31)$$

[1]) Aquí no investigamos la resolubilidad del sistema (37.30). Más abajo (p. 37.8) probaremos que para $\varkappa \geqslant m$ el número de soluciones del problema de Hilbert es $l = 2\varkappa - m + 1$. De aquí se deducirá que el rango de la matriz del sistema (37.32) es igual a m, es decir, al número de ecuaciones.

La función $F(z)$ es uniforme, si μ_k y ν_k están entrelazadas por las igualdades (37.30). Cuando $c(t) \equiv 0$, la fórmula (37.31) da la solución $Q(z)$ del problema A_0. Si, además, $m = 0$ (el dominio D^+ es simplemente conexo), entonces todas las ν_k y μ_k son nulas, el sistema (37.30) está ausente y (37.31) pasa en (27.8').

Al comparar (37.27) y (37.27''), hallamos la solución general $f(z)$ del problema de Hilbert (37.25):

$$f(z) = z^{\varkappa-m} \prod_{k=1}^{m} (z_k - z)\, e^{i\gamma(z)} F(z), \tag{37.32}$$

en la cual se debe sustituir $F(z)$ por $Q(z)$, siempre que $c(t) \equiv 0$.

La fórmula (37.32) extiende al caso de un dominio múltiplemente conexo la fórmula (29.11), que ofrece la solución general del problema de Hilbert para un dominio simplemente conexo.

Apoyándonos en la existencia de un factor de regularización, demostremos en conclusión de este punto un resultado importante, que nos será útil en lo sucesivo:

Cuando $\varkappa < 0$, *el problema homogéneo de Hilbert*

$$\operatorname{Re}\{\overline{\lambda(t)}\, f(t)\} = 0 \tag{37.33}$$

no tiene soluciones no triviales.

Admitamos que el problema (37.33), para $\varkappa < 0$, tiene una solución no trivial $f(z)$. Probemos, ante todo, empleando el principio de simetría, que esta solución tiene necesariamente un número finito de ceros y todos estos ceros poseen multiplicidades finitas enteras. Efectivamente, al dividir la condición de contorno (37.33) por el factor de regularización $p(t)$, podemos reducir el problema (37.33) al problema A_0:

$$\operatorname{Re} Q(t) = 0. \tag{37.33'}$$

Puesto que $p(t) > 0$, será suficiente demostrar la afirmación acerca de los ceros para la función $Q(z)$. Sea $t = t(\zeta)$ el valor límite de la función $z = t(w)$, que aplica unívoca y conformemente el dominio G^+, limitado por unas circunferencias, sobre el dominio D^+. Sustituyendo $t = t(\zeta)$ en (37.33'), obtenemos

$$\operatorname{Re} Q[t(\zeta)] = 0.$$

De lo último se infiere que $Q(z)$ aplica las circunferencias sobre el eje imaginario. Por consiguiente, la función $Q[t(w)]$ puede ser analíticamente prolongada, según el principio de simetría, a través de las circunferencias de frontera. Por ello, $Q[t(w)]$, y, por lo tanto, $Q(z)$ poseen un número finito de ceros y estos ceros tienen multiplicidades finitas enteras. Así pues, la afirmación acerca de los ceros de la solución del problema (37.33) queda demostrada.

Sean N_+ y N_0 los números de ceros (tomando en consideración las multiplicidades) de cierta solución del problema (37.33) en D^+ y en L, respectivamente. Escribamos la igualdad (37.33) en la forma

$$\overline{\lambda(t)}\, f(t) = -\lambda(t)\, \overline{f(t)}.$$

Al tomar el índice de ambos miembros de la última igualdad y apoyándose en el principio de argumento (p. 12.2), se obtiene

$$-\varkappa + N_+ + N_0/2 = \varkappa - N_+ - N_0/2.$$

De aquí

$$\varkappa = N_+ + N_0/2 \geqslant 0,$$

lo que contradice a la suposición $\varkappa < 0$. El mencionado resultado está demostrado.

37.5. Sobre la búsqueda del factor de regularización en el caso de un dominio múltiplemente conexo. Si el dominio D^+ es simplemente conexo ($m = 0$), el factor de regularización $p(t)$ de la función $\lambda(t) = a + ib$ se determina por las fórmulas (28.9) — (28.11). En este caso la búsqueda del factor de regularización se reduce a la resolución del problema de Schwarz para el dominio D^+.

La última afirmación se hace, en general, errónea, si el dominio D^+ es múltiplemente conexo ($m > 0$). Efectivamente, partiendo de la definición, dada en el p. 28.2, es fácil mostrar que cuando $m > 0$, el factor de regularización, en el caso general, no existe. Si, en cambio, partimos de la definición más general de factor de regularización, señalada en el p. 37.4 (la fórmula (37.26)), resulta que el factor de regularización existe, pero su cálculo es mucho más complejo que en el caso de un dominio simplemente conexo.

Pasando, ahora, al examen de la cuestión, supondremos que en el problema de Hilbert (37.25) la función $\lambda(t)$ se ha reducido a la forma en que $|\lambda(t)| \equiv 1$, y el índice de la función $\lambda(t)$ a lo largo de cada una de las curvas interiores $L_1, L_2, \ldots, L_m$ es igual a cero. Buscaremos el factor de regularización positivo $p(t)$, partiendo de la igualdad

$$p(t)\,\lambda(t) = t^{\varkappa-m} \prod_{k=1}^{m} (z_k - t)\, e^{i\gamma(t)}, \quad t \in L. \tag{37.26}$$

El factor de regularización $p(t)$ será determinado, si hallamos los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_m$, dispuestos en el dominio D^+, y la función $\gamma(z)$, uniforme y analítica en D^+.

Con el fin de encontrar las magnitudes mencionadas, despejamos los argumentos de ambos miembros de la igualdad (37.26). En la curva exterior L_0 del contorno L tenemos

$$\arg\lambda(t) = (\varkappa - m)\arg t + \sum_{k=1}^{m} \arg(z_k - t) + \operatorname{Re}\gamma(t), \quad t \in L_0. \tag{37.34'}$$

Aquí, por los argumentos se entienden unas ramas fijadas arbitrariamente que cambian continuamente y tienen una discontinuidad en cierto punto ubicado en L_0 el cual sirve de punto inicial del recorrido. En cada una de las curvas interiores $L_1, L_2, \ldots, L_m$ del contorno L pueden distinguirse las ramas continuas de los argumentos $\arg \lambda(t)$, $\arg t$, $\arg (t - z_k)$. Ellas pueden ser elegidas independientemente una de la otra. De este modo, en la curva interior L_ν del contorno L de (37.26) tenemos

$$\arg \lambda(t) = (\varkappa - m) \arg t + \sum_{k=1}^{m} \arg (z_k - t) + \operatorname{Re} \gamma(t) + 2\pi n_\nu, \quad t \in L_\nu \ (\nu = 1, 2, \ldots, m) \qquad (37.34'')$$

donde n_ν es un cierto número entero, propio para toda curva L_ν. Los números n_ν aparecen en virtud de lo que la función $\operatorname{Re} \gamma(t)$ está definida con precisión hasta una constante la cual es la misma para *todas* las curvas del contorno L. Esta constante se determina unívocamente por la igualdad (37.34'). De este modo, la función $\operatorname{Re} \gamma(t)$, que figura en (37.34''), no contiene elementos arbitrarios. Como que las ramas $\arg \lambda(t)$, $\arg t$, $\arg (z_k - t)$ se fijan al azar en toda curva L_ν del contorno L, resulta que sin el sumando $2\pi n_\nu$ la igualdad (37.34'') será, en el caso general, errónea. Haciendo uso de las funciones

$$\beta_\nu(t) = \begin{cases} 1, \text{ si } t \in L_\nu \ (\nu = 1, 2, \ldots, m); \\ 0 \text{ en las demás curvas,} \end{cases} \qquad (37.14)$$

las igualdades (37.34') y (37.34'') pueden ser reunidas en una igualdad, legítima en todo el contorno L:

$$\arg \lambda(t) = (\varkappa - m) \arg t + \sum_{k=1}^{m} \arg (z_k - t) + \operatorname{Re} \gamma(t) + 2\pi \sum_{\nu=1}^{m} n_\nu \beta_\nu(t), \quad t \in L. \qquad (37.34)$$

La función $\operatorname{Re} \gamma(t)$, que figura en esta igualdad, debe ser la parte real de una función analítica uniforme $\gamma(z)$. Por esta razón, para $\operatorname{Re} \gamma(t)$ han de cumplirse las condiciones (37.20). Tomándolo en consideración, multipliquemos (37.34) por $\alpha_j(t)$ e integremos a lo largo de L. Obtendremos

$$\sum_{k=1}^{m} \int_L \arg (z_k - t)\, \alpha_j(t)\, ds + 2\pi \sum_{\nu=1}^{m} n_\nu \int_L \beta_\nu(t)\, \alpha_j(t)\, ds = \int_L \arg \lambda(t)\, \alpha_j(t)\, ds - (\varkappa - m) \int_L \arg t\, \alpha_j(t)\, ds \qquad (37.35)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m).$$

En el sistema obtenido de ecuaciones el papel de incógnitas lo desempeñan los números enteros $n_1, n_2, \ldots, n_m$ y los puntos $z_1, z_2, \ldots$ $\ldots, z_m$. E. I. Zverovich 5)*, [9] demostró que el sistema (37.35) tiene solución y señaló un algoritmo que permite construir esta solución por intermedio de θ-función. Puesto que los razonamientos correspondientes están basados en la teoría bastante compleja, no los citamos aquí.

Supongamos que el sistema (37.35) ha sido resuelto. Sustituyendo su solución en (37.34), hallamos la función Re $\gamma(t)$, la cual, en virtud de (37.35), representa la parte real del valor límite de una función analítica uniforme $\gamma(z)$:

$$\gamma(z) = S\left[\arg \lambda(t) - (\varkappa - m)\arg t - \sum_{k=1}^{m} \arg(z_k - t) - 2\pi \sum_{\nu=1}^{m} n_\nu \beta_\nu(t)\right].$$

Aquí S es el operador de Schwarz.

Introduciendo los valores encontrados de $z_1, z_2, \ldots, z_m$ y de $\gamma(z)$ en la igualdad (37.26) y tomando módulos de ambos miembros de esta igualdad, hallamos el factor de regularización buscado

$$p(t) = |t|^{\varkappa - m} \prod_{k=1}^{m} |z_k - t| e^{-\operatorname{Im}\gamma(t)}. \qquad (37.35')$$

Algunos de los resultados, obtenidos por intermedio de este factor, ya han sido expuestos en el p. 37.4. Hemos de notar que el empleo del método de factor de regularización permite resolver el problema de Hilbert también en el caso en que la frontera L del dominio D^+ no es suave.

El cálculo del número de soluciones y de condiciones de resolubilidad del problema de Hilbert con ayuda del método de factor de regularización requiere que se use el aparato de la teoría de funciones en las superficies de Riemann. Con el objeto de evitarlo, pasemos a la investigación del problema de Hilbert por el método de ecuaciones integrales. Este método permite obtener el cuadro de resolubilidad del problema de Hilbert de un modo relativamente sencillo, pero su argumentación exige que la frontera del dominio D^+ esté compuesta por las curvas de Liapunov.

37.6. Ecuación integral del problema de Hilbert. Buscaremos la solución del problema de Hilbert

$$\operatorname{Re}\{[a(s) - ib(s)]F(t)\} = c(s) \qquad (37.36)$$

en forma de una integral de tipo de Cauchy con densidad real

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\sigma)\,d\tau}{\tau - z} + iC. \qquad (37.37)$$

Según enseñan las investigaciones realizadas en el p. 37.1 (fórmula (37.7)), tal representación es posible, con la particularidad de que

C se determina unívocamente a base de la función $F(z)$, mientras que la densidad $\mu(s)$ se halla salvo un sumando constante en todo contorno interior.

Para simplificar la investigación posterior, representemos el sumando C en forma de una integral de la densidad μ. Elijamos uno de los contornos interiores, por ejemplo L_m, y la constante aditiva, hasta cuya precisión se ha determinado la densidad $\mu(s)$ en L_m, será definida por la condición de que se cumpla la igualdad

$$C = \int_{Lm} \mu(\sigma)\, d\sigma.$$

Sustituyendo esta expresión para C en la fórmula (37.37), obtenemos

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\sigma)}{\tau - z}\, d\tau + i \int_{Lm} \mu(\sigma)\, d\sigma, \qquad (37.37')$$

siendo la densidad μ bien determinada en el contorno L_m, mientras que en los demás contornos se determina salvo un sumando de tipo

$$c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \ldots + c_{m-1}\beta_{m-1},$$

donde c_j son constantes reales arbitrarias, y

$$\beta_j(s) = \begin{cases} 1 \text{ para } t \in L_j \ (j = 1, 2, \ldots, m-1), \\ 0 \text{ en las demás curvas.} \end{cases} \qquad (37.38)$$

Al tomar, según la fórmula de Sojotski, el valor límite de la función (37.37') y sustituyéndolo en la condición de contorno (37.36), obtendremos la siguiente ecuación integral para determinar $\mu(s)$

$$a(s)\,\mu(s) + \operatorname{Re}\left\{\frac{a(s) - ib(s)}{\pi i} \int_L \frac{\mu(\sigma)}{\tau - t}\, d\tau\right\} + \\ + 2b(s) \int_{Lm} \mu(\sigma)\, d\sigma = 2c(s). \qquad (37.39)$$

Esta ecuación será investigada en el p. 37.8.

37.7. Ecuación integral transpuesta y problema de Hilbert transpuesto. Con el fin de investigar la cuestión acerca de la resolubilidad de la ecuación integral (37.39), compongamos una ecuación transpuesta a la mencionada. Para ello, pasemos a unas variables reales, suponiendo

$$t = t(s), \quad \tau = \tau(\sigma), \quad d\tau = \tau'(\sigma)\, d\sigma,$$

y representemos la última integral del primer miembro de la ecuación (37.39) en la forma

$$2 \int_L b(s)\, \beta_m(\sigma)\, \mu(\sigma)\, d\sigma.$$

Una ecuación homogénea, transpuesta a la ecuación (37.39), puede escribirse en este caso así

$$a(s)\nu(s) - \operatorname{Re}\left\{\frac{t'(s)}{\pi i}\int_L \frac{a(\sigma)-ib(\sigma)}{\tau-t}\nu(\sigma)\,d\sigma\right\} = \\ = -2\beta_m(s)\int_L b(\sigma)\nu(\sigma)\,d\sigma. \qquad (37.39')$$

Convengamos en considerar que la ecuación integral (37.39') está compuesta para la resolución de cierto problema de Hilbert por analogía con la ecuación (37.39), compuesta con el fin de resolver el problema (37.36).

Examinemos la integral de tipo de Cauchy definida en

$$\sum_{j=0}^{m} D_j^-,$$

$$\Phi(z) = -\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{a(\sigma)-ib(\sigma)}{\tau-z}\nu(\sigma)\,d\sigma = \\ = -\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{a(\sigma)-ib(\sigma)}{\tau'(\sigma)}\frac{\nu(\sigma)}{\tau-z}\,d\tau. \qquad (37.40)$$

Entonces, en virtud de las fórmulas de Sojotski aplicadas a cada uno de los dominios D_j^-, la ecuación (37.39') puede escribirse en la forma

$$\operatorname{Re}[t'(s)\Phi(t)] = -2\beta_m(s)\int_L b(\sigma)\nu(\sigma)\,d\sigma. \qquad (37.41)$$

Por hipótesis, la función $\Phi(z)$, prescrita por la fórmula (37.40), está definida en un dominio complementario respecto de D^+. Consecuentemente, las igualdades (37.41) representan en sí las condiciones de contorno de los problemas de Hilbert para $m+1$ dominios simplemente conexos: D_1^-, D_2^-, . . ., D_m^-, dispuestos dentro de las curvas L_1, . . ., L_m, y para D_0^-, dispuesto fuera de la curva L_0. Entre estos problemas serán homogéneos interiores los problemas para dominios D_1^-, . . ., D_{m-1}^-; no homogéneo interior para el dominio D_m, y homogéneo exterior para el dominio D_0^-.

Probemos que todos los problemas de contorno (37.41) pueden tener sólo solución nula. Consideraremos las integrales

$$\Psi_j(z) = \int_{t_j}^{z} \Phi(\tau)\,d\tau, \quad z \in D_j^- \quad (j=0, 1, \ldots, m), \qquad (37.41')$$

donde $\Phi(z)$ es la solución del problema (37.41), y la vía de integración no sale de los límites de $D_j^- + L_j$. Para $z=t \in L_j$ $(j=1, 2, \ldots$ $\ldots, m-1)$ supondremos que la integración se realiza a lo largo

de L_j. En este caso, teniendo en cuenta las condiciones de contorno (37.41), tendremos

$$\operatorname{Re} \Psi_j(t) = \int_{t_j}^{t} \operatorname{Re}[\Phi(\tau)\,\tau'(\sigma)]\,d\sigma = \int_{t_j}^{t} 0 \cdot d\sigma = 0. \qquad (37.41'')$$

De las últimas igualdades se infiere que $\Psi_j(z) \equiv 0$ ($j = 1, 2, \ldots, m-1$), por lo cual $\Phi(z) \equiv 0$, cuando $z \in D_j^-$ ($j = 1, 2, \ldots, m-1$).

En el caso de $j = m$, de (37.41) y (37.41') tenemos

$$\operatorname{Re} \Psi_m(t) = \int_{t_j}^{t} \operatorname{Re}[\Phi(\tau)\,\tau'(\sigma)]\,d\sigma =$$

$$= -2 \int_L b(\sigma)\,\nu(\sigma)\,d\sigma \cdot \text{longitud del arco } t_j t.$$

El primer miembro de la última igualdad es una función uniforme, mientras que en el segundo miembro el arco puede cambiar en función del número de recorridos a lo largo de la curva L_j, a consecuencia de que la última igualdad se verifica sólo cuando se cumple la condición

$$\int_L b(\sigma)\,\nu(\sigma)\,d\sigma = 0. \qquad (37.42)$$

Así pues, $\operatorname{Re} \Psi_m(t) = 0$, $t \in L_m$ y, por lo tanto, $\Psi_m(z) = ic$. Sustituyendo en (37.41') y derivando, obtendremos $\Phi(z) = 0$ para $z \in D_m^-$.

Pasemos, por fin, al dominio D_0^-. Desarrollando la integral (37.40) en una serie en el entorno de un punto infinitamente alejado y tomando en consideración la igualdad (37.42), obtenemos

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_L a(\sigma)\,\nu(\sigma)\,d\sigma \cdot \frac{1}{z} + \ldots \qquad (37.43)$$

De aquí, según el teorema de residuos

$$\int_{L_0} \Phi(t)\,dt = -2 \int_L a(\sigma)\,\nu(\sigma)\,d\sigma,$$

de donde

$$\operatorname{Im} \int_{L_0} \Phi(t)\,dt = 0.$$

Pero, de la igualdad (37.41″), para $j = 0$, se deduce que $\operatorname{Re} \int_{L_0} \Phi(t)\, dt = 0$; por consiguiente $\int_{L_0} \Phi(t)\, dt = 0$. La última igualdad demuestra la uniformidad de la función $\Psi_0(z)$, definida por la igualdad (37.41′) en D_0^-. Como que $\operatorname{Re} \Psi_0(t) = 0$ para $t \in L_0$, entonces $\Phi(z) \equiv 0$ en D_0^-.

Hemos demostrado de este modo que $\Phi(z) \equiv 0$ para cualquier punto de complemento de D^+ hasta un plano entero. De aquí proviene que la densidad de la integral de tipo de Cauchy (37.40) es el valor de contorno de cierta función $\varphi^+(z)$, analítica en D^+, es decir,

$$\frac{a(s) - ib(s)}{t'(s)} \nu(s) = \varphi^+(t). \qquad (*)$$

Al eliminar $\nu(s)$, tenemos

$$\operatorname{Re} \{it'(s)\, [a(s) + ib(s)]\, \varphi^+(t) = 0. \qquad (37.44)$$

La última igualdad es la condición de contorno del problema de Hilbert con relación a la función $\varphi^+(z)$. Este problema se llamará *transpuesto* respecto al problema dado de Hilbert (37.36).

37.8. Investigación de las cuestiones de resolubilidad. Al haber resuelto la ecuación integral (37.39), encontraremos, por intermedio de la fórmula (37.37′), todas las soluciones del problema de contorno de Hilbert (37.36). Por esto, la investigación de las cuestiones referentes a la resolubilidad del problema de contorno se reduce, en primer lugar, a la investigación de la resolubilidad de una ecuación integral y, después, a la aclaración de una cuestión si a toda solución de la ecuación integral corresponde la solución (no nula) del problema de contorno.

Examinemos una ecuación integral homogénea

$$a(s)\, \mu(s) + \operatorname{Re} \left\{ [a(s) - ib(s)]\, \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\mu(\sigma)}{\tau - t}\, d\tau \right\} + 2b(s) \int_{L_m} \mu(\sigma)\, d\sigma = 0, \qquad (37.45)$$

correspondiente al problema de contorno de Hilbert homogéneo ($c(s) \equiv 0$). Probemos, ante todo, que la ecuación (37.45) tiene $m - 1$ soluciones no nulas, a las cuales corresponden las soluciones nulas ($F(z) \equiv 0$) del probema de contorno.

Efectivamente, la ecuación (37.45) puede escribirse en la forma

$$\lim_{z \to t} \operatorname{Re} \left\{ [a(s) - ib(s)] \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\sigma)}{\tau - z}\, d\tau + i \int_{L_m} \mu(\sigma)\, d\sigma \right] \right\} = 0.$$

Razonando sumamente igual que en el p. 37.1, al resolver la ecuación (37.4'), llegamos a que las funciones

$$\beta_j(s) = \begin{cases} 1 \text{ para } t \in L_j & (j = 1, 2, \ldots, m-1), \\ 0 \text{ en las demás curvas} \end{cases} \tag{37.38}$$

son las soluciones de la ecuación (37.45).

Para estos valores de $\mu(s)$ la fórmula (37.37') da la función $F(z)$ que es idénticamente igual a cero. De aquí se deduce que *el número de soluciones del problema de contorno de Hilbert es en m — 1 inferior al número de soluciones de la ecuación integral correspondiente.*

Sea k el número de soluciones de la ecuación integral (37.45) y sea l el número de soluciones del correspondiente problema (homogéneo) de Hilbert. En virtud de lo que acabamos de decir

$$k - l = m - 1. \tag{37.46}$$

Designaremos con k', l' los números correspondientes para la ecuación integral transpuesta y el problema de Hilbert transpuesto. De acuerdo con la igualdad (*), a toda solución de la ecuación integral transpuesta (37.39') corresponde una solución determinada (no nula) del problema de contorno de Hilbert transpuesto. Por consiguiente, tendremos

$$k' = l'. \tag{37.47}$$

Calculemos el índice de la ecuación integral (37.45). Con este fin despejamos su parte característica. Puesto que (véase el § 10)

$$\frac{d\tau}{\tau - t} = \frac{dr}{r} + i\, d\theta,$$

la ecuación integral (37.45) puede ser escrita en la forma

$$a(s)\,\mu(s) - \frac{b(s)}{\pi}\int_L \mu(\sigma)\,\frac{dr}{r} + \frac{a(s)}{\pi}\int_L \mu(\sigma)\,d\theta + 2b(s)\int_{Lm} \mu(\sigma)\,d\sigma = 0.$$

La integral $\int_L \mu(\sigma)\,d\theta$ representa en sí un potencial de capa doble y bajo el supuesto hecho respecto al contorno (las curvas de Liapunov) no es singular. La integral singular nos proporciona el término $\int_L \mu(\sigma)\,\frac{dr}{r}$. Partiendo de las consideraciones geométricas, podríamos demostrar que $\frac{dr}{r} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2} +$ un núcleo fredholmiano y reducir, de este modo, la ecuación (37.45) a una ecuación con núcleo de Hilbert (real). No obstante, resulta más fácil despejar la parte caracte-

rística con núcleo de Cauchy. Para esto sustrayamos y sumemos el término

$$\frac{ib(s)}{\pi}\int_L \mu(\sigma)\,d\theta.$$

Obtendremos

$$a(s)\,\mu(s)-\frac{b(s)}{\pi}\int_L \frac{\mu(\sigma)}{\tau-t}\,d\tau+\frac{a(s)-ib(s)}{\pi}\int_L \mu(\sigma)\,d\theta+$$

$$+2b(s)\int_{L_m}\mu(\sigma)\,d\sigma=0.$$

El coeficiente del problema de Riemann correspondiente tiene por expresión (p. 21.1):

$$G(t)=\frac{a(s)+ib(s)}{a(s)-ib(s)}.$$

Por consiguiente, el índice de la ecuación será

$$\operatorname{Ind}\frac{a(s)+ib(s)}{a(s)-ib(s)}2\varkappa. \tag{37.48}$$

Calculemos, además, el índice $\varkappa'$ del problema de Hilbert transpuesto (37.44):

$$\varkappa'=\operatorname{Ind}\{\overline{t'}\,[a(s)-ib(s)]\}=-\operatorname{Ind}t'-\varkappa.$$

Como ya se ha indicado, $t'=\frac{dt}{ds}=e^{i\alpha}$, donde α es el ángulo formado por una tangente al contorno con el eje de Ox. Cuando el punto t recorre en el sentido positivo el contorno exterior, el argumento t' adquiere un incremento 2π, y -2π, cuando se recorre el contorno interior; por esta razón $\operatorname{Ind}t'=1-m$, y, por lo tanto

$$\varkappa'=-\varkappa+m-1. \tag{37.49}$$

Definición. Se denominará *orden angular de un dominio* a la expresión $\operatorname{Ind}t'$, es decir, al número de revoluciones completas que hace la tangente al contorno, cuando éste se recorre en el sentido positivo.

El orden angular del dominio en consideración es igual a $1-m$.

La correlación (37.49) puede enunciarse así: *el índice del problema de Hilbert transpuesto es igual a la suma del índice del problema de Hilbert dado y del orden angular del dominio, tomados con signos opuestos.*

En vista del tercer teorema de Noether (p. 23.2), tendremos

$$k-k'=2\varkappa.$$

Teniendo en cuenta las correlaciones (37.46), (37.47), (37.49), obtenemos

$$l - l' = k - k' - (m - 1) = 2\varkappa - (m - 1) = \varkappa - \varkappa', \quad (37.50)$$

es decir, *la diferencia del número de soluciones de los problemas de Hilbert transpuestos es igual a la diferencia de sus índices.*

Esto es el resultado fundamental que puede ser obtenido de la teoría de ecuaciones integrales. Hagamos uso, además, del resultado el cual se ha obtenido en el p. 37.4, al estudiarse inmediatamente el propio problema de contorno:

El problema de contorno de índice negativo es insoluble, es decir, $l = 0$ *para* $\varkappa < 0$, *y* $l' = 0$ *para* $\varkappa' < 0$.

De aquí resulta que para $\varkappa < 0$ es insobuble el problema homogéneo de Hilbert dado, y si es que $\varkappa > m - 1$, será insoluble el problema transpuesto (y, consecuentemente, la ecuación integral singular transpuesta).

Empleando también el segundo teorema de Noether sobre la resolubilidad de una ecuación singular no homogénea, obtendremos el siguiente resultado.

Teorema. *La diferencia entre los números de soluciones de los problemas de Hilbert homogéneos* (37.24) *y* (37.44) *es igual a*

$$l - l' = 2\varkappa - m + 1. \quad (37.50')$$

Si $\varkappa < 0$ *o bien* $\varkappa > m - 1$, *entonces*

$$l = \text{máx}\,\{0,\ 2\varkappa - m + 1\}. \quad (37.51)$$

Para que el problema de Hilbert no homogéneo (37.24) *sea resoluble, es necesario y suficiente que se verifiquen las igualdades*

$$\int_L c(s)\,[a(s) + ib(s)]\,\varphi_j^+(t)\,dt = 0 \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ l'),$$

donde $\varphi_j^+(t)$ *son soluciones linealmente independientes del problema de Hilbert homogéneo transupesto* (37.44).

El resultado contenido en la fórmula (37.51) puede ser enunciado así:

Si el índice del problema es mayor que el orden angular del dominio de signo opuesto, el número de soluciones del problema es igual a la suma del índice doblado del problema y del orden del dominio.

La afirmación acerca del número de soluciones del problema de Hilbert para un dominio simplemente conexo ($m = 0$), enunciada en el capítulo IV, constituye un caso particular del resultado recién enunciado.

De este modo, resultan enteramente investigados los casos $\varkappa < 0$ y $\varkappa > m - 1$. Quedan (aún no estudiados) los casos[1]) en que $0 \leqslant \varkappa \leqslant m - 1$, los cuales comenzamos a investigar ahora mismo.

37.9. Investigación de los casos $\varkappa = 0$ y $\varkappa = m - 1$. Hemos de transformar aquí los métodos aplicados antes. Observemos, ante todo, lo siguiente. En el p. 37.4 (fórmula (37.32)) se ha mostrado que en el caso de Ind $(a + ib) \geqslant 0$, la existencia de un factor de regularización uniforme constituye una condición suficiente para que el problema de Hilbert homogéneo Re $[(a - ib) F(t)] = 0$ sea resoluble. Es fácil advertir que para Ind $(a + ib) = 0$, la existencia de tal factor es también una condición necesaria de resolubilidad de este problema. En efecto, si tal factor no existiera, el primer miembro de la condición de contorno no podría ser representado en forma de la parte real de una función uniforme y analítica en el dominio y, consecuentemente, la solución del problema de Hilbert en funciones analíticas uniformes sería imposible.

LEMA. *El problema de contorno de Hilbert*

$$\text{Re}\,[e^{ih(s)} F(t)] = 0, \tag{37.52}$$

donde

$$h(s) = 0 \text{ en } L_0, \quad h(s) = h_j = \text{const en } L_j \ (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{37.53}$$

con la particularidad de que

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant h_j \leqslant \frac{\pi}{2} \tag{37.54}$$

es resoluble cuando, y sólo cuando, $h(s) \equiv 0$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $p(s)$ un factor de regularización del problema, de suerte que se verifica la igualdad

$$p(s)\, e^{ih(s)} = e^{i\gamma(t)}.$$

De conformidad con los razonamientos del p. 37.5 la búsqueda del factor de regularización es equivalente a la búsqueda de la función analítica y uniforme $\gamma(z)$ según la condición de contorno Re $\gamma(t) = h(s)$. En virtud del teorema de unicidad del problema de Dirichlet modificado (p. 37.1), Re $\gamma(z) \equiv 0$. Por consiguiente, también $h(s) \equiv 0$, lo que se trataba de demostrar.

Ha de ser notado que cambiando (en el caso de necesidad) el signo en la condición de contorno (37.52), lo que es equivalente a la multiplicación de la igualdad por $e^{\pm \pi i}$, siempre se puede lograr que h_j satisfagan la condición (37.54).

Pasemos, ahora, a la consideración del problema fundamental.

---

[1]) Estos casos se han denominado por I. N. Vekua como singulares (véase [2]).

A. Sea $\varkappa = \operatorname{Ind}[a(s) + ib(s)] = 0$. Buscaremos el factor de regularización en la clase de funciones uniformes. La búsqueda del factor, según se conoce, es equivalente a la búsqueda de una función analítica $\gamma(z)$ por el valor de contorno de su parte real $\omega(s)$. Como la resolución de este problema en la clase de funciones uniformes es, en el caso general, imposible, reduzcamos la cuestión a un problema de Dirichlet modificado.

Hagamos

$$a(s) + ib(s) = e^{i\omega(s)} = e^{-ih(s)} e^{i[\omega(s)+h(s)]},$$

donde $h(s)$ se determina mediante las expresiones (37.53). De acuerdo con las investigaciones realizadas en el p. 37.1, se puede hallar una función analítica uniforme $\gamma(z)$ cuya parte real toma en el contorno el valor $\omega(s) + h(s)$ (h_j no se prefijan de antemano). Por esta razón la condición de contorno del problema de Hilbert homogéneo puede reducirse a la forma

$$\operatorname{Re}[e^{ih(s)} e^{-i\gamma(t)} F(t)] = 0, \tag{37.55}$$

con la particularidad de que todas las h_j se determinan uniformemente y satisfacen la condición (37.54).

Si en la última expresión $h(s) \equiv 0$, suele decirse que *se satisfacen las condiciones de uniformidad.* En el caso de que siquiera una de h_j sea distinta de cero, se considerará que las condiciones de uniformidad *no están cumplidas.* Examinemos estos casos.

1. Las condiciones de uniformidad no están cumplidas ($h(t) \not\equiv 0$). En virtud del lema, el problema de Hilbert homogéneo no tiene soluciones, es decir, $l = 0$. De aquí, según la fórmula (37.50), $l' = k' = m - 1$. Por consiguiente, en este caso *el problema no homogéneo será soluble cuando, y sólo cuando, resultan cumplidas* $m - 1$ *condiciones de ortogonalidad.*

2. Las condiciones de uniformidad están cumplidas ($h(t) \equiv 0$). En este caso el problema de contorno homogéneo tiene la única solución, $l = 1$. De aquí, $l' = k' = m$. Por lo tanto, *el problema no homogéneo es resoluble, si se cumplen m condiciones.*

B. Sea ahora $\varkappa = m - 1$. Entonecs, en vista de la fórmula (37.49), $\varkappa' = 0$.

Realicemos un razonamiento análogo al anterior respecto del problema de Hilbert transpuesto.

Aquí, de nuevo, tendrán lugar los dos casos.

1. Para el problema transpuesto las condiciones de uniformidad quedan no cumplidas. Entonces, $l' = k' = 0$, $l = m - 1$. En este caso los problemas de Hilbert homogéneo y no homogéneo serán incondicionalmente resolubles y el primer problema tendrá $m - 1$ soluciones linealmente independientes.

2. Las condiciones de uniformidad para el problema transpuesto están cumplidas. Entonces, $l' = k' = 1$, $l = m$. Aquí, el problema

de Hilbert homogéneo tiene m soluciones. Para que el problema no homogéneo sea resoluble, es necesario y suficiente que se cumpla una condición de ortogonalidad.

Con el fin de apreciar correctamente los resultados obtenidos en el presente punto, se debe tomar en consideración que la cuestión acerca de sí están cumplidas o no las condiciones de uniformidad, puede ser resuelta independientemente de las ecuaciones integrales. Expliquemos esto con algunos pormenores.

El hecho de que todas las h_j son nulas implica que la función dada $\omega(s) = \operatorname{arctg} \frac{b(s)}{a(s)}$ es el valor de contorno de la parte real de la función $\gamma(z)$, analítica y uniforme en D^+. Si la función $\gamma(z)$ se busca con ayuda del operador de Schwarz, entonces, debido a la unicidad, obtendremos la misma función que se ha obtenido de la solución del problema de Dirichlet modificado. En este caso han de cumplirse las condiciones de uniformidad (37.30). El cumplimiento de las últimas equivale, evidentemente a que todas las h_j son nulas. Las funciones $\alpha_j(s)$, que figuran en la condición (37.30), no dependen de las condiciones del problema de contorno, sino de la forma del contorno L (véanse las fórmulas (37.13) y (37.14')) y por esta razón pueden ser definidas sin resolver las ecuaciones integrales del problema.

Aclaremos esto con un EJEMPLO.

Supongamos que el dominio dado D^+ es un anillo encerrado entre dos circunferencias concéntricas $q < |z| < 1$. Ha de ser notado que todo dominio doblemente conexo puede reducirse a este caso particular mediante una aplicación conforme (con la elección correspondiente de q) [1]).

Examinemos un problema de contorno de Hilbert

$$\operatorname{Re}[(a - ib) F(t)] = c$$

de índice nulo.

Al principio definamos las funciones $\beta_j(z)$ de conformidad con las condiciones (37.14). Aquí, $m = 1$. La comprobación inmediata muestra que la función β_1, que es armónica en el anillo reduciéndose a la unidad en la circunferencia interior y a cero en la exterior, puede ser definida en coordenadas polares mediante la igualdad

$$\beta_1(r, \theta) = \frac{1}{\ln q} \ln r.$$

A continuación, tenemos

$$\text{en } L_0 \alpha_1(1, \theta) = \frac{\partial \beta_1}{\partial \nu}\Big|_{r=1} = -\frac{\partial \beta_1}{\partial r}\Big|_{r=1} = -\frac{1}{\ln q},$$

$$\text{en } L_1 \alpha_1(q, \theta) = \frac{\partial \beta_1}{\partial \nu}\Big|_{r=q} = \frac{\partial \beta_1}{\partial r}\Big|_{r=1} = \frac{1}{q \ln q}.$$

Escribamos, ahora la condición de uniformidad (37.30) Entonces, $d\sigma = d\theta$ en L_0 y la integración se llena a cabo entre 0 y 2π, en L_1 $\sigma = (2\pi - \theta) q$, $d\sigma = -q d\theta$ con los iímites de integración $(2\pi, 0)$. Al permutar en la última integral

[1]) Véase, por ejemplo, M. V. Keldish 1)*.

los límites de integración y al designar los valores $\operatorname{arctg} \frac{b(\sigma)}{a(\sigma)}$ en L_0 y L_1 con $\omega_0(\theta)$ y $\omega_1(\theta)$, respectivamente, obtendremos

$$-\int_0^{2\pi} \frac{1}{\ln q} \omega_0(\theta)\, d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{1}{\ln q} \frac{1}{q} \omega_1(\theta)\, q\, d\theta = 0$$

o bien

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega_0(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega_1(\theta)\, d\theta.$$

Teniendo presente que las últimas magnitudes proporcionan los coeficientes iniciales $a_0^{(0)}$, $a_0^{(1)}$ del desarrollo de las funciones correspondientes en las series de Fourier, obtenemos el siguiente resultado:

Si los desarrollos de la función $\operatorname{arctg} \frac{b(\theta)}{a(\theta)}$ *en las series de Fourier sobre las circunferencias* $|z| = 1$ *y* $|z| = q$ *tienen coincidentes los coeficientes iniciales* a_0, $a_0^{(1)}$, *entonces, ambos problemas de Hilbert transpuestos homogéneos poseen sendas soluciones; cuanto a los problemas no homogéneos, éstos son resolubles, si se cumple aunque una condición.*

Si dichos coeficientes son distintos, los problemas transpuestos homogéneos son insolubles, mientras que los no homogéneos se resuelven incondicional y uniformemente.

Enunciemos, además, los resultados para el caso de un dominio triplemente conexo $m = 2$, $l - l' = 2\varkappa - 1$.

I. $\varkappa < 0$. El problema homogéneo es insoluble. El problema no homogéneo es resoluble, si se cumplen $1-2\varkappa$ condiciones.

II. $\varkappa > 1$. El problema homogéneo tiene $2\varkappa - 1$ soluciones. El no homogéneo es incondicionalmente resoluble.

III. $\varkappa = 0$, $l - l' = -1$.

1) Las condiciones de uniformidad para la función $a + ib$ están cumplidas.

El problema homogéneo tiene una solución, el no homogéneo es resoluble cuando se cumplen dos condiciones.

2) Las condiciones de uniformidad para la función $a + ib$ no están cumplidas.

El problema homogéneo es insoluble, el no homogéneo se resuelve, cuando se cumple una condición.

IV. $\varkappa = 1$, $l - l' = 1$.

1) Las condiciones de uniformidad para la función $\overline{t}'(a - ib)$ están cumplidas.

El problema homogéneo tiene dos soluciones, el no homogéneo es resoluble, si se cumple una condición.

2) Las condiciones de uniformidad para $\overline{t}'(a - ib)$ no están cumplidas.

El problema homogéneo tiene una solución, el no homogéneo es incondicionalmente resoluble.

De este modo, la investigación del problema de Hilbert para los dominios doblemente conexo y triplemente conexo puede considerarse acabada. Para $m > 2$ quedan no investigados $m - 2$ casos $1 \leqslant \varkappa \leqslant m - 2$.

37.10. Conexión con la aplicación sobre un plano dotado de cortes. Expondremos, ahora, algunos razonamientos referentes

a la resolubilidad del problema de Hilbert para aquellos casos, $0 < \varkappa < m - 1$, que han quedado no investigados.

Supongamos que el índice del problema es igual a la unidad y para la función $a + ib$ se cumplen las condiciones de uniformidad. En este caso la condición de contorno del problema homogéneo puede reducirse a la forma

$$\operatorname{Re}\left[\frac{F(t)}{t}\right] = 0. \tag{37.56}$$

Este problema tiene una solución obvia $F(z) = iCz$. Mas ¿existe una solución del problema tal que $\frac{F(z)}{z} \neq \text{const}$. Si tal solución existe, entonces, en virtud de la condición (37.56), la función $\omega(z) = \frac{F(z)}{z}$ toma en el contorno L unos valores puramente imaginarios. En el lenguaje geométrico esto implica que en el caso dado existe una función analítica uniforme $\omega(z)$, que aplica el dominio D, limitado con el contorno dado L, sobre un plano con cortes rectilíneos dispuestos a lo largo del eje imaginario, y que tiene un polo simple en el origen de coordenadas.

Viceversa, si existe la función $\omega(z)$ que realiza la aplicación mencionada, entonces el problema de Hilbert (37.56) tiene más que una solución. Así pues, la cuestión acerca del número de soluciones del problema de contorno en consideración resulta íntimamente relacionada con las propiedades geométricas del dominio.

Sabemos[1]) de la teoría de aplicación conforme que existe una función que aplica conformemente cualquier dominio múltiplemente conexo sobre un plano con cortes rectilíneos paralelos a cierta recta; pero estos cortes, en el caso general, no se ubican en una misma recta.

DEFINICIÓN. Si el dominio múltiplemente conexo D es aplicado por una función uniforme analítica, que tiene un polo simple en el origen, sobre un dominio con cortes dispuestos en una misma recta, diremos que D *es un dominio de tipo* D^0. De lo contrario, D *no será el dominio de tipo* D^0.

Es fácil mostrar que existen los dominios de tipo D^0 de cualquier conexión finita. Por ejemplo, si un dominio tiene el eje de simetría que lo divide en dos dominios simplemente conexos, será de tipo D^0. Podemos convencernos de esto con facilidad, aplicando una parte del dominio, dispuesto por un lado del eje de simetría, sobre el semiplano y sirviéndonos del principio de simetría. Se sabe[2]) que los dominios doblemente conexos y triplemente conexos pertenecen al tipo D^0. Esto puede obtenerse con facilidad del razonamiento expre-

[1]) Véase, por ejemplo, M. V. Keldish 1)*.

[2]) Véase S. A. Chapliguin «A la teoría del triplano» (С. А. Чаплыгин, «К теории триплана», Собр. соч., т. II, 1948).

sado más arriba, puesto que todo dominio doblemente conexo o triplemente conexo puede ser aplicado sobre un dominio circular dotado del eje de simetría.

Para los dominios de tipo D^0 se puede deducir el siguiente resultado exacto sobre el número de soluciones del problema de Hilbert.

TEOREMA. *Si un dominio es de tipo D^0 y se cumplen las condiciones de uniformidad* (37.30), *el problema de contorno de Hilbert homogéneo con índice $0 \leqslant \varkappa \leqslant m$ tiene $l = \varkappa + 1$ soluciones linealmente independientes.*

DEMOSTRACIÓN. Basándonos en lo dicho anteriormente, en el caso que se considera, podemos reducir la condición de contorno a una forma siguiente:

$$\operatorname{Re}\,[t^{-\varkappa}F\,(t)] = 0. \tag{37.57}$$

El problema expresado por la última condición de contorno puede enunciarse así: hállese una función $Q\,(z)$, uniforme en D y analítica en él a excepción del origen de coordenadas, donde se admite un polo de orden no superior a $\varkappa$, cuya parte real en el contorno sea nula. Esto es el mismo problema que en el p. 37.4 se denominó problema A_0, mas con la restricción adicional acerca de la uniformidad de la solución. Resulta que para los dominios de tipo D^0 la función $Q\,(z)$ se construye con facilidad.

Supongamos que $\omega\,(z) = u + iv$ aplica el dominio D sobre un plano dotado de cortes rectilíneos a lo largo del eje real, con la particularidad de que el cero pasa en un punto infinitamente alejado. Para concretar uniformemente el problema exigiremos, además, que el contorno L_0 se aplique en un segmento del eje entre los puntos 0 y 1.

En este caso las funciones

$$W_k\,(z) = i\,[\omega\,(z)]^k \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ \varkappa) \tag{37.58}$$

serán las soluciones del problema. Efectivamente, estas funciones tendrán en el origen de coordenadas un polo de orden no superior a $\varkappa$ y, además, en el contorno, en virtud de la propiedad de la función $\omega\,(z)$, tendremos $\operatorname{Im}\,\omega\,(t) = v\,(t) = 0$. Por esto

$$\operatorname{Re}\,[W_k\,(t)] = \operatorname{Re}\,\{i\,[u\,(t) + iv\,(t)]^k\} = \operatorname{Re}\,\{i\,[u\,(t)]^k\} = 0.$$

Hemos de notar ahora mismo que, en virtud del planteamiento del problema (37.57), si cierta función $\Phi\,(z)$ es una solución de este problema para cierto $\varkappa = \varkappa_0$, será solución también para todo $\varkappa > \varkappa_0$.

Demostremos ahora que además de $\varkappa + 1$ soluciones obtenidas las cuales serán, evidentemente, linealmente independientes, otras soluciones no existen. Admitamos lo contrario, a saber, que para cierto $\varkappa_0$ $(0 \leqslant \varkappa_0 \leqslant m)$ existe una solución $\Phi\,(z)$ más. Entonces, en vista de la observación hecha más arriba, será la solución también

para $\varkappa = m$. De aquí se infiere que para $\varkappa = m$ el problema tiene $m + 2$ soluciones linealmente independientes

$$W_0(z), \quad W_1(z), \ \ldots, \ W_m(z), \quad \Phi(z).$$

Mas, esto contradice al hecho establecido anteriormente (p. 37.8) de que para $\varkappa = m$ el problema tiene $2m - (m - 1) = m + 1$ soluciones. El teorema queda demostrado.

La solución general $Q(z)$ tendrá por expresión

$$Q(z) = i \sum_{k=0}^{\varkappa} \beta_k \omega^k(z), \tag{37.59}$$

donde β_k son unas constantes reales arbitrarias.

Según las fórmulas (37.50), tendremos

$$l' = l - 2\varkappa + (m - 1) = m - \varkappa.$$

Por lo tanto, el problema de Hilbert no homogéneo en el caso dado será soluble al cumplirse $m - \varkappa$ condiciones.

He aquí algunos razonamientos generales con motivo de los resultados obtenidos.

Se ha establecido que para los valores de $\varkappa < 0$ y $\varkappa > m - 1$, las cuestiones de resolubilidad del problema de Hilbert sólo dependen del valor de este índice. Cuando $\varkappa = 0$ y $\varkappa = m - 1$, el asunto aparece mucho más complejo y con el fin de investigar la resolubilidad nos vemos obligados a atraer una característica más, esto es, la condición de uniformidad. Para cada uno de los casos en consideración resultan posibles dos subcasos, según se cumplen o no las condiciones de uniformidad.

Las dos magnitudes que caracterizan la resolubilidad (índice y condición de uniformidad) dependen de por sí de la forma del contorno, por lo cual las cuestiones de resolubilidad del problema de Hilbert están relacionadas, de uno u otro modo, con las propiedades geométricas del dominio. Pero, cuando $\varkappa \leqslant 0$ y $\varkappa \geqslant m - 1$, ejercen la influencia sólo aquellas propiedades del dominio que determinan el índice $a + ib$ y los valores de v_j (fórmulas 37.19)).

Otro asunto es cuando $0 < \varkappa < m - 1$. Aquí, como lo muestran los razonamientos de este punto, en la investigación de resolubilidad del problema de Hilbert participa, además, la tercera característica, a saber, la pertenencia o no pertenencia del dominio al tipo D^0. Para los dominios D^0, en el caso en que se cumplen las condiciones de uniformidad, las cuestiones de resolubilidad han sido completamente resueltas.

Para $0 < \varkappa < m - 1$ quedaron no investigados todavía tres casos.

I. EL DOMINIO NO PERTENECE AL TIPO D^0:

a) Las condiciones de uniformidad se cumplen.

b) Las condiciones de uniformidad no se cumplen.

II. EL DOMINIO PERTENECE AL TIPO D^0:

Las condiciones de uniformidad no se cumplen.

Por el momento no sabemos todavía si el hecho de pertenencia o no pertenencia del dominio al tipo D^0 es la única característica geométrica adicional que influye en la resolubilidad del problema de Hilbert, o se tienen también otras características. Los resultados definitivos obtenidos para los dominios doblemente conexos y triplemente conexos muestran que para estos dominios el hecho de su pertenencia al tipo D^0 desempeña un papel decisivo.

37.11. Observaciones conclusivas. Un lector familiarizado con la forma acabada de la solución del problema de Hilbert (cap. IV) para un dominio simplemente conexo no puede sino sentir cierta desilusión después de leer el texto del párrafo presente. La variedad de los métodos de investigación y la existencia de unos casos no investigados $0 < \varkappa < m - 1$ muestran que la resolución no está finalizada.

Puede surgir la cuestión, si se trata aquí de que las investigaciones no están terminadas o bien de la imposibilidad de ofrecer los resultados más concretos. Mucho menos concretos fueron los resultados referentes a los problemas generalizados examinados en los primeros párrafos del capítulo, pero en aquel entonces considerábamos que tal situación correspondía a la naturaleza de la cuestión. ?No ocurre lo mismo en este caso? Pienso que no es así. Entre las cuestiones expuestas en los primeros párrafos del capítulo y el objeto de este párrafo existe una diferencia de principio. Esta consiste en lo que para los problemas de contorno de tipo general, precisamente a causa de su amplia generalidad, no hay otros métodos de investigación (en el caso general), sino la reducción de ellos a las ecuaciones integrales. Los resultados obtenidos en aquellas circunstancias contenían todo lo que podía ser deducido mediante este método; por esta razón, aunque a estos resultados les faltaba carácter concreto, se los debe considerar finalizados. Su perfección ulterior sólo es posible al considerar los casos particulares separados. La última observación puede resultar muy importante para los fines prácticos, lo que, no obstante, no cambia el carácter de nuestras consideraciones generales.

Otra cosa es en el caso del problema de Hilbert. Este pertenece al número de los elementales y para un dominio simplemente conexo tiene la solución terminada, obtenida mediante un método no relacionado con las ecuaciones integrales. En el caso de un dominio múltiplemente conexo este método es también aplicable, pero, a causa de la posibilidad de soluciones multiformes, él no da los resultados completos. Sin embargo, también en este caso el primer resultado finalizado (irresolubilidad del problema con índice negativo) se ha

obtenido mediante tal método. Los resultados finalizados posteriores ($\varkappa = 0, \varkappa \geqslant m - 1$) se han obtenido por combinación de este método con el de ecuaciones integrales.

La existencia del método mencionado, independiente de las ecuaciones integrales, no proporcional a base de suponer que el carácter no concreto de los resultados para $0 < \varkappa < m - 1$ fluye no de dal naturaleza de la cuestión, sino del hecho de que las investigaciones no están todavía acabadas y permite abrigar las esperanzas de que las investigaciones ulteriores darán la solución completa del problema.

37.12. Algunos resultados nuevos. En los últimos años la investigación de los casos $0 < \varkappa < m - 1$ fue adelantada por las obras de I. N. Vekua y B. V. Boyarski. Sin tener la posibilidad de entrar en los pormenores, demos a conocer simplemente los hechos fundamentales sacados del libro de I. N. Vekua [2]. (En este mismo libro hay un complemento de B. V. Boyarski referente a la cuestión en consideración).

1°. En el p. 37.10 se ha mostrado que si se cumplen las condiciones de uniformidad, al crecer el índice, el número de soluciones linealmente independientes del problema homogéneo no puede disminuir, es decir, $l_{\varkappa+1} \geqslant l_\varkappa$. Ahora está establecido que este hecho tiene lugar en el caso general. La demostración no es difícil. Se deduce de lo que el número de soluciones del problema de contorno $\operatorname{Re}[e^{ih(s)}F(t)] = 0$ en la clase de funciones con polo admisible de orden $\varkappa + 1$, en todo caso, no es inferior que este número para un polo admisible de orden $\varkappa$. Pero, por otro lado, el número desoluciones no puede crecer de un modo demasiado rápido. No es difícil mostrar que al aumentar el índice en una unidad, pueden añadirse a lo sumo dos nuevas soluciones independientes, a saber, las soluciones cuyas partes principales tienen por comienzo los términos $1/z^{\varkappa+1}$, $i/z^{\varkappa+1}$. Por consiguiente, para el número de soluciones obtenemos la acotación

$$l_\varkappa \leqslant l_{\varkappa+1} \leqslant l_\varkappa + 2. \tag{37.60}$$

2°. Está indicada exactamente la cota superior para el número de soluciones

$$l_\varkappa \leqslant \varkappa + 1. \tag{37.61}$$

Se ha obtenido por B. V. Boyarski con la ayuda de un procedimiento simple y, a la vez, gracioso consistente en el cálculo del número de soluciones de un problema de contorno obtenido por multiplicación de las condiciones de contorno de dos problemas de contorno recíprocamente conjugados. Al principio se obtiene la desigualdad $l_\varkappa + l'_\varkappa \leqslant m + 1$, de donde a continuación, en virtud de (37.50) proviene (37.61).

La precisión de la acotación se infiere de los ejemplos en los cuales ella se consigue. Uno de tales ejemplos es el teorema 37.10.

3°. La investigación de la resolubilidad del problema de contorno puede ser reducida a la investigación de resolubilidad de cierto sistema de p ecuaciones algebraicas lineales con $2\varkappa$ incógnitas. Esto fue probado aún por D. A. Kveselava 4)*. De este modo, el cálculo del número de soluciones del problema de contorno equivale a establecer el rango de la matriz correspondiente. En aquellos casos en que este rango resulta igual a $2\varkappa$, el número de soluciones del problema se calcula según la fórmula (37.51) $l_\varkappa = \text{máx}\,(0, 2\varkappa - m + 1)$, que es legítima para los casos no excepcionales del índice (p. 37.8). B. V. Boyarski ha establecido que la suma de cuadrados de los módulos de menores de orden $2\varkappa$ de la matriz en investigación es una función analítica de las constantes $h_1, \ldots, h_m$ y del punto z_0 en el cual se admite un polo de la solución (en nuestro caso este

polo se ubicaba en el origen de coordenadas). De esto modo, el rango de la matriz resulta ser distinto de $2\varkappa$ sólo en el conjunto de ceros de una cierta función analítica. De aquí se deduce que la alteración de la forma normal (37.51) para el número de soluciones sólo sucede en unos casos particulares.

4°. Por analogía con el p. 37.10, donde para el caso de cumplirse las condiciones de uniformidad se ha establecido la relación con la aplicación sobre un plano con cortes por el eje real, en el caso general se establece la relación con la aplicación sobre un plano con cortes radiales.

§ 38. Problema de contorno inverso para un dominio múltiplemente conexo [1]

Consideraremos un problema que se diferencia del examinado en el § 33 sólo en lo que un dominio definido en el plano w será múltiplemente conexo. Correspondientemente, el dominio buscado también será múltiplemente conexo.

El esquema de resolución queda igual que antes (p. 33.2), con la única diferencia de que aquí, en el caso general, no existe un dominio canónico para el cual sea conocida la expresión explícita del operador de Schwarz; por ello, hemos de resolver el problema de Schwarz inmediatamente en el dominio dado D_w, superando las dificultades que fluyen de la posibilidad de obtener una solución multiforme.

38.1. Planteamiento del problema. Sean dadas $n + 1$ pares de funciones de parámetros

$$u = u_k(s), \quad v = v_k(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant l_k \quad (k = 0, 1, \ldots, n), \qquad (38.1)$$

que son periódicas, de período l_k, y tienen derivadas las cuales satisfacen la condición de Hölder y no se reducen a cero. Las ecuaciones (38.1) definen en el dominio $w = u + iv$ $n + 1$ curvas cerradas L_{0w}, L_{1w}, . . ., L_{nw}. Convengamos en que las funciones $u_k(s)$, $v_k(s)$ son de tal género que las curvas L_{kw} no se intersecan como tampoco cortan una a otra. Ellas definen el dominio $(n + 1)$-mente conexo D_w en el plano w, sirviendo de contorno del dominio ($L_w = L_{0w} + L_{1w} + \ldots + L_{nw}$).

PROBLEMA INTERIOR. *Hállese en el plano z un contorno L_z compuesto de $n + 1$ curvas L_{0z}, L_{1z}, . . ., L_{nz} ($L_z = L_{0z} + L_{1z} + \ldots + L_{nz}$) que limitan el dominio finito D_z^+ (multivalente, en el caso general), de un modo tal que, al designar con s la longitud de los arcos de las curvas L_{kw}, las funciones complejas $w_k(s) = u_k(s) + iv_k(s)$ sean valores de contorno de la función analítica $w = w(z)$ que aplica conformemente el dominio D_z^+ en el dominio $D\omega$.*

PROBLEMA EXTERIOR. Al cambiar en la enunciación anterior el dominio finito D_z^+ por D_z^-, que contiene un punto infinitamente alejado, obtendremos el planteamiento del problema inverso exterior.

---

[1]) Este párrafo está escrito a base de las obras de F. D. Gájov **5)*** y M. T. Nuzhin 2)*.

Vamos a considerar, para concretar, que el dominio D_w es finito y que el contorno L_{0w} abarca todos los demás. Si el dominio definido inicialmente fuese infinito, dispuesto fuera de los contornos L_k, entonces, al tomar el punto w_0, ubicado en el interior L_{0w}, y al realizar la transformación $w = \frac{1}{w - w_0}$, llegaríamos al caso enunciado.

38.2. Resolución del problema interior. La longitud del arco σ del contorno L_w tendrá por expresión

$$\sigma = \sigma(s) = \int_0^s \sqrt{u'^2(s) + v'^2(s)}\, ds. \tag{38.2}$$

La función $\sigma(s)$ y su inversa $s(\sigma)$ serán monótonas positivas y tendrán derivada que satisface la condición de Hölder.

Para la función $z = z(w)$, que realiza la aplicación conforme del dominio D_w sobre D_z^+, será lícita, en virtud de las propiedades geométricas de una aplicación sobre el contorno L_w, la siguiente correlación

$$\left|\frac{dz}{dw}\right| = \frac{ds}{d\sigma} = \frac{1}{\sqrt{u'^2[s(\sigma)] + v'^2[s(\sigma)]}} = \omega(\sigma). \tag{38.3}$$

De este modo, la resolución del problema inverso se ha reducido a la resolución del siguiente problema de contorno directo:

Hállese una función $\frac{dz}{dw}$, *analítica y uniforme en el dominio múltiplemente conexo* D_w *y privado de ceros en este dominio, si su módulo en el contorno es igual a la función dada* $\omega(\sigma)$ *que es positiva y satisface la condición de Hölder.* La función $\ln\left|\frac{dz}{dw}\right|$ es armónica y constituye la parte real de la función analítica $\ln\frac{dz}{dw}$. Aclaremos el carácter de la última en el dominio D_w.

En vista de que $\frac{dz}{dw}$ está privada de ceros, $\ln\frac{dz}{dw}$ será una función analítica en el dominio D_w, pero ella no tiene que ser necesariamente uniforme. Al recorrerse el dominio D_w por un contorno cerrado, que rodea algún contorno interior L_{kw}, la función puede adquirir un incremento múltiplo de $2\pi i$.

Por consiguiente, $\ln\frac{dz}{dw}$ puede ser representada en la forma

$$\ln\frac{dz}{dw} = \Omega(w) + \sum_{j=1}^{n} m_j \ln(w - w_j), \tag{38.4}$$

donde $\Omega(w)$ es una función analítica y uniforme en D_w, m_j son unos números enteros y w_j son ciertos puntos fijados dentro de los contornos L_{jw}.

De esta manera, el problema se ha reducido al siguiente:

Hállese una funcion $\ln \frac{dz}{dw}$, *que tiene en el dominio* D_w *un caracter analítico determinado por la fórmula* (38.4), *cuya parte real en el contorno del dominio sea igual a la función dada* $\ln \omega(s)$.

Este problema se resuelve con ayuda del operador de Schwarz S (véase el p. 37.2).

$$\ln \frac{dz}{dw} = S \ln \omega + iv_0 = \gamma(w) + \sum_{j=1}^{n} \frac{p_j}{2\pi i} \ln (w - w_j) + iv_0. \quad (38.5)$$

Las constantes p_j se determinan según las fórmulas (37.19):

$$p_j = \int_L \alpha_j(\sigma) \ln \omega(\sigma)\, d\sigma; \quad (38.6)$$

$\gamma(w)$ es una función uniforme analítica.

38.3. Condiciones de resolubilidad. Comparando las expresiones (38.4) y (38.5), vemos que la fórmula (38.5) determina la solución del problema planteado sólo en el caso en que las constantes p_j serán múltiplas de 2π. Por consiguiente, queda demostrado el

TEOREMA 1. Para que el problema de contorno inverso en el caso de un dominio múltiplemente conexo sea resoluble, es necesario que se verifiquen las condiciones

$$\int_L \alpha_j(\sigma) \ln \omega(\sigma)\, d\sigma = 2\pi m_j i \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \quad (38.7)$$

donde m_j *son ciertos números enteros (positivos o negativos).*

Basándonos en el sentido geométrico de las funciones en consideración, investiguemos la cuestión sobre los valores admisibles de los números enteros m_j.

Designemos con θ_w, θ_z los ángulos formados por el eje Ox con las tangentes a los contornos L_w, L_z, y con $\theta_{z'}$, los valores del argumento $\frac{dz}{dw}$ en el contorno. Del sentido geométrico de una derivada de la función analítica se desprende la gualdad

$$\theta_z = \theta_w + \theta_{z'}.$$

Elijamos una curva determinada L_{jw} y sea L_{kz} una curva buscada en el plano z que corresponde a L_{jw}. Véamos cómo en la última igualdad cambia el argumento, cuando w recorre en el sentido positivo (con relación al dominio D_w) la curva L_{jw}. De la igualdad (38.4) se deduce, por ser uniforme $\Omega(z)$, que la alteración del argumento $[\theta_{z'}]_{L_{jw}}$ es igual a $-2\pi m_j$. Por consiguiente, se verificará la igualdad

$$[\theta_z]_{L_{kz}} = [\theta_w]_{L_{jw}} - 2\pi m_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \quad (38.8)$$

Puesto que todos los puntos w_j se ubican también dentro de L_0, tenemos

$$[\theta_z]_{L_{kz}} = [\theta_w]_{L_{0w}} + 2\pi \sum_{j=1}^{n} m_j. \tag{38.9}$$

Por definición

$$[\theta_w]_{L_{0w}} = 2\pi, \quad [\theta_w]_{L_{jm}} = -2\pi \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{38.10}$$

Buscaremos la solución del problema de contorno inverso, que se examina en la clase de funciones univalentes y, consecuentemente, convendremos en considerar que el contorno buscado L_z dispone en un plano. En este caso para las curvas L_{kz} serán válidas las correlaciones análogas a las (38.10). Supongamos, ahora, que la función buscada $z(w)$ transforma la curva exterior L_{0w} en otra curva exterior L_{0z}, y, por lo tanto, todas las curvas interiores L_{jw} pasan otra vez en las interiores. Entonces de las igualdades (38.8) se desprende que todos $m_j = 0$. Si L_{0w} pasa en una de las curvas interiores L_{kz}, por lo cual una de las curvas interiores L_{jw} pasa en L_{0z}, entonces, de la igualdad (38.8) —(38.10) se deducirá que para cierto j_0 se cumplirá la igualdad $2\pi = -2\pi - 2\pi m_{j_0}$, de donde proviene que $m_{j_0} = -2$. Todos los demás m_j son nulos.

De este modo, para las soluciones univalentes del problema de contorno inverso (el contorno buscado sin puntos múltiples resultan posibles dos casos: 1) todas las curvas del contorno, siendo aplicadas, conservan el sentido del recorrido—todos los m_j son nulos; 2) el contorno exterior pasa en un interior y uno de los contornos interiores se transforma en el exterior—un m_j es igual a -2, los restantes son nulos.

Pasemos, de nuevo, al caso general. Al potenciar la igualdad (38.5) e integrarla después, tendremos

$$z = e^{iv_0} \int e^{\gamma(w)} \prod_{j=1}^{n} (w - w_j)^{m_j} \, dw + c. \tag{38.11}$$

Puesto que el dominio D_w es múltiplemente conexo, la última función puede resultar multiforme. La condición necesaria y suficiente para su uniformidad es el cumplimiento de las igualdades

$$\int_{L_{jw}} e^{\gamma(w)} \prod_{j=1}^{n} (w - w_j)^{m_j} \, dw = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

La ecuación del contorno buscado la obtendremos al pasar en la fórmula (38.11) a los valores de contorno.

EJEMPLO. Sea el dominio D_w un anillo circular $q < |w| < 1$. Razonando sumamente igual que en el ejemplo del p. 37.9, llegaremos a la siguiente condición:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln w_0(\theta)\, d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln w_1(\theta)\, d\theta = m \ln \frac{1}{q}$$

o bien

$$a_0^0 - a_1^0 = -m \ln q,$$

donde a_0^0, a_1^0 son los términos iniciales del desarrollo en la serie de Fourier de la función $\ln w(\theta)$ en las circunferencias respectivas $|w| = 1$, $|w| = q$.

§ 39. Problema de contorno de tipo del problema de Riemann para un dominio múltiplemente conexo y problemas de contorno con traslación y conjugación

Primeramente hagamos extender la solución del problema de contorno general (36.1) al caso de un dominio múltiplemente conexo y a continuación (pp. 39.3, 39.4) describamos algunos resultados referentes a los problemas generalizados de Riemann y de Hilbert que incluyen las operaciones de conjugación de las funciones buscadas o unas traslaciones o bien ambas cosas simultáneamente.

39.1. Representación integral. De aparato de resolución del problema de contorno general para el caso de un dominio múltiplemente conexo puede servir también una representación integral de la buscada función analítica a trozos que se construye a partir de los mismos principios que en el p. 36.1. Pero aquí al igual que, en general, en los problemas referentes a los dominios múltiplemente conexos, surgen ciertas complicaciones a causa de que las funciones analíticas, definidas por las representaciones integrales, pueden resultar multiformes.

Con el objeto de explicar y justificar la complejidad de las representaciones integrales a ser usadas en lo sucesivo, examinemos al principio un ejemplo sencillo.

Supongamos que en el dominio doblemente conexo D^+, limitado por el contorno exterior L_0 y el interior L_1, la derivada de una función analítica está definida por una integral del tipo de Cauchy

$$[\Phi^+(z)]' = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\tau)}{\tau - z}\, d\tau.$$

Al integrar entre 0 y z, obtendremos la expresión para la propia función

$$\Phi^+(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \mu(\tau) \ln\left(1 - \frac{z}{\tau}\right) d\tau + \Phi^+(0). \qquad (39.1)$$

La fórmula (39.1) define, en general, una función multiforme. La multiformidad se crea a cuenta de una integral tomada a lo largo del contorno interior, puesto que para una función definida por esta integral todo contorno cerrado, que está trazado en el dominio D^+ y que rodea el contorno L_1, divide dos puntos de ramificación del núcleo $z = \tau$ y $z = \infty$. Establezcamos la multiformidad mediante

un cálculo directo. Sea z_1 un punto perteneciente a D_1^-. La expresión (39.1) puede ser representada en la forma

$$\Phi^+(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0} \mu(\tau)\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right)d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L} \mu(\tau)\ln\left(1-\frac{\tau-z_1}{z-z_1}\right)d\tau -$$
$$-\ln(z-z_1)\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\mu(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\mu(\tau)\ln(-\tau)\,d\tau + \Phi^+(0).$$

Todos los términos en el segundo miembro, a excepción del tercero, son uniformes. De aquí se deduce que para la uniformidad de la representación integral (39.1) hay que exigir que para la densidad $\mu(\tau)$ se verifique $\int\limits_{L_1}\mu(\tau)\,d\tau = 0$.

Este ejemplo sencillo, que acabamos de considerar, muestra la imposibilidad de conseguir la uniformidad de una función analítica, si se sigue el mismo camino por cuyo intermedio se han obtenido las representaciones (36.2), (36.3).

Pasemos ahora al caso general de un dominio ($m+1$)-mente conexo (fig. 13, pág. 144). D^+ es un dominio conexo y $D^- = D_0^- + D_1^- + \ldots + D_m^-$ es la suma de los dominios separados, la cual, para abreviar, también se llamará dominio.

Hallemos la representación integral para la función $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$ que es analítica a trozos y uniforme en los dominios D^+, D^-, si están conocidas $[\Phi^+(z)]^{(n)}$, $[\Phi^-(z)]^{(p)}$.

Los razonamientos, que salen de los márgenes de este libro, muestran que la representación requerida para $\Phi(z)$ puede conseguirse, si partimos de la siguiente representación para las derivadas:

$$[\Phi^+(z)]^{(n)} = \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{(z-z_j)^n}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_j}\frac{\mu(\tau)}{\tau-z}\,d\tau + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{\mu(\tau)}{\tau-z}\,d\tau, \qquad (39.2)$$

$$\frac{z^{p+mn}}{\prod\limits_{j=1}^{m}(z-z_j)^n}[\Phi^-(z)]^{(p)} = \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{(z-z_j)^n}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_j}\frac{\mu(\tau)}{\tau-z}\,d\tau +$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{\mu(\tau)}{\tau-z}\,d\tau, \qquad (39.3)$$

donde $\mu(t)$ es la función compleja buscada, z_j son ciertos puntos fijados de los dominios D_j^-.

Si $[\Phi^+(z)]^{(n)}$, $[\Phi^-(z)]^{(p)}$ están dadas, la densidad $\mu(t)$ se determinará de las fórmulas de Sojotski así:

$$\mu(t) = [\Phi^+(t)]^{(n)} - \frac{t^{p+mn}}{\prod\limits_{j=1}^{m}(t-z_j)^n}[\Phi^-(t)]^{(p)} \quad (t\in L_0), \qquad (39.4)$$

$$\mu(t) = (t-z_q)^n\left\{[\Phi^+(t)]^{(n)} - \frac{t^{p+mn}}{\prod\limits_{j=1}^{m}(t-z_j)^n}[\Phi^-(t)]^{(p)}\right\} \quad (t\in L_0;\ q=1, 2, \ldots, m).$$

(39.5)

Las representaciones para las propias funciones $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$ se encuentran por integración de las fórmulas (39.2), (39.3). Hagamos uso de la descomposición de los núcleos $\frac{1}{(z-z_j)^n(\tau-z)}$ en fracciones simples:

$$\frac{1}{(z-z_j)^n(\tau-z)}=\frac{-1}{(\tau-z_j)^n(z-\tau)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(\tau-z_j)^{n-k+1}(z-z_j)^k}.$$

Integrando n veces ambos miembros de la igualdad (39.2) entre 0 y z, obtendremos después de unos cálculos bastante voluminosos:

$$\Phi^+(z)=\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_j}\frac{\mu(\tau)}{(\tau-z_j)^n}(\tau-z)^{n-1}\ln\left(1-\frac{\tau-z_j}{z-z_j}\right)d\tau+$$
$$+\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\mu(\tau)(\tau-z)^{n-1}\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right)d\tau+P_{n-1}(z), \qquad (39.6)$$

donde $P_{n-1}(z)$ es un polinomio de grado $n-1$, cuyos coeficientes pueden ser calculados comparando los primeros n términos del desarrollo en una serie de potencia de los dos miembros de la igualdad (39.6).

Por $\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right)$, $\ln\left(1-\frac{\tau-z_j}{z-z_j}\right)$ se comprenden

en el caso dado las ramas que se reducen a cero para $z=0$, $z=\infty$, respectivamente. Ya que todos los términos del segundo miembro de la fórmula (39.6) son uniformes cuando z varía en D^+, entonces, por lo tanto, la función $\Phi^+(z)$ será en el dominio D^+ analítica y uniforme.

Para la función $\Phi^-(z)$ obtendremos dos representaciones distintas, según se encuentre z en uno de los dominios finitos D_q^- o en el dominio infinito D_0^-. Sin presentar los cálculos, demos a conocer los resultados finales que se obtienen después de integrar p veces la igualdad (39.3) respecto a z entre los límites desde z_j hasta z.

Para $z\in D_q^-$ $(q=1, 2, \ldots, m)$ tendremos

$$\Phi^-(z)=\frac{(-1)^p}{(p-1)!}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_j}\mu(\tau)\frac{\prod_{k=1}^{m}{}'(\tau-z_k)^n}{\tau^{p+mn}}(\tau-z)^{p-1}\ln\left[1-\frac{z-z_j}{\tau-z_j}\right]d\tau+$$
$$+\frac{(-1)^p}{(p-1)!}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\mu(\tau)\frac{\prod_{k=1}^{m}(\tau-z_k)^n}{\tau^{p-mn}}(\tau-z)^{p-1}\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right)d\tau+$$
$$+\sum_{k=0}^{p-1}A_kz^k\ln z+\sum_{k=1}^{mn}\frac{B_k}{z^k}+\sum_{k=0}^{p-1}d_{qk}z^k, \qquad (39.7)$$

donde una raya en el producto significa que debe omitirse un factor correspondiente a $k=j$. Las constantes A_k, B_k se expresan de un modo determinado en términos de la función $\mu(\tau)$; d_{qk} son unas constantes que se calculan por desarrollo de ambos miembros de la igualdad (39.7) en una serie de potencia en el entorno del punto $z=z_q$.

Para $z \in D_0^-$ la representación $\Phi^-(z)$ puede tener la siguiente forma

$$\Phi^-(z)=\frac{(-1)^p}{(p-1)!}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_L \mu(\tau)\frac{\prod_{k=1}^{m}{}'(\tau-z_k)^n}{\tau^{p+mn}}(\tau-z)^{p-1}\ln\left(1-\frac{\tau}{z}\right)d\tau+$$
$$+\sum_{k=1}^{mn}\frac{B_k}{z^k}+\sum_{k=0}^{p-1}d_{0k}z^k. \quad (39.8)$$

Aquí la raya del producto quiere decir que para $\tau \in L_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ se debe omitir el factor para $k = j$. Las constantes B_k son las mismas que en la fórmula (39.7), y las constantes d_{0k} se determinan por desarrollo de ambos miembros de la igualdad (39.8) en una serie en el entorno de $z = \infty$.

39.2. Problema de contorno y ecuación diferencial integral. Enunciemos el problema de contorno:

Hállense dos funciones: $\Phi^+(z)$, *analítica y uniforme en el dominio* $(m+1)$-*mente conexo* D^+, *y* $\Phi^-(z)$, *analítica* [1]) *en el dominio* D^-, *que en el contorno satisfacen la condición de contorno*

$$\sum_{k=1}^{n}\left[a_k(t)\frac{d^k\Phi^+(t)}{dt^k}+\int_L M_k(t,\tau)\frac{d^k\Phi^+(\tau)}{d\tau^k}d\tau\right]-$$
$$-\sum_{k=1}^{p}\left[b_k(t)\frac{d^k\Phi^-(t)}{dt^k}+\int_L N_k(t,\tau)\frac{d^k\Phi^-(\tau)}{d\tau^k}d\tau\right]=f(t),$$

donde $a_k(t)$, $b_k(t)$, $M_k(t,\tau)$, $N_k(t,\tau)$ *son las funciones del mismo tipo que en el problema de contorno* (36.1).

Teniendo en cuenta las representaciones integrales (39.6), (39.7), (39.8), todas las funciones incógnitas que figuran en la condición de contorno pueden ser expresadas en términos de la densidad de las representaciones $\mu(t)$. Además, todas las derivadas hasta el $(n-1)$-ésimo y $(p-1)$-ésimo órdenes se expresarán correspondientemente mediante unas integrales en las cuales se puede pasar a los valores de contorno por sustitución directa de z por t. Las derivadas de orden superior se expresarán mediante las integrales de tipo de Cauchy según las fórmulas (39.2), (39.3). Al pasar en estas fórmulas a los valores de contorno, tendremos

$$[\Phi^+(t)]^{(n)}=\frac{1}{2}(t-z_j)^{-n}\mu(t)+\psi(t), \quad (39.10)$$

$$\frac{t^{p+mn}}{\prod_{j=1}^{m}(t-z_j)^n}[\Phi^-(t)]^{(p)}=-\frac{1}{2}(t-z_j)^{-n}\mu(t)+\psi(t)$$
$$(t\in L_j,\ j=1, 2, \ldots, m),$$
$$[\Phi^+(t)]^n=\frac{1}{2}\mu(t)+\psi(t), \quad (39.11)$$
$$\frac{t^{p+mn}}{\prod_{j=1}^{m}(t-z_j)^n}[\Phi^-(t)]^{(p)}=-\frac{1}{2}\mu(t)+\psi(t)\ (t\in L_0),$$

[1]) La analiticidad significa necesariamente la uniformidad.

donde $\psi(t)$ implica el segundo miembro de las fórmulas (39.2), (39.3), cuando z en ellas está sustituido por t.

Sustituidas todas las funciones incógnitas por sus expresiones en términos de $\mu(t)$, la condición de contorno (39.9) se reducirá a una ecuación integral singular con núcleo de Cauchy de tipo

$$a(t)\mu(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\mu(\tau)}{\tau-t}d\tau+\int_L K(t,\tau)\mu(\tau)d\tau=g(t), \qquad (39.12)$$

donde

$$\begin{aligned} a(t)&=a_n(t)+t^{-p-mn}\prod_{j=1}^{m}(t-z_j)^n b_p(t),\\ b(t)&=a_n(t)-t^{-p-mn}\prod_{j=1}^{m}(t-z_j)^n b_p(t), \end{aligned} \qquad (39.13)$$

y $K(t, \tau)$ es un núcleo fredholmiano bien determinado; $g(t)$ es una función que se expresa en términos de las funciones dadas y las constantes de la representación integral.

La investigación posterior debe realizarse siguiendo un esquema común del cual se trataba en los §§ 35, 36.

Una ecuación diferencial integral singular de tipo (36.23), dada en el contorno $L = L_0 + L_1 + \ldots + L_m$, puede ser reducida al problema de contorno (37.9) por el mismo procedimiento que se ha utilizado en el p. 36.3.

El problema de contorno de tipo del problema de Hilbert de la clase general, semejante al problema (35.2), en esta obra no se considera. Su solución fue obtenida por D. I. Sherman [1]*. Una exposición desarrollada y simplificada se cita en la obra de E. G. Jasabov 1)*. La simplificación se consigue por introducción del factor $\prod_{k=1}^{m}(t-z_k)^{\varkappa_k}$, que reduce los índices en los contornos interiores a ceros.

39.3. Problema de contorno con conjugación. Sean D^+, D^- los mismos dominios que en lo anterior y sea L un contorno compuesto de las curvas de Liapunov. Examinemos un problema en que se busca la función analítica a trozos $\Phi(z)$ que satisface la condición de contorno

$$\Phi^+(t) = G_1(t)\,\Phi^-(t) + G_2(t)\,\overline{\Phi^-(t)} + g(t). \qquad (39.14)$$

Consideramos que las funciones dadas G_1, G_2, g satisfacen la condición de Hölder y exigimos que se cumpla la condición $G_1(t) \neq 0$.

Uno de los métodos eventuales de investigación del problema de contorno planteado es el de ecuaciones integrales ya empleado varias veces en el presente capítulo. Buscando la solución en la forma de una integral de tipo Cauchy con densidad buscada, se puede reducir el problema de contorno (39.14) a una ecuación integral singular que le será equivalente. Los autores que investigaban el problema (N. P. Vekua, B. V. Boyarski, L. G. Mijáilov) introducían la densidad buscada de la integral de tipo de Cauchy en diferentes formas. Por esta causa las ecuaciones integrales obtenidas también se diferenciaban. Pero, al fin y al cabo, la investigación con ayuda de los teoremas de Noether conduce a los resultados siguientes.

Sea $\varkappa = \frac{1}{2\pi}[\arg G_1(t)]_L$ el índice del problema

(39.14) y llamemos el problema de contorno

$$G_1(t)\,\psi^+(t)+\overline{G_2(t)}\,\overline{t'^2\psi^+(t)}=\psi^-(t) \qquad (39.14')$$

su problema conjugado. Serán válidos los siguientes dos teoremas (de Noether):

I. *Para que el problema* (39.14) *sea resoluble en la clase de funciones que desaparecen en el infinito, es necesario y suficiente que para el sistema completo* $\psi_j(t)$ *de soluciones del problema conjugado homogéneo* (39.14') *se cumplan las condiciones*

$$\operatorname{Re}\int_L g(t)\,\psi_j^+(t)\,dt=0 \quad (j=1, 2, \ldots, l'). \qquad (39.15)$$

II. *La diferencia entre los números de soluciones linealmente independientes (con los coeficientes reales)* l, l' *de los problemas conjugados es igual al índice doblado del problema:*

$$l - l' = 2\varkappa. \qquad (39.16)$$

Indiquemos que las afirmaciones enunciadas pueden obtenerse del teorema general del p. 23.6.

Los resultados cualitativos más exactos sobre la resolubilidad del problema se logran obtener bajo ciertas suposiciones particulares adicionales referentes a los coeficientes de la condición de contorno y del contorno. Es posible la investigación de los casos:

$$\text{elíptico: } |G_1(t)| > |G_2(t)|, \qquad (39.17)$$

$$\text{parabólico: } |G_1(t)| = |G_2(t)|. \qquad (39.18)$$

En el caso elíptico el compartamiento del problema de contorno es particularmente sencillo. Resulta que en el sentido cualitativo el asunto se presenta sumamente igual que en el problema de contorno de Riemann ordinario ($G_2(t) \equiv 0$) (véanse los §§ 14, 15), es decir, cuando $\varkappa > 0$, los problemas de contorno, tanto homogéneo como no homogéneo, tienen soluciones que dependen linealmente de $2\varkappa$ constantes reales arbitrarias ($l = 2\varkappa$, $l' = 0$). Si es que $\varkappa \leqslant 0$, el problema homogéneo no tiene soluciones que sean distintas de cero, mientras que el problema no homogéneo es resoluble, si se cumplen $l' = 2|\varkappa|$ condiciones (39.15).

B. V. Boyarski 1)* fue primero en obtener este resultado mediante la introducción de unas nuevas funciones buscadas. La condición de contorno para las nuevas funciones, introducidas por él, se simplifica hasta un problema ordinario de Dirichlet, pero, en cambio, se complica su clase; de las funciones armónicas conjugadas (soluciones del sistema Cauchy—Riemann) ellas se convierten en las soluciones del sistema general de las ecuaciones de tipo elíptico. Apoyándose en la teoría de tales sistemas, Boyarski logró demostrar, primeramente, que, para $\varkappa < 0$, el problema homogéneo es insoluble, y a continuación, establecer, a base de los dos teoremas citados arriba, los resultados cualitativos exactos.

No obstante, la necesidad de usar la teoría compleja de los sistemas elípticos obliga al autor a imponer unas restricciones rígidas sobre los coeficientes de la condición de contorno (éstos deben satisfacer la condición de Hölder con un exponente tan próximo a la unidad como se quiera).

L. G. Mijáilov simplificó la resolución haciendo uso del método de resolver el problema de contorno de Riemann con coeficientes continuos, propuesto por I. B. Simonenko 1)*. Los razonamientos de Mijáilov siguen exactamente el esquema expuesto en el punto (16.3, 2°. A la par con la simplificación de la investigación, el problema ha adquirido una solución completa, siendo mínimas las restricciones impuestas sobre los coeficientes (G_1 debe ser continuo; G_2, medible).

Cuando el dominio es circular y la función G_2 satisface la condición de Hölder, el caso general, según I. J. Sabitov 1)*, 2)* puede ser reducido al elíptico.

Sea $\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{i\theta k} = \sum_{k=-N}^{N} c_k t^k$ un segmento de la serie de Fourier de la función $G_2(t)$, para el cual se satisface la condición $|G_2(t) - \sum_{k=-N}^{N} c_k t^k| < |G_1(t)|$, y sea c_{-n} el primero de los coeficientes $c_{-N}, c_{-N+1}, \ldots$, que no se reduce a cero. Multipliquemos la condición de contorno por t^n y hagamos prolongar simétricamente $\overline{\Phi^-(t)}$ en D^+ con ayuda de la función $\Phi_1^+(z) = \overline{\Phi}\left(\frac{1}{z}\right)$. Entonces, con las designaciones

$$G_1' = t^n G_1, \quad G_2' = t^n G_2 - \sum_{k=0}^{N+n} c_k t^{k+n}, \quad g' = t^n g,$$

$$\Psi^+(z) = z^n \Phi_1^+(z) + \sum_{k=0}^{N+n} c_k z^{k+n} \Phi_1^+(z)$$

el problema de contorno (39.14) se reducirá al problema

$$\Psi^+(t) = G_1'(t)\,\Phi^-(t) + G_2'(t)\,\overline{\Phi^-(t)} + g'(t),$$

para el cual las condiciones de elipticidad están cumplidas. El número de soluciones linealmente independientes y el número de condiciones de resolubilidad se expresan con precisión en términos de $\varkappa = \operatorname{Ind} G_1(t)$ y el número n del segmento de aproximación de la serie de Fourier.

En el caso parabólico el problema de contorno en consideración se reduce, según lo ha mostrado L. G. Mijáilov [14], a una sucesión de dos problemas de contorno de Hilbert ordinarios (véase § 29). A base de su análisis podemos calcular el número de soluciones linealmente independientes o de las condiciones de resolubilidad.

G. S. Litvinchuk 2)* ha propuesto un método original para la investigación del problema de contorno considerado en el caso de un dominio circular. Se apoya en la teoría del problema de contorno de Riemann con muchos pares de funciones buscadas (de un vector analítico a trozos). Expondremos aquí solamente el esquema de esta investigación.

Sumemos a la condición de contorno (39.14) una condición obtenida de ésta como resultado del paso a los valores conjugados complejos. Sea, ahora, $\Phi_1^{\pm}(z) = \Phi^{\pm}(z)$ un par de funciones buscado y sea $\Phi_2^{\pm}(z) = \overline{\Phi}^{\pm}\left(\frac{1}{z}\right)$ otro par, obtenido de las primeras funciones mediante una definición adicional por simetría en un dominio complementario. En este caso el problema de contorno (39.14) resulta, en un sentido determinado, equivalente al problema de contorno de Riemann con dos pares de funciones buscadas $\Phi_1^{\pm}(z)$, $\Phi_2^{\pm}(z)$ (de un vector bidimensional analítico a trozos) con una matriz dada de coeficientes y un vector dado de términos independientes.

De la teoría del problema de contorno de Riemann para un vector analítico a trozos se pueden obtener, en el caso general, dos teoremas de Noether enunciados más arriba y establecidos por B.V. Boyarski. El caso elíptico del problema de contorno en investigación corresponde al caso de estabilidad de los así llamados índices particulares del problema obtenido para dos pares de funciones. Aquí se logra calcular ambos índices particulares (los dos resutlan iguales al índice del coeficiente de G_1). De aquí se desprenden todos los resultados citados arriba para el caso elíptico.

En el caso parabólico la matriz de coeficientes del problema de contorno obtenido resulta triangular, esto es, el problema se descompone en una sucesión de dos problemas de contorno de Riemann, cada uno de los cuales contiene solamente un par de funciones buscadas. A base del análisis de estos problemas se logra no sólo hallar todos los resultados, obtenidos por L. G. Mijáilov del análisis de dos problemas de contorno de Hilbert, sino que también precisarlos. Resulta que si $k = \operatorname{Ind} G_2(t) \geqslant 0$, entonces los índices particulares son estables y los números de soluciones linealmente independientes y de condiciones de resolubilidad (l, p) son los mismos que en el caso elíptico. Si $k < 0$, los índices particulares son inestables, mientras que (l, p) dependen tanto de $\varkappa$ como también de k.

Señalemos, además, que si la condición de contorno (39.14) se divide en dos condiciones reales, entonces desde el punto de vista geométrico se la puede considerar como una transformación lineal de las variables u^-, v^- en las u^+, v^+. B. V. Boyarski 1)* ha mostrado que el caso elíptico corresponde a una transformación con jacobiano de signo positivo.

39.4. **Las demás generalizaciones.** El problema de contorno examinano en el punto antecedente admite las generalizaciones en diferentes direcciones. La más simple generalización consiste en la completación de la condición de contorno (39.14) con el término $\overline{\Phi^+(t)}$. La investigación fue realizada por L. G. Mijáilov y después precisada por G. S. Litvinchuk. Los resultados definitivos, naturalmente, se hacen mucho más complicados. El problema más general de semejante tipo

$$a(t)\,\Phi^+(t) + b(t)\,\Phi^-(t) + c(t)\,\overline{\Phi^+(t)} + d(t)\,\overline{\Phi^-(t)} = g(t)$$

corresponde a una ecuación singular con la conjugación compleja (la teoría de Noether para este caso fue expuesta en el p. 23.6).

La generalización más esencial consiste en la presencia en la condición de contorno de una traslación, a la par con la conjugación. En este dirección el problema de contorno

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G_1(t)\,\Phi^-(t) + G_2(t)\,\overline{\Phi^-(t)} + g(t), \qquad (39.19)$$

donde la traslación $\alpha(t)$ conserva el sentido del recorrido en L, generaliza directamente el problema (39.14), al igual que el problema con una traslación, examinado en el p. 18.1, generaliza el problema de Riemann. Cuando se cumpla la condición $G_1(t) \neq 0$ y también se cumplan las condiciones (39.17) ó (39.18), L. G. Mijáilov [14] obtuvo para el problema (39.19) los mismos resultados referentes al índice, al número de soluciones y al de condiciones de resolubilidad que para el problema (39.14). De una manera análoga se investiga el caso si en (39.19) la traslación $\alpha(t)$ cambia el sentido del recorrido.

Todas las demás generalizaciones del problema (39.14) en la dirección indicada constituyen unos problemas más difíciles y su investigación puede llevarse hasta el nivel de investigación de los problemas (39.14) y (39.19) sólo con las suposiciones adicionales acerca de la traslación $\alpha(t)$. Además, a diferencia del problema (39.19), tanto las condiciones de resolubilidad como los resultados finales dependen, de hecho, de la traslación $\alpha(t)$.

Para el caso en que la traslación $\alpha(t)$, que en L conserva o cambia el sentido del recorrido, satisface la así llamada *condición de Carleman*

$$\alpha[\alpha(t)] \equiv t, \qquad (39.20)$$

G. S. Litvinchúk 1)* obtuvo los teoremas de Noether I y II para el problema más general

$$a(t)\,\Phi^+(t) \quad b(t)\,\Phi^+[\alpha(t)] + c(t)\,\Phi^-(t) + d(t)\,\Phi^-[\alpha(t)] +$$
$$+ a_1(t)\,\overline{\Phi^+(t)} + b_1(t)\,\overline{\Phi^+[\alpha(t)]} + c_1(t)\,\overline{\Phi^-(t)} + d_1(t)\,\overline{\Phi^-[\alpha(t)]} = g(t). \qquad (39.21)$$

En particular, para el problema de contorno

$$a(t)\,\Phi^+(t) + b(t)\,\Phi^+[\alpha(t)] + c(t)\,\Phi^-(t) + d(t)\,\Phi^-[\alpha(t)] = g(t), \quad (39.22)$$

el cual, bajo las condiciones (39.20) y $\Phi^-(\infty) = 0$ es, evidentemente, equivalente a la parte característica de una ecuación integral singular con la traslación de Carleman, los teoremas, obtenidos por G. S. Litvinchuk, fueron expuestos en el p. 23.5. G. S. Litvinchuk 3), 4), 5)* (véanse también E. I. Zverovich, G. S. Litvinchuk [9]) examinó para el problema (39.22) los análogos de los casos elíptico y parabólico del problema (39.14). Los resultados en este caso son mucho más complejos y su enunciación ocuparía mucho lugar.

Los resultados análogos para el problema (39.21), cuando $b(t) = d(t) = a_1(t) = c_1(t) = 0$, fueron obtenidos en la obra de G. S. Litvinchuk y E. G. Jasabov 4)*.

Las dificultades más grandes en la investigación las ofrecen los problemas de contorno con traslación y conjugación para una función, analítica en el dominio D^+ (o D^-). Aunque las condiciones de contorno de estos problemas son, formalmente, unos casos particulares de la condición (39.21), los teoremas de Noether I y II y los resultados posteriores no provienen, a diferencia del problema (39.22), de los teoremas correspondientes establecidos por G. S. Litvinchuk para el problema general (39.21). Actualmente con la mayor plenitud están investigados el así llamado problema de contorno generalizado de Hilbert con traslación

$$\operatorname{Re}\{a(t)\,\Phi^+(t) + b(t)\,\Phi^+[\alpha(t)]\} = g(t) \quad (39.23)$$

y el problema de contorno

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G_1(t)\,\Phi^+(t) + G_2(t)\,\overline{\Phi^+(t)} + g(t), \quad (39.24)$$

el cual para $\alpha(t)$, que conserva el sentido del recorrido en L, generaliza de un modo natural el problema de Hilbert con traslación (véase el p. 18.2), mientras que para $\alpha(t)$, que cambia el sentido, generaliza el problema de Carleman (véase p. 18.3).

El problema (39.23) está investigado en las obras de G. S. Litvinchuk y E. G. Jasabov 1), 2)*. Empleando la representación de la función analítica $\Phi^+(z)$ mediante una integral de tipo de Cauchy con densidad real (véase el p. 34.2) estos autores han reducido el problema (39.23) a una ecuación integral singular con traslación de Carleman (véase el p. 23.5) y, basándose en la teoría de la última, obtuvieron para el problema (39.23) los teoremas de Noether I y II, haciendo uso del problema conjugado para (39.23), que ellos mismos han construido.

El problema de contorno (39.24) fue planteado por N. P. Vekua 1)*[1]), quien redujo este problema a una ecuación integral de tipo fredholmiano, señaló las condiciones necesarias de su resolubilidad, las cuales generalizan las identidades respectivas (18.4) y (18.21), y construyó un problema conjugado. Los teoremas de Noether I y II para el problema (39.24) fueron demostrados por G. S. Litvinchuk y A. P. Nechaev 1), 2)*, revelándose con este motivo que $l - l' = \varkappa + 1$, donde $\varkappa = \operatorname{Ind} G_2(t)$ ó $\varkappa = -\operatorname{Ind} G_1(t)$, lo que depende de si la traslación de Carleman $\alpha(t)$ conserva o cambia el sentido del recorrido en L. De acuerdo con lo mismo, en el caso

$$|G_2(t)| > |G_1(t)|, \quad (39.25)$$

cuando la traslación conserva su dirección, y en el caso

$$|G_1(t)| > |G_2(t)|, \quad (39.26)$$

[1]) N. P. Vekua supuso que $\alpha(t)$ satisfacía la condición de Carleman y cambiaba el sentido del recorrido en L.

para $\alpha(t)$, que cambia el sentido, en los artículos de G. S. Litvinchuk y de A. P. Necháev 1), 2)* están calculados los propios números l y l'. Además de otro, partiendo de las condiciones necesarias de resolubilidad, los autores han mostrado que en todo el contorno L ha de cumplirse obligatoriamente o bien la condición (39.25) o bien la (39.26). En el caso de que $\alpha(t)$ cambie el sentido de recorrido, los resultados mencionados se pueden obtener al reducir el problema (39.24) al (39.14) en un contorno abierto por el método expuesto en el p. 18.3, lo que fue hecho en la obra de V. A. Chernetski 2)*.

De generalización siguiente sirve el caso (N. P. Vekua fue primero en considerarlo) en que $\alpha(t)$ satisface la así llamada ***condición generalizada de Carleman***

$$\alpha_m(t) = \alpha[\alpha_{m-1}(t)] \equiv t \qquad (\alpha_1(t) \equiv \alpha(t)), \tag{39.27}$$

donde m ($m > 1$) es un número natural cualquiera que sirve de orden de un grupo cíclico finito engendrado por iteraciones de la traslación $\alpha(t)$. Para este caso G. S. Litvinchuk 1)* demostró los teoremas de Noether y calculó el índice del problema de contorno

$$\sum_{k=0}^{m-1} \{a_k(t)\Phi^+[\alpha_k(t)] + b_k(t)\overline{\Phi^+[\alpha_k(t)]} + c_k(t)\Phi^-[\alpha_k(t)] + d_k(t)\overline{\Phi^-[\alpha_k(t)]}\} = g(t), \tag{39.28}$$

que generaliza de un modo natural el problema (39.21) para el caso de $m > 2$. Se ha empleado el método de reducción del problema (39.28) al sistema de $2m$ ecuaciones integrales singulares con núcleos de tipo de Cauchy sin traslación respecto de $2m$ funciones incógnitas. Resultó que el índice del problema de contorno (39.28) era igual al índice del sistema mencionado de ecuaciones integrales singulares dividido por $2m$. Para $m = 2^k$ el resultado análogo fue independientemente obtenido por R. A. Kordzadze 1)*. La cuestión del cálculo de los números l y l' para el problema (39.28) queda hasta ahora abierta.

Los problemas aun más generales surgen cuando en la condición de contorno figuran no una, sino varias traslaciones distintas. En las obras de A. S. Sosunov 1), 2)*, P. G. Bashkarev y A. P. Necháev 1)* se han obtenido los teoremas de Noether I y II para el caso en que la condición de contorno depende de los traslaciones $\alpha(t)$ y $\beta(t)$, que satisfacen la condición de Carleman y la de conmutación $\alpha(\beta(t)) = \beta[\alpha(t)]$. Es evidente que estas traslaciones engendran un grupo conmutativo finito (pero ya no cíclico) de interaciones. El índice del problema de contorno en este caso, como también en el caso del problema (39.28), se obtiene dividiendo el índice de cierto sistema de ecuaciones integrales singulares por el orden de dicho grupo (o bien, dividiendo el índice del sistema por el orden doblado del grupo, si en la condición de contorno figuran valores conjugados complejos de la función incógnita).

Como se ve de la obra de A. B. Antonévich 1), 2)*, esta regularidad subsiste también en el caso general de todo grupo (no conmutativo, en general) finito de traslaciones. Sin embargo, la cuestión de los teoremas de Noether I y II, sin hablar ya de los resultados ulteriores, actualmente no puede considerarse resuelta para el caso general indicado. En la obra mencionada el problema con cualquier grupo finito de traslaciones se considera de un modo muy general (para los así llamados operadores seudodiferenciales), pero, en cambio se supone una suavidad infinita del contorno y de los coeficientes. El índice del problema se expresa en términos de las características cuyo cálculo real parece ser bastante difícil.

Ultimamente en las obras de V. G. Krávchenko 1), 2)* se ha empezado el estudio del caso en que la traslación $\alpha(t)$, que figura en la condición de contorno del problema (39.22), engendra un grupo infinito de iteraciones, es decir, en el contorno L siempre se encontrará un punto t_0 tal que $\alpha_m(t_0) \neq t_0$ para m cualquiera. Esta traslación se llama, a veces, *no carlemaniana*. Si, al usar las

fórmulas de Sojotski, pasamos del problema (39.22) a la ecuación integral singular con traslación, entonces, con la ayuda del método de regularización (que en el caso dado se comprende de una manera más amplia que en el § 22), se logra señalar lo siguiente. En el caso de la traslación $\alpha(t)$, que conserva el sentido, para la ecuación integral mencionada son vigentes los teoremas de Noether I y II, si cada una de las ecuaciones funcionales

$$a(t)\,\varphi[\alpha(t)] + b(t)\,\varphi(t) = g_1(t), \tag{39.29}$$

$$c(t)\,\psi[\alpha(t)] + d(t)\,\psi(t) = g_2(t) \tag{39.30}$$

tiene una solución única, que satisface la condición de Hölder para cualesquiera funciones $g_1(t)$ y $g_2(t)$ de la misma clase. Las condiciones de existencia de tales soluciones de las ecuaciones (39.29) y (39.30) dependen, ante todo, de si la traslación tiene o no unos puntos inmóviles. Si $\alpha(t)$ tiene en L un número finito de puntos inmóviles, estas condiciones llevan carácter alternativo: 1) los valores de los coeficientes $a(t)$ y $b(t)$ (correspondientemente, $c(t)$ y $d(t)$) en todos los puntos inmóviles t_j de la traslación $\alpha(t)$ deben satisfacer una misma de las dos desigualdades de cierta clase; 2) en dependencia de cuál de estas dos desigualdades se verifique en todos los t_j, se requiere además que uno de los coeficientes, $a(t)$ o $b(t)$ (correspondientemente, $c(t)$ o $d(t)$), sea distinto de cero en todos los puntos de L. Al cumplirse estas condiciones, resulta que el índice del problema (39.22) es igual o bien al índice de uno de los problemas de Riemann

$$a(t)\,\varphi^+(t) + c(t)\,\varphi^-(t) = 0$$

ó

$$b(t)\,\varphi^+(t) + d(t)\,\varphi^-(t) = 0,$$

o bien al índice de uno de los problemas de Riemann con traslación (véase el p. 18.1)

$$a(t)\,\varphi^+[\alpha(t)] + d(t)\,\varphi^-(t) = 0$$

ó

$$b(t)\,\varphi^+[\alpha(t)] + c(t)\,\varphi^-(t) = 0.$$

El problema de contorno (39.22) con la traslación no carlemaniana $\alpha(t)$, que cambia el sentido, se reduce al caso anterior, a saber, al problema con traslación $\alpha_1(t) = \alpha[\alpha(t)]$, la cual ya conserva el sentido y posee obligatoriamente unos puntos inmóviles, puesto que tales puntos en este caso siempre tienen la traslación $\alpha(t)$.

Hay muchas publicaciones donde los problemas de contorno con traslación y conjugación se estudian para el caso de un dominio múltiplemente conexo y también en las superficies finitas de Riemann. En el caso de estas últimas los resultados más plenos fueron obtenidos por E. I. Zverόvich 2), 3), 6)*, quien elaboró un método de pegamiento conforme local el cual generaliza los teoremas de pegamiento expuestos en los pp. 18.1 y 18.3 (véase, además, el p. 53.5).

§ 40. Notas históricas

Unas notas históricas con motivo del problema de contorno general, considerado en el § 35, se han dado al exponerse el propio problema y no vamos a tocar aquí esta cuestión.

L. G. Magnaradze 2)* fue primero en considerar el problema de contorno generalizado de tipo del problema de Riemann (§ 36). La resolución proporcionada por este autor (se ha publicado solamente en forma de una serie de fórmulas, siendo omitidas todas las indicaciones acerca se su origen) es incompleta y muy compleja. La resolución, expuesta en el § 36, se debe a Yu. M. Krikunov 1), 2)*. La elaboración más detallada de la cuestión fue dada por el mismo autor en 3)*.

M. P. Gánin 4), 5)* ha realizado una generalización de este problema para el caso de un dominio múltiplemente conexo. El planteó el problema en una forma bastante general para muchas funciones incógnitas de una vez, suponiendo que los valores límites del interior y del exterior del contorno se toman en puntos diferentes del contorno. Como aparato de resolución de este problema general sirve la misma representación integral (39.6)—(39.8) que se ha utilizado por nosotros para resolver el caso considerado en el § 39. La exposición detallada del problema se da en la tesis de M. P. Gánin 5)*. El problema de contorno (39.14) con una conjugación compleja fue considerada por primera vez por A. I. Markushévich 1)*. La información histórica posterior referente a los problemas con conjugación, como también con traslación (los pp. 39.3, 39.4), se ofrecía en el texto.

El problema de Hilbert para un dominio múltiplemente conexo fue examinado originalmente por D. A. Kveselava 4)*. Haciendo uso de la representación integral (37.37), él redujo el problema a una ecuación integral singular y ofreció una investigación de ésta en una forma más o menos parecida a la expuesta en el p. 35.6 para el problema generalizado. El resultado más importante obtenido por D. A. Kveselava consiste en lo que él estableció la irresolubilidad del problema para un índice negativo. Este resultado definitivo sirvió de base para las investigaciones posteriores. D. A. Kveselava no se ocupaba del problema de contorno transpuesto.

La investigación en el p. 37.7 está expuesta de conformidad con la obra de I. N. Vekua [2], donde ella es aplicada a un caso más general. La investigación de los casos de frontera, $\varkappa = 0$ y $\varkappa = m - 1$, como también el establecimiento de relación con la aplicación conforme se han dado en la obra común de F. D. Gájov y E. G. Jasábov 1)*. E. I. Zverovich 5)* ha encontrado el factor de regularización (p. 37.5). Las investigaciones complementarias (p. 37.12) fueron realizadas por B. V. Boyarski (véase el suplemento al libro de I. N. Vékua [2]).

PROBLEMAS AL CAPITULO V

1. Resuélvase el problema de contorno de Hilbert generalizado

$$\operatorname{sen} s\,\frac{du}{ds} - \cos s\,\frac{dv}{ds} + \cos su\,(s) + \operatorname{sen} sv\,(s) = \cos 3s\,(\cos s - 1)$$

para un círculo unitario.

Respuesta. $F(z) = u + iv = -\frac{1}{8}z^5 + \frac{1}{3}z^4 - \frac{1}{4}z^3 + Az^2 + Bz + \overline{A}$, donde A, B son unas constantes arbitrarias.

2. Pruébese que el problema de contorno de Hilbert generalizado

$$\operatorname{sen} s\,\frac{du}{ds} + (2 - \cos s)\,\frac{dv}{ds} - 2u\,(s) = 2\,(\cos 2s + h\cos s)$$

para un círculo unitario es resoluble sólo para el valor de parámetro $h = -1$. Dése la solución de este caso.

Respuesta. $F(z) = u + iv = z^2 + i\alpha + A\left(z - \frac{1}{2}\right)$, donde A es un parámetro complejo y α, parámetro real.

3. Resuélvese el problema de contorno de Hilbert generalizado

$$\operatorname{sen} s\,\frac{du}{ds} + (2 - \cos s)\,\frac{dv}{ds} - 2\cos su\,(s) - 2\operatorname{sen} sv\,(s) =$$

$$= 2\cos 3s - 3\cos 2s + \frac{3}{2}\cos s - \frac{1}{4}$$

para un círculo unitario.

Respuesta. $F(z)=u+iv=\alpha i\,(z-1)+\frac{1}{3}\,z\left(z-\frac{1}{2}\right)^2$.

4. Muéstrese que si los coeficientes del problema de contorno

$$a_1\frac{du}{ds}+b_1\frac{dv}{ds}+a_0u+b_0v=c$$

satisfacen la condición

$$\left(a_0-\frac{da_1}{ds}\right)b_1-\left(b_0-\frac{db_1}{ds}\right)a_1=0,$$

entonces, la resolución del problema puede ser reducida a la resolución del problema de Hilbert y, por tanto, presentado en una forma cerrada (F. D. Gájov [5]).

5. Resuélvese el problema de contorno de Hilbert generalizado

$$\cos 2s\cos s\frac{du}{ds}+\operatorname{sen}2s\cos s\frac{dv}{ds}+(-2\operatorname{sen}2s\cos s+\cos 2s\operatorname{sen}s)\,u+$$
$$+(2\cos 2s\cos s+\operatorname{sen}2s\operatorname{sen}s)\,v=\cos^2 s\,(\operatorname{sen}2s-3\operatorname{sen}s)$$

para un círculo unitario.

Indicación. Hágase uso de los resultados del problema anterior.

Respuesta.

$$F(z)=\frac{1}{2}z^6-\frac{1}{4}z^5+\left(A_2+\frac{1}{2}\right)z^4+\left(A_1+\alpha-\frac{1}{4}\right)z^3+i\beta z^2-\overline{A}_1z-\overline{A}_2.$$

6. Resuélvese el problema de contorno de Hilbert generalizado

$$\cos\varkappa s\frac{du}{ds}-\operatorname{sen}\varkappa s\frac{dv}{ds}-\varkappa\operatorname{sen}\varkappa su-\varkappa\cos\varkappa sv=-2\operatorname{sen}2s$$

para un círculo unitario ($\varkappa$ es un número entero).

Respuesta. Cuando $\varkappa\leqslant 0$,

$$F(z)=u+iv=z^{-\varkappa}\,[z^2+c+Q(z)],$$

donde $Q(z)$ está definida con la fórmula (27.6); cuando $0<\varkappa\leqslant 2$, $F(z)=z^{2-\varkappa}$; cuando $\varkappa>2$, el problema es insoluble.

7. Demuéstrese que el problema de contorno de Poincaré homogéneo

$$\frac{du}{dn}+B(s)\frac{du}{ds}+c(s)\,u=f(s),$$

cuyos coeficientes satisfacen la condición

$$\frac{1}{2}B'(s)-c(s)\geqslant 0$$

es resoluble unívocamente (B. V. Jvedelidze 1)*).

8. Muéstrese que el problema de contorno de Hilbert

$$\operatorname{Re}[(a-ib)\,F(t)]=au+bv=c$$

mediante la representación integral

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\mu(\sigma)}{a(\sigma)-ib(\sigma)}\,\frac{d\tau}{\tau-z}+P(z),$$

donde $\mu(\sigma)$ es una función real, y $P(z)$, un polinomio elegido de un modo correspondiente, puede ser reducido a una ecuación integral de Fredholm. A base

de lo anterior dése la investigación de resolubilidad del problema de Hilbert (D. I. Scherman 4)*).

9. Resuélvese el problema de contorno de Riemann generalizado

$$t^2\frac{d^2\Phi^+}{dt^2}+4t\frac{d\Phi^+}{dt}+2\Phi^+(t)=\frac{d\Phi^-}{dt}+\frac{2t}{1+t^2}\Phi^-(t)+\frac{6t^3+6t-1}{t^2+1},$$

$$\Phi^-(\infty)=0,$$

suponiendo que:

a) los puntos i; $-i\in D^+$, el punto $0\in D^-$;

b) los puntos i, $-i$, $0\in D^+$.

Respuesta. a) $\Phi^+(z)=z+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}$,

$$\Phi^-(z)=\frac{z}{1+z^2}+\frac{c_3}{1+z^2};$$

b) $\Phi^+(z)=z$, $\Phi^-(z)=\frac{z}{1+z^2}+\frac{c_3}{1+z^2}$.

10. Hállese la solución de la ecuación diferencial integral

$$t^2\varphi''(t)+(1+4t)\varphi'(t)+\frac{2(t^2+t+1)}{t^2+1}\varphi(t)+\frac{t^2}{\pi i}\int_L\frac{\varphi''(\tau)}{\tau-t}d\tau+$$

$$+\frac{4t-1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi'(\tau)}{\tau-t}d\tau+2\frac{t^2-t+1}{t^2+1}\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=2\frac{6t^3+6t-1}{t^2+1}$$

para las mismas suposiciones respecto del contorno que en el problema anterior.

Respuesta. a) $\varphi(t)=\frac{t^3}{1+t^2}+\frac{c_1}{t}+\frac{c_2}{t^2}+\frac{c_3}{1+t^2}$;

b) $\varphi(t)=\frac{t^3}{1+t^2}+\frac{c}{1+t^2}$.

11. Muéstrese que el problema de contorno

$$t(t-1)[\Phi^+(t)]'+(2t-1)\Phi^+(t)=(t+1)[\Phi^-(t)]'+2\Phi^-(t)+2\frac{at^4-t^3-1}{t^3},$$

$$\Phi^-(\infty)=0,$$

donde los puntos 0, $1\in D^+$, es resoluble sólo para $a=2$. Hállese la solución en este caso.

Respuesta. $\Phi^+(z)=2$, $\Phi^-(z)=-\frac{1}{z^2}$.

12. Muéstrese que la ecuación diferencial integral

$$(t^2+1)\Phi'(t)+(2t+1)\Phi(t)+\frac{t^2-2t-1}{\pi i}\int_L\frac{\Phi'(\tau)}{\tau-t}d\tau+$$

$$+\frac{2t-3}{\pi i}\int_L\frac{\Phi(\tau)}{\tau-t}d\tau=4\frac{at^4-t^3-1}{t^3},$$

donde L es el mismo contorno que en el problema anterior, es resoluble sólo cuando $a = 2$. Dése la solución en este caso.

Respuesta. $\Phi(t) = \dfrac{2t^2+1}{t^2}$.

13. Resuélvese el problema de contorno

$$\frac{1}{t}[\Phi^+(t)]'' - \frac{1}{t^2}[\Phi^+(t)]' = t^3[\Phi^-(t)]'' + 6t^2[\Phi^-(t)]' + 6t\Phi^-(t) + 2\frac{4t^3+8t^2+4t+1}{(t+1)^2}, \quad \Phi^-(\infty) = 0,$$

en los casos:

a) el punto $-1 \in D^+$, los puntos $0,\ 1 \in D^-$;

b) los puntos $-1,\ 0 \in D^+$, el punto $1 \in D^-$.

Respuesta. a) El problema es insoluble.

b) $\Phi^+(z) = z^4 + 4c_1z^3 + c_2z^2 - 2z + c_3$,

$$\Phi^-(z) = 2\frac{\ln(z+1)}{z^3} + 6c_1z^{-1} - 2\frac{\ln z}{z^3} + c_4z^{-2} + c_5z^{-3}.$$

14. Resuélvese la ecuación diferencial integral

$$\frac{t^4+1}{t}\Phi''(t) + \frac{6t^4-1}{t^2}\Phi'(t) + 6t\Phi(t) + \frac{1-t^4}{t}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\Phi''(\tau)}{\tau-t}d\tau - \frac{6t^4+1}{t^2}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\Phi'(\tau)}{\tau-t}d\tau - \frac{6t}{\pi i}\int_L \frac{\Phi(\tau)}{\tau-t}d\tau = 4\frac{4t^3+8t^2+4t+1}{(t+1)^2}$$

para las mismas suposiciones respecto del contorno que en el problema anterior.

Respuesta. a) La solución no existe.

b) $\Phi(t) = \dfrac{t^7 - 2\ln(t+1)}{t^3} + 2c_1\dfrac{2t^4-3}{t} + c_2t^2 + 2\dfrac{\ln t - t^4}{t^3} + c_3 - c_4t^{-2} - c_5t^{-3}$.

15. Resuélvense los problemas de contorno de Hilbert para un anillo circular $\dfrac{1}{2} < |z| < 1$:

a) $\cos\theta u(\theta) + \operatorname{sen}\theta v(\theta) = \operatorname{sen}\theta$ en $|z| = 1$, $2\cos\theta u(\theta) + 2\operatorname{sen}\theta v(\theta) = \cos 2\theta$ en $|z| = \dfrac{1}{2}$;

b) $\cos\theta u(\theta) + \operatorname{sen}\theta v(\theta) = 1$ en $|z| = 1$, $\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right)u(\theta) + \operatorname{sen}\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right)v(\theta) = \operatorname{sen} 0$ en $|z| = \dfrac{1}{2}$.

Respuesta.

a) $F(z) = u + iv = -\frac{4}{15} z^3 - \frac{4}{3} iz^2 + i\beta z - \frac{1}{3} i + \frac{4}{15} z^{-1}$;

b) $F(z) = \left\{1 - i\sqrt{3} + \frac{1}{13}\left[(10 + i6\sqrt{3})\, z - \frac{10 - i6\sqrt{3}}{z}\right]\right\} z.$

Observación. En el caso a) las condiciones de uniformidad están cumplidas. Por ello, el problema homogéneo tiene la solución $\varphi(z) = iCz$, mientras que el problema no homogéneo es resoluble al complirse una condición la cual resulta ser cumplida.

En el cas b) el problema homogéneo en insoluble, mientras que el no homogéneo es resoluble incondicional y unívocamente.

CAPITULO VI

PROBLEMAS DE CONTORNO Y ECUACIONES INTEGRALES SINGULARES CON COEFICIENTES DISCONTINUOS Y CONTORNOS ABIERTOS

En todos los problemas, que hemos tratado hasta ahora, los coeficientes de las condiciones de contorno se consideraban funciones continuas[1]) y se suponía que el contorno del dominio estaba compuesto por unas curvas cerradas. En esta relación las soluciones sólo se representaban por unas funciones CONTINUAS hasta el contorno. La continuidad de la solución en el contorno se deducía no de unas restricciones especiales, impuestas sobre las soluciones, sino del mismo planteamiento de los problemas. Realizado el análisis de la investigación de los problemas de contorno fundamentales (capítulos II, IV), se pone en claro que la restricción esencial, que se imponía sobre la solución, consistía en el requisito de que sus valores de contorno sean integrables. Bajo esta condición la continuidad de la solución se desprende automáticamente de las condiciones de continuidad impuestas sobre los coeficientes (véase, por ejemplo, el problema 12 al cap. II).

En el presente capítulo ampliaremos el planteamiento de los problemas, admitiendo que los coeficientes de las condiciones de contorno pueden tener en algunos puntos discontinuidades de 1ra especie, mientras que el contorno puede constar tanto de las curvas cerradas como de las abiertas. Con este motivo hemos de ensanchar la clase de funciones que se admiten a título de soluciones.

El requisito de integrabilidad se conservará. La necesidad de conservarlo proviene de varios razonamientos. Ante todo, en las aplicaciones prácticas resulta ser útil solamente esta clase de funciones. Desde el punto de vista teórico esta condición hace más concreto el planteamiento del problema. Si se aceptan soluciones que es el contorno se reducen al infinito de un orden tan alto como se quie-

[1]) Los casos excepcionales examinados en el § 15, donde se admitía la reducción del coeficiente al infinito no son típicos, puesto que su investigación se adhería al caso de coeficientes continuos.

ra, un razonamiento más simple muestra que para cualquiera de los problemas de contorno examinados existe un número de soluciones linealmente independientes tan grande como se quiera.

Ha de notarse ahora mismo que dicho ampliamiento del planteamiento de problemas es de una gran importancia práctica, puesto que a los problemas con coeficientes discontinuos se reduce toda una serie de problemas con las así llamadas condiciones de contorno «mixtas».

Antes de proceder a la lectura ulterior, el lector tiene que restablecer en la memoria los pp. 8.1—8.4 y el § 14.

§ 41. Resolución del problema de Riemann con coeficientes discontinuos por reducción al problema con coeficientes continuos

41.1. Planteamiento del problema y definición de la función por un salto. Consideraremos primero un caso más simple en que el contorno está compuesto por una simple curva cerrada. Supongamos que las funciones $G(t)$, $g(t)$ en la condición de contorno del problema de Riemann

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t) \qquad (41.1)$$

en todos los puntos de L satisfacen la condición de Hölder, a excepción de los puntos $t_1, t_2, \ldots, t_m$, donde ellas tienen discontinuidades de 1ra especie. Los puntos que preceden al punto t_k, siendo recorrido el contorno en el sentido positivo, los llamaremos entorno izquierdo de este punto y los que siguen después, entorno derecho. Los límites izquierdo y derecho en el punto t_k se designarán, como siempre, por $G(t_k - 0)$ y $G(t_k + 0)$ ($G(t_k - 0) \neq G(t_k + 0)$). Supondremos que ninguno de los valores límites se reduce a cero y que la condición de contorno se cumple en todos los puntos, a excepción de los puntos de discontinuidad, en los cuales ella pierde sentido.

Buscaremos la solución del problema en la clase de funciones integrables en el contorno. De aquí se desprenderá que la solución será continua en el sentido de Hölder en todos los puntos, salvo, quizás, en los puntos t_k. En estos últimos se tienen diferentes posibilidades.

1. Se puede exigir que la solución sea acotada en todos los puntos de discontinuidad, buscando, por consiguiente, una solución acotada en todos los puntos.

2. Se puede exigir que la solución sea acotada en ciertos puntos de discontinuidad, admitiendo el infinito integrable en los demás puntos de discontinuidad.

3. Se puede admitir que la solución se reduzca al infinito de orden integrable en todos los puntos en los cuales esto se admite por las condiciones del problema[1]).

[1]) Según veremos en lo sucesivo, existen unos puntos de discontinuidad de tal índole que la integrabilidad origina automáticamente la acotación.

La primera clase de soluciones es la más estrecha. La segunda clase se obtiene de la primera por admisión del infinito en ciertos puntos y es más amplia en comparación con la primera. La más amplia es la última clase. El número de soluciones, como se demostrará a continuación, depende da la clase en que se busca la solución y puede ocurrir que un problema, resoluble en la clase más amplia, resulta insoluble en la clase más estrecha. Por analogía con lo hecho en el § 14, empezaremos a examinar el problema por el caso más simple en que una función analítica a trozos se determina por su salto. Pongamos en (41.1) $G(t) = 1$ y buscaremos las funciones analíticas $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$ según la condición de contorno

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t), \tag{41.2}$$

con la particularidad de que $g(t)$ puede tener en ciertos puntos discontinuidades de 1ra especie o una singularidad de tipo

$$g(t) = \frac{g^*(t)}{(t-t_k)^\gamma} \quad (\operatorname{Re}\gamma < 1), \tag{41.3}$$

donde $g^*(t)$ satisface la condición de Hölder.

La solución se busca en la clase de funciones que admiten en el contorno la acotación

$$|\Phi^{\pm}(t)| < \frac{C}{|t-t_k|^\alpha} \quad (\alpha > 1) \tag{41.4}$$

y se reducen a cero en el infinito.

En vista de las fórmulas de Sojotski, la solución del problema será la función

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{\tau - z}\, d\tau, \tag{41.5}$$

con la particularidad de que, de acuerdo con las investigaciones realizadas en los pp. 8.1—8.4, esta función tiene en los puntos de discontinuidad de 1ra especie de la función $g(t)$ una singularidad logarítmica, y en los puntos, donde $g(t)$ tiene la forma (41.3), una singularidad del mismo carácter.

Probemos que el problema (41.2) no puede tener otras soluciones en la misma clase de funciones. Como siempre sucede en los problemas lineales, la investigación de unicidad se reduce a la cuestión sobre la resolubilidad del problema homogéneo. En el caso que se considera ella tiene por expresión

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = 0. \tag{41.2'}$$

Razonando igual que en 1° del p. 8.3 y utilizando la acotación (41.4), llegamos a que en el caso considerado el problema (41.2') sólo tiene una solución nula y, por lo tanto, la solución (41.5) del problema (41.2) es único.

Observemos que en el mismo razonamiento está basada la afirmación de que, siendo continuo el coeficiente $G(t)$, la admisión de una singularidad integrable de la solución en el contorno no hace más amplia la clase de soluciones.

Si la solución del problema (41.2) se busca en la clase de funciones que tienen en el infinito un polo de orden $\varkappa$, entonces esta solución será representada (lo que se muestra con facilidad, apoyándose, al igual que en el § 14, en el problema generalizado de Liouville) por la función

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{\tau - z} d\tau + P_\varkappa(z), \tag{41.6}$$

donde $P_\varkappa(z)$ es un polinomio de grado $\varkappa$ con coeficientes arbitrarios.

El método de resolución del problema general (41.1), que se expone en el presente párrafo, consiste en la reducción de dicho problema al considerado anteriormente en § 14. Con este fin se construyen funciones especiales las cuales, por una parte, tienen en los puntos t_k las mismas discontinuidades que tiene $G(t)$, y, por otra parte, deben ser de tal género que, siendo tomadas por los coeficiente del problema de Riemann, dicho problema para ellas podría ser resuelto. Al introducir luego con su ayuda nuevas funciones desconocidas, llegaremos al problema de Riemann que ya tiene coeficientes continuos.

Procedamos, ahora, a construir las funciones auxiliares que acabamos de mencionar.

41.2. Funciones auxiliares fundamentales. La idea de construir tales funciones consiste en la posibilidad de considerar una función analítica multiforme, en un plano cortado de modo correspondiente, como función discontinua uniforme.

Introduzcamos dos funciones analíticas:

$$(z - z_0)^\gamma, \quad (z - t_1)^\gamma,$$

donde z_0 es un cierto punto en el dominio D^+; t_1 es un punto en el contorno, y $\gamma = \alpha + i\beta$, cierto número complejo. Los puntos de ramificación de estas funciones serán, respectivamente, z_0, ∞ y t_1, ∞. Hagamos en el plano z un corte, a partir del punto z_0, por el punto t_1, hasta el infinito. En el plano cortado de esta manera ambas funciones serán uniformes y el corte servirá para ellas de línea de discontinuidad. Convengamos en que el tramo del corte $z_0 t_1$ se ubica enteramente en D^+ y examinemos las funciones

$$\omega^+(z) = (z - t_1)^\gamma, \quad \omega^-(z) = \left(\frac{z - t_1}{z - z_0}\right)^\gamma. \tag{41.7}$$

Con el modo elegido de corte, la función $\omega^+(z)$ será analítica en D^+, mientras que $\omega^-(z)$ será analítica en D^-. En el contorno las dos funciones serán continuas (incluso analíticas) en todos los puntos a

excepción, quizás, del punto t_1. El comportamiento de estas funciones en el punto t_1 dependerá de la magnitud de γ. Por el momento dejemos al lado esta cuestión y consideremos la razón de sus valores de contorno. Para todos los puntos del contorno, distintos de t_1, es evidente que

$$\Omega(t) = \frac{\omega^-(t)}{\omega^+(t)} = (t - z_0)^{-\gamma}. \tag{41.8}$$

En el punto t_1 la función $\Omega(t)$ es indefinida; hallaremos la razón de sus límites izquierdo y derecho que coinciden con los límites correspondientes de la función $(t - z_0)^{-\gamma}$.

Como que los entornos izquierdo y derecho del punto t_1 se encuentran por distintos lados del corte para la función $(z - z_0)^{\gamma}$, entonces, de acuerdo con la propiedad de una función potencial,

$$\frac{\Omega(t_1 - 0)}{\Omega(t_1 + 0)} = e^{-2\pi i\gamma}. \tag{41.9}$$

Investigaremos, ahora, el comportamiento de las funciones $\omega^+(z)$, $\omega^-(z)$ en el entorno del punto t_1. Con este fin será suficiente investigar la función $\omega^+(z) = (z - t_1)^{\gamma}$.

Designando $z - t_1 = re^{i\theta}$, tendremos

$$(z - t_1)^{\gamma} = e^{\gamma \ln (z - t_1)} = r^{\alpha} e^{-\beta\theta} e^{i(\beta \ln r + \alpha\theta)}. \tag{41.10}$$

De (41.10) se deduce que para $\alpha \neq 0$, el orden de la función $(z - t_1)^{\gamma}$ sólo depende de α. Cuando $\alpha > 0$, ella tiene cero de orden α; cuando $\alpha < 0$, un infinito de orden $-\alpha$, y por fin, para $\alpha = 0$, esta magnitud queda acotada, pero, al aproximarse hacia t_1, no tiende a ningún límite. Si se tiene $-1 < \alpha < 0$, las funciones $\omega^+(z)$, $\omega^-(z)$ tendrán en el punto t_1 un infinito de orden integrable.

41.3. Reducción a un problema con coeficientes continuos. Caso elemental. Examinemos al principio un problema homogéneo

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t), \tag{41.1'}$$

suponiendo que el coeficiente $G(t)$ sólo posee un punto de discontinuidad t_1.

Al hacer

$$\gamma = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{G(t_1 - 0)}{G(t_1 + 0)} \tag{41.11}$$

(de la elección de la rama del logaritmo nos ocuparemos más tarde, en dependencia de la clase admisible de soluciones), conforme a las fórmulas (41.7), construyamos las funciones $\omega^+(z)$ y $\omega^-(z)$.

Introduzcamos nuevas funciones incógnitas $\Phi^+(z)$, al poner

$$\Phi^{\pm}(z) = \omega^{\pm}(z)\,\Phi_1^{\pm}(z). \tag{41.12}$$

La condición de contorno (41.1′) pasa ahora en la condición

$$\Phi_1^+(t) = G_1(t)\,\Phi_1^-(t), \tag{41.13}$$

donde

$$G_1(t) = \frac{\omega^-(t)}{\omega^+(t)}\,G(t).$$

Al introducir las mismas designaciones que en el p. 41.2, obtenemos

$$G_1(t) = \Omega(t)\,G(t) = (t - z_0)^{-\gamma}\,G(t). \tag{41.14}$$

El nuevo coeficiente $G_1(t)$ ya es una función continua en todos los puntos de L, incluido también el punto t_1. En efecto, al aplicar las fórmulas (41.9) y (41.11), encontramos

$$\frac{G_1(t_1-0)}{G_1(t_1+0)} = \frac{\Omega(t_1-0)\,G(t_1-0)}{\Omega(t_1+0)\,G(t_1+0)} = e^{-2\pi i\gamma}\,\frac{G(t_1-0)}{G(t_1+0)} = 1,$$

es decir, $G_1(t_1 - 0) = G_1(t_1 + 0)$, lo que precisamente implica la continuidad de $G_1(t)$ en el punto t_1. Así pues, el problema (41.1′) con coeficiente discontinuo $G(t)$ se ha reducido al problema (41.13) de coeficiente continuo $G_1(t)$, estudiado en el § 14.

Ocupémonos, ahora, de la investigación de la cuestión acerca del índice del problema. El comportamiento de la solución del problema (41.1′) cerca del punto de discontinuidad t_1, según se ve de la fórmula (41.12), depende de cómo se portan las funciones $\omega^+(z)$ y $\omega^-(z)$. En el punto antecedente se ha mostrado que lo último se determina por la magnitud $\alpha = \operatorname{Re}\gamma$, es decir, al fin de cuentas, por la elección de una rama correspondiente del logaritmo en la fórmula (41.11). Esta elección se debe efectuar en dependencia de la clase admisible de soluciones, a saber: hay que exigir que se verifique la condición

$$0 \leqslant \operatorname{Re}\gamma < 1, \tag{41.15}$$

siempre que se admiten las soluciones acotadas cerca del punto t_1, y la condición

$$-1 < \operatorname{Re}\gamma < 0, \tag{41.16}$$

si se buscan las soluciones que en el punto t_1 tienen infinito de orden integrable[1]). Veamos qué significan estos requisitos para el coeficiente $G(t)$ del problema de partida (41.1′).

[1]) La condición $\operatorname{Re}\gamma > -1$ fluye inmediatamente del requisito de integrabilidad. El sentido del segundo miembro en las desigualdades (41.15) y (41.16) consiste en que no se impongan sobre la solución unas condiciones superfluas. La violación de las desigualdades se acompañaría de la pérdida de soluciones admisibles.

Denotemos con θ el incremento de alguna rama del argumento $G(t)$ durante el recorrido del contorno L. Ha de ser notado ahora mismo que θ puede considerarse como un salto del argumento $G(t)$ en el punto de discontinuidad tomado con el signo contrario. Por esto, se puede hacer

$$\frac{G(t_1-0)}{G(t_1+0)} = \rho e^{i\theta}. \tag{41.17}$$

Entonces, conforme a la fórmula (41.11)

$$\gamma = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{G(t_1-0)}{G(t_1+0)} = \frac{\theta}{2\pi} - \varkappa - i\frac{\ln \rho}{2\pi}, \tag{41.18}$$

donde el número entero $\varkappa$ se debe elegir en concordancia con las condiciones (41.15) y (41.16), las cuales toman la forma

$$0 \leqslant \frac{\theta}{2\pi} - \varkappa < 1, \tag{41.15'}$$

$$-1 < \frac{\theta}{2\pi} - \varkappa < 0. \tag{41.16'}$$

De aquí se infieren las fórmulas:

para la clase de soluciones acotadas

$$\varkappa = \left[\frac{\theta}{2\pi}\right]; \tag{41.19}$$

para la clase de soluciones no acotadas cerca del punto t_1

$$\varkappa = \left[\frac{\theta}{2\pi}\right] + 1. \tag{41.20}$$

El símbolo $[x]$ significa, de conformidad con lo aceptado en la teoría de números, el mayor número entero que no supera a x.

Calculemos, ahora, el índice del problema (41.13). Tomando en consideración las fórmulas (41.14), (41.17) y (41.18) (la última determina la elección de la rama del logaritmo), encontramos

$$\operatorname{Ind} G_1(t) = \frac{1}{2\pi i}\{\ln G_1(t)\}_L = \frac{1}{2\pi i}\left\{\ln\left(\frac{G(t_1-0)}{G(t_1+0)}\, e^{-2\pi i\gamma}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \ln e^{2\pi i\varkappa} = \varkappa.$$

Esta magnitud se llamará *índice del problema dado* (41.1').

El índice se determina, de este modo, por la fórmula (41.19) ó (41.20) y depende de la clase de soluciones elegida, con la particularidad de que el índice del problema en la clase de soluciones no acotadas es una unidad mayor que el índice en la clase de soluciones acotadas.

Si $\theta/2\pi$ es un número entero, de las dos condiciones, (41.15') y (41.16'), puede cumplirse sólo la primera, cuando $\varkappa = \theta/2\pi$.

El punto de discontinuidad t_1 en este caso, lo denominaremos *punto de acotación automática*. La solución del problema (41.1'), quedando acotada cerca de este punto, no tiende, al aproximarse hacia t_1, a ningún límite (véase el final del p. 41.2).

Al haber aclarado la parte de principio en el caso elemental considerado, pasemos a la resolución del problema en la forma general.

41.4. Resolución del problema homogéneo. Supongamos que el coeficiente $G(t)$ tiene discontinuidades de 1ra especie en los puntos $t_1, t_2, \ldots, t_l$. Mediante los puntos de discontinuidad dividamos el contorno L en tramos entre t_k y t_{k+1}, y determinaremos de una manera arbitraria la rama del arg $G(t_k + 0)$ en todo punto inicial del tramo; en el punto final del tramo el arg $G(t_{k+1} - 0)$ se obtendrá de la rama elegida del arg $G(t_k + 0)$ por medio de la alteración continua.

Designaremos, como antes,

$$\frac{G(t_k - 0)}{G(t_k + 0)} = A_k = \rho_k e^{i\theta_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, l),$$

donde θ_k es un salto del argumento en el punto de discontinuidad t_k tomado con el signo contrario.

Hagamos

$$\gamma_k = \frac{1}{2\pi i} \ln A_k = \frac{\theta_k}{2\pi} - \varkappa_k - i \frac{\ln \rho_k}{2\pi} \tag{41.21}$$

(los números enteros $\varkappa_k$ se determinan por la fórmula (41.19) ó (41.20)),

$$\Phi^+(z) = \prod_{k=1}^{l} (z - t_k)^{\gamma_k} \Phi_1^+(z), \quad \Phi^-(z) = \prod_{k=1}^{l} \left(\frac{z - t_k}{z - z_0}\right)^{\gamma_k} \Phi_1^-(z), \tag{41.22}$$

con la particularidad de que los cortes para las funciones $(z - z_0)^{\gamma_k}$ pasan por el punto t_k del contorno. Sustituyendo en la ecuación (41.1'), llegaremos a la condición de contorno

$$\Phi_1^+(t) = \prod_{k=1}^{l} (t - z_0)^{-\gamma_k} G(t) \Phi_1^-(t), \tag{41.23}$$

en la cual, por definición, la función $(t - z_0)^{-\gamma_k}$ experimenta un salto, al pasar por el punto t_k.

Razonando por analogía con el caso considerado más arriba de una única discontinuidad, nos convencemos de que el coeficiente $G_1(t) = \prod_{k=1}^{l} (t - z_0)^{-\gamma_k} G(t)$ es una función continua. Por lo tanto, hemos llegado de nuevo a la resolución del problema con coeficiente continuo. No es difícil calcular el índice del coeficiente $G_1(t)$. Considerando el incremento del argumento $G_1(t)$ en todo el contorno L

como la suma de incrementos en los tramos entre los puntos de discontinuidad y teniendo presente que todo binomio $(t - z_0)^{\gamma_k}$ satisface en el punto t_k la condición

$$\frac{(t_k - 0 - z_0)^{\gamma_k}}{(t_k + 0 - z_0)^{\gamma_k}} = e^{2\pi i \gamma_k},$$

obtendremos

$$\operatorname{Ind} G_1(t) = \frac{1}{2\pi i}\{\ln G_1(t)\}_L = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{l}\{\ln G_1(t)\}_{t_k}^{t_{k+1}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{l}\ln\left[\frac{G(t_k - 0)(t_k - 0 - z_0)^{-\gamma_k}}{G(t_k + 0)(t_k + 0 - z_0)^{-\gamma_k}}\right] = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_l. \quad (41.24)$$

La última magnitud se llamará *índice del problema de partida* (41.1').

Como ya se ha indic do.más arriba,

$$\varkappa_k = \left[\frac{\theta_k}{2\pi}\right],$$

si la solución se busca en la clase de funciones acotadas, y

$$\varkappa_k = \left[\frac{\theta_k}{2\pi}\right] + 1$$

para la clase de funciones integrables no acotadas.

De aquí se ve que el índice del problema en la clase de funciones, que en el punto dado de discontinuidad tienen un infinito de orden integrable, es una unidad mayor que el índice en la clase de funciones acotadas en el punto dado.

Supongamos que se necesita hallar una solución, que tiene infinito integrable en ciertos p puntos de discontinuidad y es acotada en los demás $l - p$ puntos de este género. (Todos los puntos de acotación automática figurarán, evidentemente, en el segundo grupo.) De acuerdo con los razonamientos anteriores, el índice del problema en la clase indicada tendrá por expresión

$$\varkappa = \sum_{k=1}^{l}\left[\frac{\theta_k}{2\pi}\right] + p. \quad (41.25)$$

El índice podría ser expresado en términos del incremento del argumento $G(t)$. Sin embargo, en el caso dado no se obtendrá una fórmula tan simple que en el caso de un único punto de discontinuidad, por lo cual esta expresión aquí no se da. Al resolverse problemas concretos, el índice se determina con éxito mediante las últimas fórmulas.

Con el objeto de obtener la solución general del problema planteado, es necesario hallar, según las reglas del § 14, la solución general $\Phi_1(z)$ del problema (41.23) con coeficientes continuos y, entonces, la fórmulas (41.22) proporcionarán la solución general del problema de partida. Actualmente no vamos a dar las fórmulas correspondientes, sino que pasemos a la resolución del problema no homogéneo. La solución general de este último incluye, como se sabe, la solución general del problema homogéneo; en el p. 41.5 demos a conocer las fórmulas completas.

41.5. Resolución del problema no homogéneo. Consideraremos un problema no homogéneo

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t).$$

En lo que se refiere a $G(t)$, partiremos de las mismas suposiciones que en el punto antecedente, y consideramos por el momento que $g(t)$ satisface la condición de Hölder.

Introduciendo las nuevas funciones $\Phi_1^+(z)$, $\Phi_1^-(z)$ por medio de las sustituciones (41.22), reduzcamos la condición de contorno del problema a la forma

$$\Phi_1^+(t) = \prod_{k=1}^{l} (t-z_0)^{-\gamma_k} G(t)\,\Phi_1^-(t) + \prod_{k=1}^{l} (t-t_k)^{-\gamma_k} g(t).$$

Al cambiar el coeficiente continuo $\prod_{k=1}^{l} (t-z_0)^{-\gamma_k} G(t)$ por la razón de funciones canónicas (véase el p. 14.3), comunicaremos a la condición de contorno una forma siguiente

$$\frac{\Phi_1^+(t)}{X_1^+(t)} - \frac{\Phi_1^-(t)}{X_1^-(t)} = \frac{\prod_{k=1}^{l} (t-t_k)^{-\gamma_k} g(t)}{X_1^+(t)}.$$

El último problema es el problema (41.2) para determinar una función analítica por el salto dado, con la particularidad de que la función $\frac{\Phi_1^-(z)}{X_1^-(z)}$ tiene en el infinito el orden $-\varkappa$. De acuerdo con la igualdad (41.6), la solución de este problema se expresa mediante la fórmula[1])

$$\frac{\Phi_1(z)}{X_1(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{k=1}^{l} (\tau-t_k)^{-\gamma_k} g(\tau)}{X_1^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau-z} + P_\varkappa(z). \qquad (41.26)$$

Cuando $\varkappa < 0$, se debe poner $P_\varkappa(z) \equiv 0$.

---

[1]) Ahora se pone claro que Re γ_k debe ser inferior a la unidad (véanse la pág. 449 y también el p. 8.4.).

En virtud de las fórmulas (41.22), la solución del problema planteado tiene la forma

$$\begin{aligned} \Phi^+(z) &= \prod_{k=1}^{l} (z-t_k)^{\gamma_k} X_1^+(z)\,[\Psi^+(z)+P_\varkappa(z)], \\ \Phi^-(z) &= \prod_{k=1}^{l} \left(\frac{z-t_k}{z-z_0}\right)^{\gamma_k} X_1^-(z)\,[\Psi^-(z)+P_\varkappa(z)], \end{aligned} \tag{41.27}$$

donde

$$\begin{aligned} X_1^+(z) &= e^{\Gamma^+(z)}, \quad X_1^-(z) = (z-z_0)^{-\varkappa} e^{\Gamma^-(z)}, \\ \Gamma(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln\left[(\tau-z_0)^{-\varkappa}\prod_{k=1}^{l}(\tau-z_0)^{-\gamma_k} G(\tau)\right]}{\tau-z}\,d\tau, \\ \Psi(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{k=1}^{l}(\tau-t_k)^{-\gamma_k} g(t)}{X_1^+(\tau)(\tau-z)}\,d\tau. \end{aligned} \tag{41.28}$$

Es fácil establecer que la solución, determinada mediante las últimas fórmulas, pertenece a la clase dada.

Sea, por ejemplo, $\operatorname{Re}\gamma_j > 0$. Entonces, en virtud de las fórmulas (8.20), el orden de crecimiento de la función $\Psi(z)$ cerca del punto t_j será $(z-t_j)^{-\gamma_j}$, y, por consiguiente, debido a la presencia del factor $(z-t_j)^{\gamma_j}$, $\Phi(z)$ será acotada.

Si $\operatorname{Re}\gamma_j < 0$, entonces $\Psi(z)$ será acotada en el punto t_j, mientras que $\Phi(z)$ se reducirá al infinito de orden $\operatorname{Re}\gamma_j$.

Si sobre la solución se impone la condición adicional

$$\Phi^-(\infty) = 0, \tag{41.29}$$

$P_\varkappa^1(z)$ en la fórmula (41.27) debe sustituirse por $P_{\varkappa-1}(z)$.

El resultado de investigación puede ser enunciado como un teorema, el cual será una repitición casi textual del teorema del p. 14.5.

TEOREMA. *Si el índice $\varkappa$ del problema de Riemann en la clase dada es positivo, la solución general del problema no homogéneo depende linealmente de $\varkappa+1$ constantes arbitrarias y se define por la fórmula* (41.27), *en la cual, al imponerse la condición adicional* $\Phi^-(\infty)=0$, *se debe sustituir $P_\varkappa$ por $P_{\varkappa-1}$.*

Cuando $\varkappa \leqslant 0$, *el problema homogéneo en la clase dada es insoluble, mientras que el no homogéneo es resoluble cuando, y sólo cuando, se cumplan* $-\varkappa$ *condiciones.*

$$\int_L \frac{\prod_{k=1}^{l} (\tau - t_k)^{-\gamma_k} g(\tau)}{X_1^+(\tau)} \tau^{j-1} d\tau = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, -\varkappa). \quad (41.30)$$

Si estas condiciones están cumplidas, el problema no homogéneo tiene una única solución, la cual se obtiene de (41.27) *para* $P_\varkappa(z) \equiv 0$.

Recordemos que el índice del problema en la clase dada, coincidente con el del problema (41.23) de coeficiente continuo, se determina mediante la fórmula (41.25).

OBSERVACIÓN. A pesar de que en las fórmulas (41.27) figura en la forma explícita el punto arbitrariamente elegido z_0, no es difícil mostrar (la demostración queda a cargo del lector) que la solución general no depende de cómo se elige este punto.

Veamos ahora, cuáles son los cambios que necesitan ser introducidos en la solución obtenida, si se admite que $g(t)$ tiene discontinuidades en el número finito de puntos.

Supongamos que en el entorno de los puntos t_1', t_2', . . ., t_r' la función $g(t)$ tiene la siguiente representación

$$g(t) = \frac{g_*(t)}{(t - t_k')^{\gamma_k'}} \qquad (\gamma_k' = \alpha_k' + i\beta_k',\ 0 \leqslant \alpha_k' < 1), \quad (41.31)$$

donde $g_*(t)$ satisface la condición de Hölder, y en los puntos t_1'', t_2'', . . ., t_s'' tiene discontinuidades de 1ra especie $g(t_k'' + 0) \neq g(t_k'' - 0)$.

Consideraremos por separado dos casos.

1°. TODOS LOS PUNTOS DE DISCONTINUIDAD DEL TÉRMINO INDENPENDIENTE SON DISTINTOS DE LOS EXTREMOS[1]). Los razonamientos, por cuyo intermedio se ha obtenido la solución, suponiendo que el término independiente satisface la condición de Hölder, subsisten totalmente también para el caso en consideración y llegamos de nuevo a las fórmulas (41.27) y (41.28). La única diferencia consiste en lo que, esta vez, las soluciones, además de las singularidades en los extremos determinadas por la clase elegida de soluciones, tendrán singularidades en los puntos de discontinuidad de la función $g(t)$. En vista de las propiedades de la integral de tipo de Cauchy (pp. 8.2, 8.4), la solución tendrá una singularidad de tipo

$$\Phi(t) = (t - t_k')^{-\gamma_k'} \Phi^*(t)$$

[1]) Llamamos *extremos* a los puntos de discontinuidad del coeficiente $G(t)$.

en los puntos $t'_1, t'_2, \ldots, t'_r$, y las singularidades de carácter logarítmico, en los puntos $t''_1, t''_2, \ldots, t''_s$.

Además, a diferencia de los extremos, donde el comportamiento de la solución depende, en tal o cual grado, de cierta arbitrariedad (la elección de la clase), en los puntos de discontinuidad del término independiente el comportamiento de la solución se determina enteramente por el carácter de la discontinuidad.

2°. ALGUNOS PUNTOS DE DISCONTINUIDAD DE $g(t)$ COINCIDEN CON LOS EXTREMOS. Para los puntos de discontinuidad de la función $g(t)$, no coincidentes con los extremos, queda en vigor, evidentemente, el razonamiento anterior. Luego, es fácil advertir que la coincidencia de los extremos con los puntos de discontinuidad de $g(t)$ de 1ra especie no trae consigo nada de nuevo en comparación con el caso considerado de un término independiente que satisface la condición de Hölder, puesto que el comportamiento de la función $\frac{(\tau - t_k)^{-\gamma_k} g(\tau)}{X_1^+(\tau)}$ que sirve de densidad para la integral de tipo de Cauchy, será idéntico tanto para la función $g(t)$ que satisface la condición de Hölder, como en el caso en que ella tiene discontinuidad de 1ra especie.

Para los puntos t'_k, coincidentes con los extremos, puede suceder la adición de singularidades, por lo cual este caso debe ser considerado más detalladamente.

Sea $t'_k = t_k$. Sustituyendo, en las fórmulas (41.28), la función $g(t)$ por su expresión (41.31), llegamos a que en el punto t_k la densidad de la integral correspondiente de tipo de Cauchy tendrá la forma $(t - t_k)^{-(\gamma_k + \gamma'_k)} \varphi_1(t)$ ($\varphi_1(t)$ satisface la condición de Hölder), es decir, tendrá el orden $-(\alpha_k + \alpha'_k)$.

Por definición, $\alpha'_k \geqslant 0$; el número α_k será nulo para un extremo singular, mientras que en el caso de un extremo no singular será positivo, si se busca la solución acotada en el extremo t_k, y negativo, en el caso contrario. En el capítulo I se ha dado la investigación de la integral de tipo de Cauchy cuya densidad se reduce al infinito de orden inferior que la unidad. Si se buscan las soluciones, no acotadas en el punto t_k, entonces $\alpha_k + \alpha'_k < 1$, y la teoría resulta ser aplicable. Por un cálculo sencillo podemos convencernos de que en este caso el orden de la solución en el punto t_k será no inferior que mín $(\alpha_k, -\alpha'_k)$.

Para las soluciones que se buscan en la clase de funciones acotadas, en el caso en que $\alpha_k + \alpha'_k < 1$, la teoría es también aplicable, con la única particularidad de que la solución en el punto investigado resultará, de hecho, no acotada (excepto el caso $\alpha'_k = 0$); su orden será igual a $-\alpha'_k$.

Si $\alpha_k + \alpha'_k > 1$, se necesitará la investigación complementaria.

§ 42. Problema de contorno de Riemann para los contornos abiertos

42.1. Planteamiento del problema y resolución. Supongamos que el contorno L está compuesto por un conjunto de m curvas simples y suaves $L_1, L_2, \ldots, L_m$ que no se intersecan y tienen los extremos a_k y b_k (el recorrido positivo se realiza desde a_k hacia b_k), y sean $G(t)$, $g(t)$ unas funciones definidas en L que satisfacen la condición de Hölder, con la particularidad de que en todos los puntos $G(t) \neq 0$.

Se necesita hallar una función $\Phi(z)$, analítica en todo el plano salvo los puntos del contorno L, cuyos valores de frontera $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ sean, al aproximarse hacia L desde la izquierda y desde la derecha, unas funciones integrables que satisfagan la condición de contorno

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t). \quad (42.1)$$

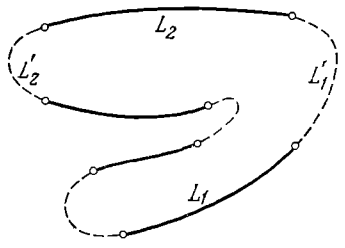


Fig. 15

El problema de Riemann para un contorno abierto, como puede verse de su planteamiento, se diferencia en principio del problema para un contorno cerrado en lo que todo el plano con corte a lo largo de la curva L constituye un dominio y nos vemos obligados a buscar no dos funciones independientes analíticas $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$, sino una función analítica $\Phi(z)$, para la cual el contorno L es la línea de saltos.

El problema enunciado puede ser reducido al problema, considerado en el § 41, para un contorno cerrado de coeficientes discontinuos, mediante el siguiente procedimiento formal[1]). Completemos el contorno L con m curvas arbitrarias $L_1', L_2', \ldots, L_m'$ de una manera tal que se forme una curva cerrada C $(L_1 + L_1' + \ldots + L_m + L_m' = C)$ sin puntos múltiples (fig. 15).

Es evidente que en las curvas, que completan el contorno, $\Phi^+(t) = \Phi^-(t)$. Tomándolo en consideración, podemos considerar el problema (42.1) como uno en el contorno cerrado

$$\Phi^+(t) = G_1(t)\,\Phi^-(t) + g_1(t), \quad (42.2)$$

con la particularidad de que

$$\begin{aligned} &G_1(t) = G(t), \quad g_1(t) = g(t) \quad \text{en } L_k, \\ &G_1(t) = 1 \qquad g_1(t) = 0 \qquad \text{en } L_k' \ (k = 1, 2, \ldots, m). \end{aligned} \quad (42.3)$$

[1]) La idea de este procedimiento pertenece a N. N. Meiman, quien fue primero en proponerla en la forma oral.

La resolución que sigue representa en sí un ejemplo de aplicación de la teoría del párrafo antecedente. Hagamos $G(a_k) = \rho_k e^{i\theta_k}$ y $G(b_k) = \rho_k' e^{i(\theta_k+\Delta_k)}$, donde con Δ_k está designado el cambio de arg $G(t)$ en L_k. Entonces,

$$\left.\begin{array}{ll} G_1(a_k-0)=1, & G_1(a_k+0)=G(a_k)=\rho_k e^{i\theta_k}; \\ G_1(b_k-0)=G(b_k)=\rho_k' e^{i(\theta_k+\Delta_k)}, & G_1(b_k+0)=1; \\ \dfrac{G_1(a_k-0)}{G_1(a_k+0)}=\dfrac{1}{\rho_k}e^{-i\theta_k}, & \dfrac{G_1(b_k-0)}{G_1(b_k+0)}=\rho_k' e^{i(\theta_k+\Delta_k)}. \end{array}\right\} \quad (42.4)$$

El valor del argumento θ_k[1]) en el punto inicial a_k del contorno, lo vamos a tomar dentro de los límites

$$-2\pi < \theta_k \leqslant 0, \quad (42.5)$$

si se busca la solución acotada en el punto a_k, y entre los límites

$$0 < \theta_k < 2\pi, \quad (42.6)$$

si la solución buscada no está acotada en el punto a_k.

Estas condiciones se imponen con el único fin de simplificar las fórmulas que siguen y no ejercen influencia alguna en los resultados definitivos.

Hagamos (véase la fórmula (41.21))

$$\gamma_k = \frac{1}{2\pi i}\ln\left(\frac{1}{\rho_k}e^{-i\theta_k}\right) = -\frac{\theta_k}{2\pi} + i\,\frac{\ln\rho_k}{2\pi},$$
$$\gamma_k' = \frac{1}{2\pi i}\ln(\rho_k' e^{i(\theta_k+\Delta_k)}) = \frac{\theta_k+\Delta_k}{2\pi} - \varkappa_k - i\,\frac{\ln\rho_k'}{2\pi}, \quad (42.7)$$

donde $\varkappa_k$ son unos números enteros los cuales, en virtud de las fórmulas (41.16), (41.18), se determinan como

$$\varkappa_k = \left[\frac{\theta_k+\Delta_k}{2\pi}\right] \quad (42.8)$$

para las soluciones, acotadas en el punto b_k, y como

$$\varkappa_k = \left[\frac{\theta_k+\Delta_k}{2\pi}\right] + 1 \quad (42.9)$$

para las soluciones no acotadas en este extremo.

El índice del problema se representa mediante la fórmula

$$\varkappa = \sum_{k=1}^{m} \varkappa_k,$$

[1]) Hay que tener en cuenta que ahora θ_k implica simplemente un salto del argumento de la función $G_1(t)$ en el punto a_k, mientras que $\theta_k+\Delta_k$ es el salto en el punto b_k, tomado, como antes, con el signo opuesto.

donde $\varkappa_k$ se determina por la fórmula (42.8) ó (42.9), en dependencia de cuál debe ser la solución en el extremo b_k: acotada o no acotada. En su turno, el valor inicial del argumento en los puntos a_k debe satisfacer la condición (42.5), para la solución acotada en el punto a_k, y a la (42.6), para la solución no acotada en el mismo punto.

Es fácil ver que la admisión de que la solución no es acotada en cualquier de los extremos, aumenta el índice en una unidad. Esto es un corolario sencillo de la propiedad correspondiente para los puntos de discontinuidad.

Denominaremos *extremos de acotación automática* (singulares) a aquellos en los cuales $G(t)$ es un número positivo real (el argumento es múltiplo de 2π). Si tal extremo está representado por el punto inicial a_k, se debe poner $\theta_k = 0$; si el mismo es el punto final b_k, entonces, $\varkappa_k = \frac{\theta_k + \Delta_k}{2\pi}$.

Al introducir nuevas funciones mediante la sustitución

$$\begin{aligned} \Phi^+(z) &= \prod_{k=1}^{m} (z-a_k)^{\gamma_k} (z-b_k)^{\gamma_k'} \Phi_1^+(z), \\ \Phi^-(z) &= \prod_{k=1}^{m} \left(\frac{z-a_k}{z-z_0}\right)^{\gamma_k} \left(\frac{z-b_k}{z-z_0}\right)^{\gamma_k'} \Phi_1^-(z), \end{aligned} \tag{42.10}$$

llegaremos a un problema de coeficiente continuo $G(t)$ en el contorno cerrado C:

$$\Phi_1^+(t) = \prod_{k=1}^{m} (t-z_0)^{-\gamma_k} (t-z_0)^{-\gamma_k'} G_1(t)\, \Phi_1^-(t) + \\ + \prod_{k=1}^{m} (t-a_k)^{-\gamma_k} (t-b_k)^{-\gamma_k'} g_1(t). \tag{42.11}$$

La resolución posterior se efectúa de un modo habitual y no hay necesidad de exponerlo aquí especialmente. Resulta fácil demostrar (véase el problema 1 al final del capítulo), que la solución no depende de la forma de la curva de cierre L'.

42.2. Ejemplo. A título de ejemplo de la teoría expuesta consideraremos un problema (que se encuentra en muchas aplicaciones) el cual en lo sucesivo será de referencia en varias ocasiones.

Supongamos que en el contorno L, compuesto de m curvas abiertas, $G(t) = -1$, es decir, la condición de contorno está definida en la forma

$$\Phi^+(t) = -\Phi^-(t) + g(t). \tag{42.12}$$

Escribamos la condición de contorno para un contorno cerrado:

$$\Phi^+(t) = G_1(t)\,\Phi^-(t) + g_1(t); \qquad (42.12')$$
$$G_1(t) = -1, \quad g_1(t) = g(t) \text{ en } L,$$
$$G_1(t) = 1, \quad g_1(t) = 0 \text{ en } L'.$$

Primero buscaremos la solución en la clase más amplia de funciones, no acotadas cerca de todos los extremos. En este caso obtendremos

$$G_1(a_k - 0) = 1; \quad G_1(a_k + 0) = -1 = e^{i\pi};$$
$$\frac{G_1(a_k - 0)}{G_1(a_k + 0)} = e^{-i\pi}; \quad G_1(b_k - 0) = -1 = e^{i\pi};$$
$$G_1(b_k + 0) = 1; \quad \frac{G_1(b_k - 0)}{G_1(b_k + 0)} = e^{i\pi};$$
$$\gamma_k = \frac{1}{2\pi i} \ln e^{-i\pi} = -\frac{1}{2}.$$

Puesto que $\theta_k = \pi$, y $\Delta_k = 0$, entonces $\varkappa_k = \left[\frac{1}{2}\right] + 1 = 1$, $\gamma_k' = -\frac{1}{2}$.

Por consiguiente,

$$\varkappa = \sum_{k=1}^{m} \varkappa_k = m. \qquad (42.13)$$

De acuerdo con la sustitución (42.10), el problema en el contorno cerrado C de coeficiente continuo se escribirá en la forma

$$\Phi_1^+(t) = \prod_{k=1}^{m} (t - z_0)^{\frac{1}{2}} (t - z_0)^{-\frac{1}{2}} G_1(t)\,\Phi_1^-(t) + \prod_{k=1}^{m} (t - a_k)^{\frac{1}{2}} (t - b_k)^{\frac{1}{2}} g_1(t). \qquad (42.14)$$

La función $G_1(t)$ cambia de signo en los puntos a_k, b_k. Por definición, en cada uno de estos puntos cambia de signo uno de los binomios $(t - z_0)^{1/2}$.

Por esta razón se puede poner[1])

$$\prod_{k=1}^{m} (t - z_0)^{\frac{1}{2}} (t - z_0)^{-\frac{1}{2}} G_1(t) = (t - z_0)^m.$$

[1]) Este ejemplo muestra claramente el mecanismo de eliminación de la discontinuidad.

Para abreviar, convengamos en usar en lo sucesivo las siguientes designaciones

$$\prod_{k=1}^{m}(z-a_k)^{\frac{1}{2}}(z-b_k)^{\frac{1}{2}}=R(z),$$

$$\prod_{k=1}^{m}(z-a_k)^{\frac{1}{2}}=R_a(z),\quad \prod_{k=1}^{m}(z-b_k)^{\frac{1}{2}}=R_b(z). \tag{42.15}$$

En este caso, la condición (42.14) tomará la forma

$$\Phi_1^+(t)=(t-z_0)^m\,\Phi_1^-(t)+R(t)\,g_1(t). \tag{42.16}$$

Dado que el índice del problema $\varkappa = m$, entonces, mediante las fórmulas (41.28), encontramos[1])

$$X_1^+(z)=1,\quad X_1^-(z)=(z-z_0)^{-m}.$$

En vista de (41.27), la solución del problema de partida, no acotada en ningún extremo, se determinará por la fórmula

$$\Phi^+(z)=\Phi^-(z)=\Phi(z)=\frac{1}{R(z)}[\Psi(z)+P_m(z)], \tag{42.17}$$

donde

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{R(\tau)\,g(\tau)}{\tau-z}\,d\tau. \tag{42.18}$$

En las aplicaciones nos encontramos frecuentemente con una solución que satisface la condición complementaria

$$\Phi(\infty)=0. \tag{42.19}$$

En este caso en la fórmula (42.17) se debe cambiar $P_m(z)$ por $P_{m-1}(z)$. (Todas las fórmulas ulteriores serán dadas para la solución que satisface la condición (42.19).)

Si en unos de los extremos a_k, b_j exigimos que la solución sea acotada, los exponentes correspondientes γ_k, γ_j' se deben tomar iguales a 1/2. El requisito de acotación en cualquier extremo, como ya se ha indicado en el caso general, disminuye el índice en una unidad.

La solución, acotada en los puntos iniciales a_k y no acotada en los puntos finales b_k, tiene por expresión

$$\Phi(z)=\frac{R_a(z)}{R_b(z)}\,\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{R_b(\tau)}{R_a(\tau)}\,\frac{g(\tau)}{\tau-z}\,d\tau. \tag{42.20}$$

(Aquí, el índice $\varkappa$ es igual a cero.)

---

[1]) Por supuesto, en este caso, como también en todos los casos sucesivos, las funciones $X_1^{\pm}(z)$ pueden ser encontradas de un modo inmediato.

La solución, acotada en todos los extremos, se determina según la fórmula

$$\Phi(z)=\frac{R(z)}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{R(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z}, \qquad (42.21)$$

con la particularidad de que, siendo en este caso $\varkappa=-m$, la solución existe sólo cuando se cumplan m condiciones de resolubilidad

$$\int_L \frac{g(\tau)}{R(\tau)}\tau^{j-1}\,d\tau=0 \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \qquad (42.22)$$

Escribamos, por fin, la solución en el caso más general. Denotemos todos los extremos de una manera uniforme mediante las letras $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{2m}$. Supongamos que en algunos extremos $c_1,\ c_2,\ \ldots\ \ldots,\ c_p$ la solución es acotada, mientras que en los extremos restantes $c_{p+1},\ \ldots,\ c_{2m}$ se admite un infinito integrable. Es fácil ver que los extremos de acotación automática están ausentes en el caso dado. Designaremos

$$R_1(z)=\sqrt{\prod_{k=1}^{p}(z-c_k)},\quad R_2(z)=\sqrt{\prod_{k=p+1}^{2m}(z-c_k)}. \qquad (42.23)$$

El índice es igual a $m-p$, y la solución tendrá por expresión

$$\Phi(z)=\frac{R_1(z)}{R_2(z)}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{R_2(\tau)}{R_1(\tau)}\frac{g(\tau)}{\tau-z}\,d\tau+P_{m-p-1}(z)\right]. \qquad (42.24)$$

Si es que $p\geqslant m$, entonces $P_{m-p-1}\equiv 0$, con la particularidad de que, siendo $p>m$, la solución sólo existe cuando se cumplan las condiciones de resolubilidad

$$\int_L \frac{R_2(\tau)}{R_1(\tau)}g(\tau)\,\tau^{j-1}\,d\tau=0 \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ p-m). \qquad (42.25)$$

42.3. Inversión de la integral de tipo de Cauchy. Examinemos un problema de inversión de la integral de tipo de Cauchy que es de gran importancia en la práctica:

$$\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=f(t). \qquad (42.26)$$

Consideramos que el contorno L es el mismo que en el p. 42.2.

La ecuación (42.26) es un caso particular de las ecuaciones integrales singulares con núcleo de Cauchy cuya teoría para contornos cerrados se ha expuesto en el capítulo III, y para los contornos abiertos la consideraremos en los §§ 47—48. Aquí resolvemos esta ecuación sin basarnos en la teoría general. No obstante, apliquemos el método que sirve de fundamento para esta teoría.

Introduzcamos una función analítica (compárese con el p. 21.1)

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau. \tag{42.27}$$

En virtud de la fórmula de Sojotski (4.10)

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=\Phi^+(t)+\Phi^-(t).$$

Sustituyendo la última ecuación en la (42.26), llegamos al problema de contorno

$$\Phi^+(t)=-\Phi^-(t)-if(t), \tag{42.28}$$

considerado en el punto anterior ($g(t)=-if(t)$), para la condición (42.19).

La solución de la ecuación (42.26) puede obtenerse de la solución del problema de contorno mediante la fórmula de Sojotski (4.9):

$$\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t).$$

1°. LA SOLUCIÓN NO ACOTADA CERCA DE TODOS LOS EXTREMOS. Con el fin de pasar a los valores de contorno en (42.17), determinaremos con mayor precisión las ramas de funciones multiformes que figuran en esta fórmula. A título de $R(t)$ elijamos una rama determinada de esta función. Elijamos $R(z)$, por ejemplo, de una manera tal que, al aproximarse hacia el contorno desde la izquierda, el valor de contorno $R^+(t)$ de esta función coincida con la rama elegida $R(t)$. En este caso se verificará la igualdad

$$R^-(t)=-R^+(t)=-R(t).$$

Tomándolo en consideración, obtendremos según las fórmulas de Sojotski

$$\Phi^+(t)=\frac{1}{R(t)}\left[\frac{1}{2}R(t)\,g(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{R(\tau)\,g(\tau)}{\tau-t}\,d\tau+P_{m-1}(t)\right],$$

$$\Phi^-(t)=-\frac{1}{R(t)}\left[-\frac{1}{2}R(t)\,g(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{R(\tau)\,g(\tau)}{\tau-t}\,d\tau+P_{m-1}(t)\right].$$

De aquí,

$$\varphi(t)=-\frac{1}{R(t)}\frac{1}{\pi}\int_L \frac{R(\tau)\,f(\tau)}{\tau-t}\,d\tau+\frac{P_{m-1}(t)}{R(t)} \tag{42.29}$$

designamos de nuevo ($2P_{m-1}$ por P_{m-1}).

Es fácil ver que el segundo término del miembro derecho en (42.29) representa en sí la solución general de la ecuación homogénea (42.26) ($f(t)\equiv 0$).

Recurriendo a las consideraciones análogas, obtendremos los resultados a seguir.

2° LA SOLUCIÓN ACOTADA EN LOS EXTREMOS a_k Y NO ACOTADA EN LOS EXTREMOS b_k:

$$\varphi(t) = -\frac{R_a(t)}{R_b(t)}\frac{1}{\pi}\int_L \frac{R_b(\tau)}{R_a(\tau)}\frac{f(\tau)}{\tau - t}\,d\tau. \qquad (42.30)$$

3°. LA SOLUCIÓN ACOTADA EN TODOS LOS EXTREMOS

$$\varphi(t) = -R(t)\frac{1}{\pi}\int_L \frac{f(\tau)}{R(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - t}, \qquad (42.31)$$

siempre que el término independiente $f(t)$ satisfaga las condiciones

$$\int_L \frac{f(\tau)}{R(\tau)}\tau^{j-1}\,d\tau = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m). \qquad (42.32)$$

Partiendo de la fórmula (42.24), el lector puede obtener con facilidad las soluciones en el caso general.

Demos a conocer, además, la solución de un caso, muy importante para las aplicaciones prácticas, en que la curva L es un segmento del eje real $a \leqslant t \leqslant b$, representando la función $R(t)$ de un modo tal que se nos enfrenten sólo las magnitudes reales.

1. La solución no acotada en ambos extremos

$$\varphi(t) = -\frac{1}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}\left[\frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{\sqrt{(\tau-a)(b-\tau)}\,f(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + a_0\right]. \qquad (42.29')$$

2. La solución, acotada en el extremo a y no acotada en el extremo b:

$$\varphi(t) = -\sqrt{\frac{t-a}{b-t}}\frac{1}{\pi}\int_a^b \sqrt{\frac{b-\tau}{\tau-a}}\frac{f(\tau)}{\tau - t}\,d\tau. \qquad (42.30')$$

3. La solución acotada en ambos extremos:

$$\varphi(t) = -\sqrt{(t-a)(b-t)}\,\frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{b(\tau)}{\sqrt{(\tau-a)(b-\tau)}}\frac{d\tau}{\tau - t}, \qquad (42.31')$$

a la condición de que

$$\int_a^b \frac{f(\tau)\,d\tau}{\sqrt{(\tau-a)(b-\tau)}} = 0. \qquad (42.32')$$

A la resolución del problema examinado por diferentes procedimientos particulares están dedicadas muchas obras. La bibliografía de estas obras se da en el libro de N. I. Musjelishvili [16].

§ 43. Resolución directa del problema de Riemann

Para el problema de Riemann con coeficientes discontinuos y contorno abierto, además del método expuesto en los párrafos antecedentes que se basa en la reducción del problema al problema resuelto antes, con coeficientes continuos existe otro método que consiste en la aplicación directa del método de resolución del problema con coeficientes continuos. Aquí resulta más conveniente empezar por el caso de un contorno abierto.

43.1. Problema para un contorno abierto. Empecemos por un problema homogéneo

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t). \tag{43.1}$$

Razonando igual que en el p. 14.3, establezcamos[1]) que la función

$$\Phi(z) = e^{\Gamma(z)}, \quad \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z}\,d\tau \tag{43.2}$$

satisface la condición de contorno (43.1) en todos los puntos, a excepción, quizás, de los extremos. Estudiemos el comportamiento de $\Phi(z)$ en los extremos. En virtud de las fórmulas (8.1), (8.2)

$$e^{\Gamma(z)} = (z-a_k)^{-\frac{\ln G(a_k)}{2\pi i}} e^{\Gamma_k(z)} = (z-a_k)^{-\frac{\theta_k}{2\pi}+i\frac{\ln \rho_k}{2\pi}} e^{\Gamma_k(z)}, \tag{43.3}$$

$$e^{\Gamma(z)} = (z-b_k)^{\frac{\ln G(b_k)}{2\pi i}} e^{\Gamma_k^*(z)} = (z-b_k)^{\frac{\theta_k+\Delta_k}{2\pi}-i\frac{\ln \rho_k^*}{2\pi}} e^{\Gamma_k^*(z)}, \tag{43.4}$$

donde $\Gamma_k(z)$ y $\Gamma_k^*(z)$ son las funciones acotadas, respectivamente, en el entorno de los puntos a_k, b_k. Convengamos en tomar el valor del argumento $G(t)$ en los puntos iniciales a_k de conformidad con (42.5) ó (42.6), e introduzcamos unos números enteros $\varkappa_k$, que satisfacen la condición (42.8) ó (42.9). Examinemos la función

$$X(z) = \prod_{k=1}^{m}(z-b_k)^{-\varkappa_k} e^{\Gamma(z)}. \tag{43.5}$$

Es evidente que ésta satisfacerá también la condición de contorno y, al mismo tiempo, pertenecerá en los extremos a la clase dada de soluciones.

Llamaremos $X(z)$ *función canónica del problema.* Puesto que $\Gamma(\infty) = 0$, entonces, evidentemente, el orden de $X(z)$ en el infinito será igual a

$$\varkappa = \sum_{k=1}^{m}\varkappa_k. \tag{43.6}$$

[1]) Consideramos como antes que arg $G(t)$ cambia continuamente en cada uno de los arcos.

El número $\varkappa$ será el índice del problema. La resolución posterior es efectúa de un modo habitual. Representando $G(t) = \frac{X^+(t)}{X^-(t)}$, escribamos la condición de contorno en la forma

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}, \tag{43.7}$$

de donde, para $\varkappa \geqslant 0$,

$$\Phi(z) = X(z) P_\varkappa(z). \tag{43.8}$$

Si se requiere que $\Phi(\infty) = 0$, $P_\varkappa$ se debe sustituir por $P_{\varkappa-1}$. Aplicando un procedimiento habitual, encontramos la solución del problema no homogéneo (para $\Phi(\infty) = 0$):

$$\Phi(z) = X(z)[\Psi(z) + P_{\varkappa-1}(z)], \tag{43.9}$$

donde

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z}. \tag{43.10}$$

con la particularidad de que, para $\varkappa < 0$, deben cumplirse las condiciones de resolubilidad

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \tau^{j-1} d\tau = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, -\varkappa). \tag{43.11}$$

43.2. Problema con coeficientes discontinuos. Al dividir el contorno L en trozos entre los puntos de discontinuidad del coeficiente $G(t)$ y considerando estos trozos como curvas independientes, podemos resolver el problema propuesto como un problema en el contorno abierto. La peculiaridad del problema consiste en lo que los extremos de las curvas[1]) coinciden dos a dos. Señalemos de una forma descriptiva cómo se debe modificar la solución del problema del p. 43.1 para obtener la solución del problema en consideración.

Tomemos un punto de discontinuidad t_1 por el punto inicial y determinemos en éste $\arg G(t_1 + 0) = \theta_1$ mediante la elección de alguna rama determinada. Por medio de la alteración continua se determina $\arg G(t_2 - 0) = \theta_1 + \Delta_1$. La magnitud de $\arg G(t_2 + 0) = \theta_2$ se determina de una manera tal que se verifique

$$-2\pi < \arg G(t_2 - 0) - \arg G(t_2 + 0) < 0, \tag{43.12}$$

[1]) En lo sucesivo el término «*los extremos*» se aplicarán no sólo a los extremos de una curva, sino también a los puntos de discontinuidad.

si se buscan las soluciones no acotadas en el punto t_2, y

$$0 < \arg G(t_2 - 0) - \arg G(t_2 + 0) < 2\pi, \tag{43.13}$$

si se buscan las soluciones acotadas en este punto[1]).

De un modo análogo procedemos en todos los demás puntos de discontinuidad $(t_3, \ldots, t_n)$. En el punto t_1 determinamos un número entero $\varkappa$, que satisface una de las condiciones:

$$-2\pi < \arg G(t_1 - 0) - \arg G(t_1 + 0) - 2\varkappa\pi < 0, \tag{43.14}$$

$$0 < \arg G(t_1 - 0) - \arg G(t_1 + 0) - 2\varkappa\pi < 2\pi, \tag{43.15}$$

lo que depende de la solución que debe ser en las proximidades del punto t_1 no acotada o acotada. El número $\varkappa$ es precisamente el índice del problema. Entonces,

$$X(z) = (z - t_1)^{-\varkappa} e^{\Gamma(z)}, \quad \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z}\, d\tau \tag{43.16}$$

será una función canónica del problema homogéneo.

La solución del problema no homogéneo se da por las fórmulas (43.9) — (43.11).

43.3. Ejemplos. 1. A título del primer ejemplo de la aplicación del método expuesto en el presente párrafo, consideraremos un problema concreto de la mecánica.

Sea el contorno L un segmento del eje real $(0, l)$. Examinemos el problema de contorno

$$\Phi^+(t) = \frac{a - i(a_0 + a_1 t)}{a + i(a_0 + a_1 t)}\, \Phi^-(t) + g(t), \tag{43.17}$$

donde a, a_0, a_1 son ciertas constantes reales prefijadas; $g(t)$ es una función prescrita, que satisface la condición de Hölder. Se busca la solución que se reduce a cero en el infinito.

Como $|G(t)| = 1$, entonces

$$\ln G(t) = 2i \arg [a - i(a_0 + a_1(t)] = -2i \operatorname{arctg} \frac{a_0 + a_2 t}{a} = 2i\theta. \tag{43.18}$$

Los puntos con afijos $a - i(a_0 + a_1 t)$ se expresarán en el lenguaje geométrico por los segmentos de una recta, paralela al eje Oy entre los puntos $\zeta_1 = a - ia_0$ y $\zeta_2 = a - i(a_0 + a_1 l)$; por esto $\Delta = \{\theta\}_L < \pi$.

Tomemos, para concretar, $a > 0$. En total pueden tener lugar cuatro casos:

1) ambos puntos ζ_1, ζ_2 disponen en el cuadrante I;
2) ambos puntos ζ_1, ζ_2 se disponen en el cuadrante IV;
3) ζ_1 se ubica en el cuadrante I; ζ_2, en el cuadrante IV;
4) ζ_1 se ubica en el cuadrante IV; ζ_2, en el cuadrante I.

---

[1]) Se supone que t_2 no es un punto de acotación automática. Si pertenece a la última clase, en el primer miembro de la fórmula (43.13) se debe tomar el signo de igualdad.

Buscaremos, para concretar, la solución, acotada en el origen de coordenadas y no acotada en otro extremo. Analicemos detalladamente el cuarto *caso* (fig. 16).

De acuerdo con (42.5), para $2\theta_1$ hay que tomar una rama que satisface la condición $-2\pi < 2\theta_1 < 0$, y, además, esta desigualdad se define sólo por la clase elegida de soluciones. Entonces, $0 < 2\theta_2 = 2(\theta_1 + \Delta) < 2\pi$. Según la fórmula (42.9)

$$\varkappa = \left[\frac{\theta_1 + \Delta}{\pi}\right] + 1 = 1.$$

La solución canónica del problema será la función

$$X(z) = (z-l)^{-1} e^{\Gamma(z)},$$

$$\Gamma(z) = -\frac{1}{\pi}\int_0^l \frac{\operatorname{arctg}\dfrac{a_0 + a_1\tau}{a}}{\tau - z}\,d\tau, \tag{43.19}$$

y la solución general

$$\Phi(z) = X(z)\,[\Psi(z) + c_0], \tag{43.20}$$

donde $\Psi(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_0^l \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\,\frac{d\tau}{\tau - z}$ y c_0 es una constante arbitraria.

Sin entrar en detalles indiquemos las características fundamentales para los demás casos.

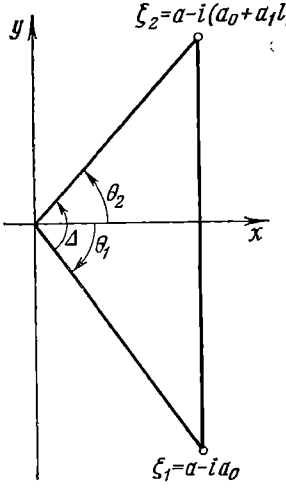


Fig. 16

1r *caso*:

$$-2\pi < 2\theta_2 = 2(\theta_1 + \Delta) < 0, \quad -1 < \frac{\theta_1 + \Delta}{\pi} < 0,$$

$$\varkappa = \left[\frac{\theta_1 + \Delta}{\pi}\right] + 1 = 0.$$

2do *caso*

$$-2\pi < 2\theta_2 = 2(\theta_1 + \Delta) < 0, \quad \varkappa = 0.$$

3r *caso*

$$-4\pi < 2\theta_2 = 2(\theta_1 + \Delta) < -2\pi, \quad \varkappa = -1.$$

En todos estos casos el problema homogéneo es insoluble, y el no homogéneo se resuelve de un modo único, con la particularidad de que lo es en el último caso sólo cuando se cumpla una condición complementaria.

Recomendamos al lector que el mismo investigue las soluciones en las tres restantes clases de funciones.

La solución obtenida la emplearemos en el p. 47.4 al resolver las ecuaciones integrales singulares.

He aquí algunas observaciones respecto de la resolución de los problemas. En la práctica, cuando se necesita llevar la resolución hasta un resultado definitivo, la dificultad principal consiste en el cálculo de las integrales correspondientes. En el sentido teórico (cuando se determina el número de soluciones) la tarea se reduce (el lector pudo convencerse de esto con el ejemplo analizado)

a una elección correcta del valor inicial del argumento (en dependencia de la clase de soluciones requerida), observando que el valor final de éste se obtenga del inicial como resultado de su cambio continuo.

2. Para la mejor asimilación de la técnica de resolución de los problemas examinemos un ejemplo más en el cual los datos están escojidos de modo tal que la solución se exprese en las funciones elementales.

Sea L una circunferencia unitaria, y sean L_1 y L_2 sus semicircunferencias derecha e izquierda, respectivamente. Resolvamos el problema de contorno de Riemann:

$$\Phi^+(t)=G(t)\,\Phi^-(t)+\frac{(t^2+1)(4t+i)}{t^2+a^2}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{it/2}\quad(|a|<1),\qquad(43.21)$$

donde

$$G(t)=\begin{cases} e^{\pi t} & \text{en } L_1,\\ e^{2\pi t} & \text{en } L_2.\end{cases}$$

La función multiforme $\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{it/2}$ está definida mediante cierta rama determinada.

Buscaremos primero la solución en la clase más amplia de funciones que tienen las singularidades integrables en ambos puntos de discontinuidad $\pm i$. Haciendo uso de las fórmulas (43.16), hallemos, en el principio, la función canónica del problema homogéneo:

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\ln G(\tau)}{\tau-z}\,d\tau=\frac{\pi}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{\tau}{\tau-z}\,d\tau+\frac{2\pi}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\frac{\tau}{\tau-z}\,d\tau=$$

$$=\frac{\pi}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\tau}{\tau-z}\,d\tau+\frac{1}{2i}\int\limits_i^{-i}\frac{\tau}{\tau-z}\,d\tau=\frac{1}{2i}\int\limits_L\frac{\tau}{\tau-z}\,d\tau-1+\frac{z}{2i}\ln\frac{z+i}{z-i}.$$

Aplicando a la integral para $z\in D^+$ la fórmula de Cauchy, y para $z\in D^-$ el teorema de Cauchy, obtenemos

$$\Gamma^+(z)=\pi z-1+\frac{z}{2i}\ln\frac{z+i}{z-i},$$

$$\Gamma^-(z)=-1+\frac{z}{2i}\ln\frac{z+i}{z-i}.$$

De aquí

$$X^+(z)=e^{\pi z-1}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{iz/2},$$

$$X^-(z)=e^{-1}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{iz/2}.$$

Por sustitución directa de los valores $\pm i$ resulta fácil comprobar que en estos puntos $X(z)$ se comporta igual que $(z-i)^{-1/2}$, $(z+i)^{-1/2}$, es decir, pertenece a la clase dada. Por consiguiente, no hay necesidad de los factores adicionales $(z\pm i)^{\varkappa}$, esto es, el índice del problema $\varkappa=0$. Para que la función canónica y, a continuación, la propia solución del problema sean plenamente concretas, se debe indicar, además, el método de definición de la función multiforme $\omega(z)=\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{iz/2}$, lo que se reduce a la definición del corte que une los puntos de

ramificación $\pm i$ y a la definición de la rama. Al introducir X en la condición de contorno homogéneo, obtendremos

$$\omega^+(t)=\begin{cases}\omega^-(t) & \text{en } L_1,\\ e^{\pi t}\omega^-(t) & \text{en } L_2.\end{cases}$$

Lo último implica que el corte debe ser trazado a lo largo de la semicircunferencia izquierda L_2, con la particularidad de que el valor de $\omega^-(t)$ por el lado derecho (externo) se obtiene del valor de $\omega^+(t)$ por el izquierdo (interno) multiplicándolo por $e^{-\pi t}$. Si el recorrido se efectúa alrededor de uno de los puntos de ramificación (i, por ejemplo), precisamente en esta circunstancia surge el factor $e^{2\pi i(it/2)}=e^{-\pi t}$. En lo sucesivo, los valores límites en L desde dentro, los designaremos mediante una misma expresión $\omega^+(t)=\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{it/2}$; los mismos deben ser los valores de $\omega^-(t)$ en L_1; en cuanto a los valores de $\omega^-(t)$ en L_2, éstos han de multiplicarse por $e^{-\pi t}$. Las consideraciones expuestas en este punto son de gran importancia en las aplicaciones de los problemas de contorno a la resolución de ecuaciones integrales singulares (véase el p. 48.6).

Elijamos la rama $\omega(z)$ de una manera tal que $\omega^+(t)$ coincida con la función correspondiente que figura en $g(t)$.

Hallemos, ahora, $\Psi(z)$. En vista de la fórmula (43.10), tenemos

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)\,d\tau}{X^+(\tau)(\tau-z)}=\frac{e}{2\pi i}\int_L \frac{(\tau^2+1)(4\tau+i)^{-\pi i}}{\tau^2+a^2}\,\frac{d\tau}{\tau-z}.$$

Haciendo uso del teorema de residuos obtenemos, al terminar los cálculos

$$\Psi^+(z)=e\,\frac{1-a^2}{z^2+a^2}\left[\frac{iz-4a^2}{a}\operatorname{sen}a\pi-(i+4z)\left(\cos a\pi-e^{-\pi z}\,\frac{z^2+1}{1-a^2}\right)\right],$$

$$\Psi^-(z)=e\,\frac{1-a^2}{z^2+a^2}\left[\frac{iz-4a^2}{a}\operatorname{sen}a\pi-(i+4z)\cos a\pi\right].$$

Rigiéndonos por la fórmula (43.9), en la cual debe tomarse $P_\varkappa$ en lugar de $P_{\varkappa-1}$, tendremos en definitiva

$$\begin{aligned}\Phi^+(z)&=\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{iz/2}e^{\pi z-1}[\Psi^+(z)+c],\\ \Phi^-(z)&=e^{-1}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{iz/2}[\Psi^-(z)+c].\end{aligned}\qquad(43.22)$$

Recomendamos al lector que resuelva el problema suponiendo que en el punto i se admite un infinito integrable, y en el plano restante la solución es acotada en todos los puntos.

A título de referencia damos las respuestas:

$$\Phi^+(z)=e^{\pi z}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{iz/2}\frac{z+i}{z^2+a^2}\left[\operatorname{sen}a\pi\left(\frac{z}{a}-4az+3ai\right)+\right.$$
$$\left.+\cos a\pi\,(3iz+4a^2-1)+e^{-\pi z}(4z^2-3iz+1)\right],\qquad(43.23)$$

$$\Phi^-(z)=\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{iz/2}\frac{z+i}{z^2+a^2}\left[\operatorname{sen}a\pi\left(\frac{z}{a}-4az+3ai\right)+\right.$$
$$\left.+\cos a\pi\,(3iz+4a^2-1)\right].$$

43.4. Problema de contorno de Carleman. Continuación. Demos aquí la parte conclusiva de la resolución del problema de contorno de Carleman (18.20). En el punto 18.3 ésta fue reducida a la solución del problema de Riemann

$$\Phi_1^+(w) = G_1(w)\,\Phi_1^-(w) + g_1(w) \tag{18.32}$$

en el contorno abierto L_1 con los extremos $a = \omega^+(A)$, $b = \omega^+(B)$. Aquí, $G_1(w) = G[z^-(w)]$, $g_1(w) = g[z^+(w)]$, A y B son puntos inmóviles de la traslación $\alpha(t)$.

La solución del problema (18.32) conviene buscarla en la clase de funciones, acotadas en los extremos $w = a$, $w = b$ y en el infinito. En efecto, la acotación de la solución $\Phi_1(w) = \Phi^+[z(w)]$ en los entornos de los extremos $w = a$, $w = b$ se infiere de la acotación de $\Phi^+(z)$ en los entornos de los puntos $z = A$, $z = B$, mientras que la acotación en el infinito se deduce de lo que $\Phi_1(\infty) = \Phi^+(z_0)$ es un número finito.

Calculemos el índice $\varkappa_1$ del problema (18.32). Sea

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L.$$

Al proceder igual que en el p. 18.2, de la condición $G(t)\,G[\alpha(t)] \equiv 1$ concluimos que $[\arg G(t)]_{L^+} = [\arg G(t)]_{L^-} = \varkappa\pi$. Por ello, $[\arg G_1(w)]_{L_1} = [\arg G[z^-(w)]]_{L_1} = -[\arg G(t)]_{L^-} = -\varkappa\pi$. (43.24)

De la misma igualdad $G(t)\,G[\alpha(t)] \equiv 1$ proviene que $G(t)$ puede tomar en los puntos $t = A$, $t = B$ solamente los valores $+1$, -1. Los valores iguales adquiere el coeficiente $G_1(w)$ en los extremos $w = a$, $w = b$ del contorno L_1. Consideraremos por separado los casos de $\varkappa$ par e impar.

1) $\varkappa$ es par. De la igualdad

$$\arg G_1(b) - \arg G_1(a) = -\varkappa\pi, \tag{43.24'}$$

que se infiere de (43.24), fluye que o bien $G_1(a) = G_1(b) = 1$, o bien $G_1(a) = G_1(b) = -1$. En el primer caso ambos miembros son los puntos de acotación automática, de suerte que $\varkappa_1 = -\varkappa/2$. En el segundo caso, de acuerdo con la fórmula (42.8), $\varkappa_1 = \left[-\frac{\varkappa+1}{2}\right] = -\frac{\varkappa+2}{2}$.

2) $\varkappa$ es impar. En virtud de (43.24'), o bien $G_1(a) = -G_1(b) = 1$, o bien $G_1(a) = -G_1(b) = -1$. En ambos casos, empleando la fórmula (42.8), encontramos que $\varkappa_1 = \left[-\frac{\varkappa}{2}\right] = -\frac{\varkappa+1}{2}$.

En definitiva, índice del problema se calcula por la fórmula

$$\varkappa = \begin{cases} -\frac{\varkappa}{2}, & \text{si } \varkappa \text{ es par y } G(A) = G(B) = 1, \\ -\frac{\varkappa}{2} - 1, & \text{si } \varkappa \text{ es par y } G(A) = G(B) = -1, \\ -\frac{\varkappa+1}{2}, & \text{si } \varkappa \text{ es impar,} \end{cases}$$

o, que es lo mismo

$$\varkappa_1 = -\frac{\varkappa + m^-}{2},$$

donde m^- implica el número de todos aquellos extremos $w = a$, $w = b$, para los cuales $G_1(w) = -1$. (Evidentemente, m^- puede tomar los valores de 0, 1, 2.)

Teniendo presente que debido a la admisión de soluciones que no se desaparecen en el infinito, su número es una unidad mayor que el índice, llegamos al siguiente teorema.

TEOREMA. *Supóngase que las condiciones* (18.21) *están cumplidas. Si es que* $\varkappa + m^- \leqslant 0$, *el número* l *de soluciones del problema de Carleman homogéneo es igual a* $1 - \frac{\varkappa + m^-}{2}$; *el problema no homogéneo es incondicionalmente resoluble y su solución depende linealmente de* l *constantes arbitrarias. Si* $\varkappa + m^- > 0$, *entonces* $l = 0$, *y para que el problema no homogéneo sea resoluble, es necesario y suficiente que se cumplan* $\frac{\varkappa + m^-}{2} - 1$ *condiciones de resolubilidad.*

Al escribir, según las fórmulas del p. 41.5, la solución general $\Phi_1(w)$ del problema de Riemann, obtendremos la solución general $\Phi(z) = \Phi_1[w(z)]$ del problema de Carleman (18.20).

OBSERVACIÓN. Se pueden buscar las soluciones del problema (18.32), que no sean acotadas en el entorno de aquellos extremos, donde $G_1(w) = -1$. El orden de singularidad en tales extremos es igual a 1/2. Volviendo al problema de Carleman (18.20), obtendríamos la solución $\varphi^+(z)$ que en los puntos inmóviles de la traslación (en uno de ellos o en ambos) tenga una singularidad polar de primer orden. La admisión de tales soluciones, que no son integrables en el entorno de los puntos inmóviles, aumenta el índice del problema en m^-, hasta la magnitud $\varkappa_1 + m^- = -\frac{\varkappa - m^-}{2}$ (compárese con los razonamientos del p. 46.4).

43.5. Observaciones conclusivas. Haciendo uso de los métodos del § 16, podemos encontrar sin dificultades algunas la solución para un caso en que el contorno consta de cualquier número de curvas cerradas o abiertas, privadas de los puntos de intersección, en cada una de las cuales se tienen cualquier número finito de los puntos de discontinuidad de primera especie. No obstante, aquí no analizaremos este caso, puesto que en el párrafo siguiente daremos a conocer,

modificando algo el método, la solución de problemas para el caso aun más general, cuando se admiten los puntos múltiples del contorno.

Hagamos una simple observación con motivo de las generalizaciones eventuales de la solución expuesta en los §§ 42, 43.

Como es bien sabido al lector, la solución general de un problema no homogéneo representa una suma de la solución particular del problema no homogéneo y la solución general del problema homogéneo, con la particularidad de que, si se elige otra solución particular, cambian de un modo determinado las constantes que figuran en la solución general. Al construir la solución general del problema no homogéneo, ambas partes que la constituyen se han tomado de una misma clase, de cuya expresión era el hecho de que en la solución particular del problema no homogéneo figuraba la misma función canónica que estaba contenido en la solución del problema homogéneo:

$$\Phi(z)=X(z)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z}+X(z)P_\varkappa(z).$$

Al hacer uso de la arbitrariedad de la solución particular, podemos, buscando la solución general en alguna clase de funciones, tomar la solución particular del problema no homogéneo en otra clase cualquiera más estrecha.

Por ejemplo, la solución general del problema del p. 42.2, perteneciente a la clase más amplia de funciones, no acotadas en ningún extremo, podemos tomarla en la forma

$$\Phi(z)=\frac{R_a(z)}{R_b(z)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{R_b(\tau)}{R_a(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z}+\frac{P_{m-1}(z)}{R(z)}$$

(la solución particular aquí se ha tomado en la clase de funciones, actotadas en los extremos a_k). Del modo correspondiente cambiará la fórmula de inversión de una integral singular (p. 42.3).

Daremos, en conclusión, la evaluación relativa de los méritos que ostentan los dos métodos expuestos en los §§ 41-43.

Cuando se resuelven problemas concretos, los dos métodos son equivalentes y debe emplearse aquel método que se domina mejor. Realizándose los razonamientos teóricos generales referentes a los problemas examinados, el segundo método (§ 43) resulta ser más conveniente, puesto que en este caso las fórmulas sólo contienen las magnitudes dadas y son, por esta razón, más simples en comparación con las fórmulas correspondientes del § 42. Sin embargo, el primer método lleva ventaja ante el segundo en aquel sentido que no está relacionado con la presencia de la solución en forma cerrada, por lo cual puede ser aplicado también en los casos en que tal solución no está conocida, por ejemplo, en los problemas generalizados (véase el problema 15 al final del capítulo) y también en el caso de muchas funciones incógnitas.

§ 44. Problemas de Riemann para un contorno complejo. Casos excepcionales

44.1. Planteamiento del problema. Supongamos que el contorno L consta de un número finito de curvas simples suaves, cerradas o abiertas, dispuestas en el plano de una manera cualquiera. Las curvas pueden tener cualquier número finito de puntos de intersección o de tangencia y cualquier número de ellas pueden disponerse una dentro de la otra. Con tal amplia concepción del contorno éste puede dejar de dividir el plano en los dominios D^+ y

D^-, por lo cual el problema de Riemann necesita nueva enunciación. Generalicemos previamente la definición dada en el § 1 y convengamos en llamar *analítica a trozos* a una función, analítica en toda parte conexa del plano privada de puntos del contorno. En los puntos del contorno existen valores límites continuos a la izquierda y a la derecha[1]), a excepción de cierto número finito de puntos de los «extremos», en los cuales los valores límites o bien se reducen al infinito de orden integrable, o bien, quedando acotados, dependen de la vía de aproximación al punto. Por extremos del contorno siempre entenderemos los extremos de las curvas abiertas, los puntos de discontinuidad de coeficientes y también los puntos múltiples o de tangencia del contorno (véase la observación al punto 43.2).

El problema de contorno de Riemann puede ser enunciado así:

Hállese la función analítica a trozos $\Phi(z)$ *que en el contorno* L *satisfaga la condición de contorno*

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t), \tag{44.1}$$

donde $G(t)$, $g(t)$ *son las funciones que satisfacen la condición de Hölder en todos los puntos, salvo un número finito de puntos en los cuales ellas pueden tener discontinuidades de primera especie*[2]). *Además de esto,* $G(t) \neq 0$.

Cuando se trata del cumplimiento de la condición de frontera, los extremos y puntos de intersección se excluyen.

El problema enunciado, que a primera vista parece ser muy complejo (los primeros métodos de su resolución eran realmente bastante complejos), puede resolverse de una manera relativamente sencilla, siempre que, al emplear los resultados de resolver el problema con coeficientes discontinuos, introducimos una pequeña modificación en la resolución del problema para el caso de una curva cerrada y coeficientes continuos. Pasemos a la exposición de esta modificación.

44.2. Nuevo método de resolución del problema de Riemann para una curva cerrada. Supóngase que el contorno consta de una curva cerrada y que $G(t)$ es una función continua. Apliquemos a la resolución del problema de Riemann el método, por cuyo intermedio se ha resuelto en el p. 43.1 este mismo problema para un contorno abierto.

Elijamos en el contorno cierto punto t_1, considerándolo como punto inicial del mismo. El contorno cerrado lo tomemos por el caso especial de un contorno abierto cuyos ambos extremos coinciden. Examinemos la función $e^{\Gamma(z)}$, donde

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z}\,d\tau. \tag{44.2}$$

[1]) Se supone que a todas las curvas se las asigna cierta dirección.

[2]) La clase de $g(t)$ puede ser ampliada (véase el final del p. 41.5).

Si $\varkappa = \operatorname{Ind} G(t) \neq 0$, entonces la función $\ln G(t)$ sufrirá en el punto t_1 una discontinuidad, con la particularidad de que en este punto se verificará la desigualdad

$$\ln G(t_1 - 0) - \ln G(t_1 + 0) = 2\pi i\varkappa. \tag{44.3}$$

De acuerdo con la fórmula (8.3), en las proximidades del punto t_1 tendremos

$$\Gamma(z) = \varkappa \ln(z - t_1) + \Gamma_0(z), \tag{44.4}$$

donde $\Gamma_0(z)$ es una función acotada la cual, al aproximarse hacia el punto t_1, tiende a cierto límite. De aquí

$$e^{\Gamma(z)} = (z - t_1)^{\varkappa} e^{\Gamma_0(z)}. \tag{44.5}$$

Por función canónica entenderemos lo mismo que en el p. 14.3. Entonces, como no es difícil comprobar, de función canónica del problema de Riemann en consideración servirá la función

$$X(z) = (z - t_1)^{-\varkappa} e^{\Gamma(z)}. \tag{44.6}$$

Si $G(t)$ tiene los puntos de discontinuidad, entonces, al elegir a título de t_1 el primer punto de discontinuidad y proceder igual que en el p. 43.2, llegamos a que la fórmula (44.6), también en este caso, proporciona la solución canónica.

A base de la función canónica construida la solución general de los problemas homogéneo y no homogéneo puede ser obtenida del modo habitual (los pp. 14.4, 14.5, 43.1) y no hay necesidad de exponerlo aquí.

44.3. Caso general. Pasemos al caso general enunciado en el p. 44.1, al hacer previamente una suposición que simplifica la tarea y que consiste en lo que todo punto puede servir de extremo a lo sumo de un punto de la curva del contorno. Comenzaremos por la cuestión principal, esto es, por la construcción de la función canónica.

DEFINICIÓN. Se denomina *función canónica del problema de Riemann* a una función analítica a trozos $X(z)$, que satisface la condición de contorno homogénea

$$X^+(t) = G(t)\, X^-(t)$$

y posee las siguientes propiedades:

1. Tiene el orden nulo en todos los puntos de la parte finita del plano a excepción, quizás, de los extremos[1]).

2. Pertenece cerca de los extremos a la clase dada (es acotada o se reduce al infinito de orden integrable).

3. Tiene en el infinito el orden máximo posible (igual al índice del problema en la clase dada).

[1]) Recordamos que entre los «extremos» se encuentran también los puntos de discontinuidad (véase el p. 43.2).

Construyamos la función canónica para cada una de las curvas simples L_k ($k = 1, 2, \ldots, m$) que componen el contorno L. Vamos a observar en esta operación las reglas siguientes.

1°. Si L_k es un contorno abierto, la función canónica para él se construirá según las fórmulas del p. 43.1, es decir,

$$X_k(z) = (z - b_k)^{-\varkappa_k} e^{\Gamma_k(z)}, \qquad \Gamma_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z}\, d\tau. \tag{44.7}$$

2°. Si L_j es un contorno cerrado, elijamos en calidad de punto inicial cierto punto b_j, el cual es uno de los puntos de discontinuidad, siempre que tales puntos se tienen en el contorno L_j, y puede ser un punto cualquiera, si $G(t)$ es continua en L_j. La función canónica para el contorno L_j se construirá de acuerdo con las reglas del p. 43.2 ó del p. 44.2, lo que lleva a las fórmulas

$$X_j(z) = (z - b_j)^{-\varkappa_j} e^{\Gamma_j(z)}, \qquad \Gamma_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_j} \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z}\, d\tau; \tag{44.8}$$

$\varkappa_k$ y $\varkappa_j$ en las fórmulas (44.7) y (44.8) son los índices del coeficiente $G(t)$ a lo largo de las curvas L_k, L_j en la clase dada de funciones.

La magnitud

$$\varkappa = \sum_{k=1}^{m} \varkappa_k \tag{44.9}$$

se llamará *índice del problema de Riemann para un contorno complejo en la clase dada.*

Demostremos que la función canónica del problema de Riemann para todo el contorno complejo $L = L_1 + L_2 + \ldots + L_m$ es un producto de funciones canónicas para todos los contornos simples que lo componen

$$X(z) = \prod_{k=1}^{m} X_k(z). \tag{44.10}$$

Empezaremos por la demostración de lo que la última función satisface la condición de contorno. Sea t un punto de cierta curva L_j, distinto de los extremos y puntos de intersección de las curvas L_k. Sustituyendo en la condición de contorno la función (44.10) y tomando en consideración que, para todo $k \neq j$, $X_k^+(t) = X_k^-(t)$, después de la reducción llegaremos a la igualdad

$$X_j^+(t) = G(t)\, X_j^-(t),$$

que se satisface idénticamente de conformidad con la definición de función canónica $X_j(z)$.

La propiedad 1 de la solución canónica se observa en virtud de las fórmulas (44.7), (44.8). La propiedad 2 se observa en vista de que, por definición, todas las funciones canónicas para curvas simples pertenecen a la clase dada.

Para confirmar la propiedad 3 caclulemos el orden de $X(z)$ en el infinito.

Al introducir en la fórmula (44.10) las expresiones (44.7), (44.8), y teniendo en cuenta que $\Gamma_j(\infty) = 0$ para cualquier curva L_j (cerrada y abierta), llegamos a que el desarrollo en el entorno de un punto infinitamente alejado tendrá a título del término inicial $\left(\frac{1}{z}\right)^{\varkappa}$. Con esto la demostración se da por terminado.

Por razonamientos análogos a los aplicados al final del p. 41.1, resulta fácil establecer que la función canónica se define salvo el factor constante.

Al normalizar la función canónica mediante la condición

$$\lim_{z\to\infty} z^{\varkappa} X(z) = 1,$$

la fórmula (44.10) la definirá de un modo único.

Tomando en consideración las fórmulas (44.7), (44.8), (44.10), la función canónica puede ser representada en la forma

$$\begin{aligned} X(z) &= \prod_{j=1}^{m} (z-b_j)^{-\varkappa_j} e^{\Gamma(z)}, \\ \Gamma(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z}\, d\tau, \end{aligned} \tag{44.11}$$

donde b_j es el punto final de la curva, si ésta está abierta, y el punto tomado convencionalmente por el origen (y el fin) del contorno, si la curva está cerrada. Aquí, a título del punto excepcional, donde el orden de la función canónica es nulo, se ha tomado un punto infinitamente alejado. Si, por algunas consideraciones, el papel de tal punto debe desempeñarlo cierto punto finito z_0, la función canónica, en este caso, debe multiplicarse por el binomio $(z - z_0)^{\varkappa}$.

Construida la función canónica, la solución general de los problemas homogéneo y no homogéneo en la clase dada ya se encuentra por un método aplicado anteriormente varias veces. Representando el coeficiente del problema de Riemann como una razón de funciones canónicas

$$G(t) = \frac{X^+(t)}{X^-(t)}$$

y reduciendo la condición de contorno a la forma

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^-(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} = \frac{g(t)}{X^+(t)},$$

llegaremos al problema en que se determina la función analítica a trozos por un salto dado a condición de que la función buscada $\frac{\Phi(z)}{X(z)}$ tiene en el infinito el orden $-\varkappa$. De aquí, aplicando unos razonamientos habituales, obtendremos la solución general

$$\Phi(z) = X(z)\,[\Psi(z) + P_\varkappa(z)], \tag{44.12}$$

donde

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\,\frac{d\tau}{\tau - z}, \tag{44.13}$$

y $P_\varkappa(z)$ es un polinomio de grado $\varkappa$. Cuando $\varkappa < 0$, se deben escribir $-\varkappa - 1$ condiciones de resolubilidad

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\,\tau^{j-1}\,d\tau = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, -\varkappa - 1) \tag{44.14}$$

y, si se observan, poner $P_\varkappa \equiv 0$.

Los resultados se representan en la misma forma que en los casos particulares considerados antes (pp. 14.5, 16.2, 43.1).

44.4. Caso de coincidencia de los extremos. Investiguemos brevemente las peculiaridades del caso omitido antes cuando en un punto convergen más de un extremo de las curvas simples. Según proviene de la fórmula (44.10), el orden de la función canónica $X(z)$ para un contorno complejo es igual a la suma de órdenes de las soluciones canónicas de $X_k(z)$ para los contornos simples que lo componen. De este modo, si en el punto dado t_0 se encuentran unos cuantos extremos, entonces el orden de la función canónica en t_0 es igual a la suma de órdenes de las funciones canónicas para cada curva simple cuyo extremo se ubica en el punto dado. De aquí se deduce que los órdenes de las últimas funciones canónicas en el punto t_0 no pueden elegirse de una manera arbitraria, sino que deben ser tales que el orden sumario de las mismas en el punto t_0 defina una función canónica perteneciente a la clase prescrita en este punto. Además, se debe observar el requisito general acerca del orden máximo en el infinito[1]). Las condiciones indicadas permiten aun cierta arbitrariedad en la elección de funciones canónicas para los contornos simples, cuyos extremos se ubican en el punto t_0; no obstante, esta arbitrariedad no ejerce ninguna influencia en la forma de la función canónica para todo el contorno.

[1]) Lo último no permite hacer el orden del cero en el punto final superior al orden mínimo posible.

Aclaremos con un ejemplo lo que acabamos de decir.

Supongamos que en el punto dado t_0 se encuentran tres extremos enumerados con los números 1, 2, 3 y para estos extremos se verifica

$$e^{\Gamma_1(z)} = (z-t_0)^{1/3} e^{\Gamma_1^*(z)}, \quad e^{\Gamma_2(z} = (z-t_0)^{2/3} e^{\Gamma_2^*(z)},$$
$$e^{\Gamma_3(z)} = (z-t_0)^{3/2} e^{\Gamma_3^*(z)},$$

donde $\Gamma_k^*(z)$ son las funciones acotadas en el entorno del punto t_0. Admitamos, para concretar, que la función canónica buscada ha de ser acotada en el punto t_0.

Es fácil ver que para los exponentes $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ son posibles tres combinaciones:

$$(0,\ 0,\ -2), \quad (0,\ -1,\ -1), \quad (-1,\ 0,\ -1).$$

Prescindiendo de todos los demás factores eventuales, obtendremos, para las funciones canónicas X_1, X_2, X_3, las siguientes expresiones admisibles:

$$(e^{\Gamma_1(z)}, \quad e^{\Gamma_2(z)}, \quad (z-t_0)^{-2} e^{\Gamma_3(z)}),$$
$$(e^{\Gamma_1(z)}, \quad (z-t_0)^{-1} e^{\Gamma_2(z)}, \quad (z-t_0)^{-1} e^{\Gamma_3(z)}),$$
$$((z-t_0)^{-1} e^{\Gamma_1(z)}, \quad e^{\Gamma_2(z)}, \quad (z-t_0)^{-1} e^{\Gamma_3(z)}).$$

Para la función canónica $X(z)$ obtendremos en todos los tres casos una misma expresión:

$$(z-t_0)^{-2} e^{\Gamma_1(z)+\Gamma_2(z)+\Gamma_3(z)}.$$

44.5. Puntos excepcionales en los extremos del contorno. Consideraremos esquemáticamente el caso en que el punto excepcional, donde el coeficiente del problema de Riemann se reduce a cero o al infinito, está representado por un punto terminal del contorno. Sea

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t), \quad G(t) = (t-a)^r G_1(t), \tag{44.15}$$

donde r es cualquier número real. Para concretar, convengamos en que a es el punto inicial del contorno y que (para simplificar las anotaciones) otros puntos excepcionales no existen.

La solución, según las fórmulas (43.2), tiene por expresión

$$\Phi(z) = e^{\Gamma(z)}, \quad \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z}\,d\tau,$$

$$\Gamma(z) = \frac{r}{2\pi i}\int_L \frac{\ln(\tau-a)}{\tau-z}\,d\tau + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln G_1(\tau)}{\tau-z}\,d\tau.$$

Nuestra tarea consiste en la investigación del comportamiento de la solución en el punto excepcional a. Haciendo uso de las fórmulas (8.25) y (8.10), tendremos

$$\Gamma(z) = -\frac{r}{4\pi i}\ln^2(z-a) + \left[\frac{r}{2} - \frac{\ln G_1(a)}{2\pi i}\right]\ln(z-a) + \Gamma^*(z), \tag{44.16}$$

donde $\Gamma^*(z)$ está acotada cerca de a y tiene en este punto un límite determinado. Denotemos

$$\theta(z) = \arg(z-a), \quad \alpha + i\beta = -\frac{\ln G_1(a)}{2\pi i}.$$

Al realizar simples transformaciones, tendremos

$$\ln^2(z-a) = \ln^2|z-a| + \theta^2 + 2i\theta \ln(z-a).$$

Introduciendo la última expresión en (44.16), obtenemos

$$\Gamma(z) = \left[-\frac{r}{2\pi}\theta(z) + \frac{1}{2}r + \alpha\right]\ln(z-a) - \beta\theta + i\frac{r}{4\pi}[\ln|z-a| + \theta^2(z)] + \Gamma^*(z).$$

De aquí

$$\Phi(z) = (z-a)^{\psi(z)}\Phi^*(z),$$

donde

$$\psi(z) = -\frac{r}{2\pi}\theta(z) + \frac{1}{2}r + \alpha,$$

y $\Phi^*(z)$ es un función acotada en el entorno de a.

Al deducir las fórmulas (8.25) y (8.1), considerábamos que L es un corte para $\ln(z-a)$ y $\theta^+ = \theta$, $\theta^- = \theta - 2\pi$; por esta razón, para todos los t en el contorno, incluido $t = a$, tendremos

$$\psi^+(z) - \psi^-(z) = r.$$

Si z recorre el punto a en el sentido positivo, entonces, para $r > 0$, la función $\psi(z)$ descrece de una manera monótona, y para $r < 0$ crece de la misma manera. Por consiguiente, en el punto a la solución está privada de orden determinado. Este orden dependerá de la vía de aproximación hacia el punto a; será constante en cada rayo que parte de a. Este fenómeno constituye una peculiaridad más distinguida del caso en consideración.

En lo que se refiere al problema no homogéneo, indiquemos lo siguiente. La expresión $\frac{g(t)}{X^+(t)}$, que figura en su solución (43.10), tendrá en el punto a un orden variable; por ello, para que el problema sea resoluble, es menester exigir que $g(t) = (t-a)^s g_1(t)$, donde $r - s \leqslant 0$ para las soluciones acotadas en a y $r - s < 1$ para las soluciones no acotadas. Los resultados se han tomado de la obra de I. M. Mélnik 2)*.

En la obra 3) este autor ofreció, a base de la investigación de una integral de tipo de Cauchy $\int_L \frac{\ln\ln(\tau-a)}{\tau-z}\,d\tau$, una solución del problema de contorno para el caso en que

$$G(t) = \prod (t-c_k)^{r_k} \ln^{s_k}(t-c_k)\, G_1(t).$$

En este caso los puntos c_k pueden ser tanto los extremos del contorno como los puntos de discontinuidad, donde uno de los valores límites se reduce a cero. El carácter de los resultados queda el mismo que en el caso recién considerado.

§ 45. Problema de contorno de Hilbert para una función analítica a trozos [1]

Para los problemas de contorno de Hilbert y de Riemann sirve de generalización natural el problema en que en una parte del contorno se define la condición de contorno de tipo del problema de Hilbert, y en la otra parte, de tipo del problema de Riemann. Enunciaremos un problema de este género que ha recibido el nombre de *problema de contorno de Hilbert para una función analítica a trozos.*

45.1. Planteamiento del problema. Sea L una curva cerrada suave simple que limita el dominio D. En el último se dispone el contorno l, compuesto por un número finito de curvas suaves a trozos, cerradas o abiertas, que pueden ser separadas o tener cualquier número finito de puntos de intersección. Hállese una función $\Phi(z)$, analítica a trozos en D (véase el p. 44.1) que satisfaga en el contorno la condición de contorno:

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\Phi(t)}{a+ib}\right] = c(s) \text{ en } L, \tag{H}$$

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t) \text{ en } l. \tag{R}$$

Los coeficientes de las condiciones de contorno se toman en las mismas clases, en las cuales se resolvía el problema de Hilbert en el § 29 y el de Riemann en el § 44, es decir, consideramos que $a + ib$ satisface la condición de Hölder y que $a^2 + b^2 \neq 0$. Las funciones G, g satisfacen la condición de Hölder en todos los puntos, a excepción de algunos puntos, donde ellas pueden tener discontinuidades de primera especie. Además, $g(t)$ puede reducirse en ciertos puntos al infinito de orden integrable.

La resolución del problema de contorno en consideración se efectúa por combinación de los métodos que se usan para la resolución de los problemas de Hilbert y de Riemann. Hemos de notar algunas peculiaridades del planteamiento del problema.

1. La condición de contorno (H) debe satisfacerlo no una función analítica, sino una función de la clase más amplia, esto es, una función analítica a trozos con la línea de saltos l.

2. La función analítica a trozos, que satisface la condición de contorno (R), está definida no en todo el plano, sino solamente en el dominio D.

Las peculiaridades citadas en el planteamiento del problema permiten introducir en la solución, a título de factores, ciertas

[1]) El contenido de este párrafo está expuesto a base de la obra de I. S. Rogózhina 1)*. Los casos más generales: en la clase de funciones analíticas generalizadas (véase el p. 39.2) y en la clase de funciones analíticas en las superficies de Riemann (véase el p. 53.1) han sido considerados, respectivamente, por G. S. Barjin, Z. D. Usmanov 1)* y por A. I. Serbin 3).*

funciones analíticas. Siendo habitual el planteamiento del problema, estos factores se degeneran en unas constantes triviales; en cambio en el caso dado, siguen siendo funciones y la elección adecuada de ellos presta la oportunidad de satisfacer simultáneamente ambas condiciones de contorno.

Acabados los razonamientos previos, pasemos a la búsqueda de la solución.

45.2. Búsqueda de la solución. Empezaremos la investigación por un problema más simple, en que ambos coeficientes, $a + ib$ y G, son iguales a la unidad:

$$\operatorname{Re}[\Phi(t)] = c(s), \tag{H'}$$

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t). \tag{R'}$$

La condición de contorno (R') del problema de salto la satisface una integral de tipo de Cauchy

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{g(\tau)}{\tau - z}\,d\tau. \tag{45.1}$$

Si la última sumamos, a título de sumando, una función arbitraria $\Phi_2(z)$, analítica en D, entonces

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z) \tag{45.2}$$

satisfará, como antes, la condición de contorno (R'). Elijamos, ahora, $\Phi_2(z)$ de una manera tal que se satisfaga también la condición de contorno (H'). Sustituyendo (45.2) en (H'), obtendremos, para determinar $\Phi_2(z)$, la condición de contorno del problema de Schwarz

$$\operatorname{Re}[\Phi_2(t)] = c(s) - \operatorname{Re}[\Phi_1(t)] \tag{45.3}$$

cuyo nuevo miembro derecho $c(s) - \operatorname{Re}[\Phi_1(t)]$ está conocido. Resolviéndolo (p. 27.2) y sustituyendo la solución en (45.2), obtendremos la solución del problema (H'), (R'). Esta contendrá una constante arbitraria puramente imaginaria. Ha de ser notado ahora mismo que si para la función $\Phi_2(z)$ se admitiera en cierto punto un polo, el problema (45.3) representaría en sí el problema A (p. 27.3 y su solución general contendría, a título de sumando, la solución del problema A_0 (fórmula 27.8).

Procedamos al problema general (H), (R). La teoría de los problemas de contorno de Hilbert y de Riemann permite reducir las condiciones de contorno (H), (R) a la forma (H'), (R'). Para el problema de Hilbert esto se hace mediante la división por un factor de regularización (p. 29.1); para el de Riemann, mediante la representación del coeficiente G en forma de una razón entre los valores de contorno de la función canónica $G(t) = X^+(t)/X^-(t)$ (p. 44.3). Mas, finalizadas estas operaciones, en las condiciones de contorno

figurará la función buscada con diferentes factores analíticas. Para igualarlos, hagamos uso de la peculiaridad del planteamiento del problema que permite introducir en la solución unos factores analíticos.

Designaremos $\varkappa_H = \mathrm{Ind}_L\,(a + ib)$, $\varkappa_R$, índice por l del problema (R) en cierta clase elegida de soluciones. Escojamos, en calidad de un punto excepcional (donde se admite el orden no nulo), cierto punto z_0, subordinado a la única restricción de disponerse en el dominio en que esté definida $X^+(z)$[1]).

Al dividir la condición de contorno (H) por $p(s)$, que es el factor de regularización de la función $a + ib$ (fórmula (28.10), y al suponer en (R) que $G = X^+/X^-$, obtendremos

$$\mathrm{Re}\left[\frac{\Phi(t)}{(t-z_0)^{\varkappa_H} e^{i\gamma(t)}}\right] = \frac{c(s)}{p(s)}, \qquad (H'')$$

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} = \frac{g(t)}{X^+(t)}. \qquad (R'')$$

Al igualar las funciones buscadas en (H''), (R''), el factor $(t - z_0)^{-\varkappa_H} e^{-i\gamma(t)}$ se le puede introducir directamente en la condición de contorno (R''), pero la función $1/X^+(t)$ puede ser introducida en el interior de la condición de contorno (H''), por lo visto, cuando, y sólo cuando, $X(z)$ tome en el contorno L unos valores puramente reales. Así pues, hemos de resolver previamente tal problema auxiliar:

Hállese la función $X(z)$ *que en el dominio* D *posee todas las propiedades de la función canónica del problema* (R) (*véase* el p. 44.3) *y satisface la condición complementaria*

$$\mathrm{Im}\, X(t) = 0 \quad \text{en } L. \qquad (45.4)$$

Sea $Z(z)$ la función canónica del problema de contorno de Riemann ordinario (con la condición de contorno (R)), definida mediante la fórmula (44.11). Buscaremos la función $X(z)$ en forma de un producto de $Z(z)$ por cierta función arbitraria que sea analítica en D y no se reduzca allá a cero. Representemos la última en la forma $e^{i\psi(z)}$.

Así pues,

$$X(z) = Z(z)\, e^{i\psi(z)} \qquad (45.5)$$

Elijamos, ahora, $\psi(z)$ de una manera tal que se cumpla la condición (45.4). Tenemos

$$\mathrm{Im}\,[Z(t)\, e^{i\psi(t)}] = 0.$$

---

[1]) Recordemos que tal dominio se ubica a la izquierda del contorno l, cuando éste se recorre en el sentido positivo.

Para que la última igualdad se satisfaga, es suficiente (aunque no es necesario) que sea

$$\arg [Z(t) e^{i\psi(t)}] = 0.$$

Lo último implica que $\operatorname{Im} \ln [Z(t) e^{i\psi(t)}] = 0$, es decir,

$$\operatorname{Re}\psi(t) = -\operatorname{Im} \ln Z(t) \quad \text{en } L.$$

Hemos obtenido el problema de Schwarz para determinar $\psi(z)$. Escojiendo de modo correspondiente una constante arbitraria puramente imaginaria que está contenida en la solución, hallaremos la solución del problema bien determinada. Como consecuencia, las condiciones de contorno (H), (R) se convertirán en

$$\operatorname{Re}\left[\frac{e^{-i\gamma(t)}\Phi(t)}{(t-z_0)^{\varkappa_H} X^+(t)}\right] = \frac{c(s)}{p(s) X^+(t)} \text{ en } L, \qquad (H''')$$

$$\frac{e^{-i\gamma(t)}\Phi^+(t)}{(t-z_0)^{\varkappa_H} X^+(t)} - \frac{e^{-i\gamma(t)}\Phi^-(t)}{(t-z_0)^{\varkappa_H} X^-(t)} = \frac{e^{-i\gamma(t)} g(t)}{(t-z_0)^{\varkappa_H} X^+(t)} \text{ en } l. \qquad (R''')$$

El problema de contorno obtenido es el problema (H'), (R'), resuelto al comienzo de este punto, con la única condición adicional de que la función buscada $\dfrac{e^{-i\gamma(z)}\Phi(z)}{(z-z_0)^{\varkappa_H} X^+(z)}$ debe poseer en el punto excepcional z_0 el orden no inferior que $\varkappa_H + \varkappa_R$.

45.3. Investigación de la resolubilidad. El problema (H'''), (R''') está relacionado con el problema de partida (H), (R) por una cadena de operaciones uniformes y unívocamente inversibles, a causa de lo cual la investigación de resolubilidad del problema de partida es equivalente a la investigación de resolubilidad del problema (H'''), (R''').

1) $\varkappa = \varkappa_H + \varkappa \geqslant 0$.

En este caso el problema (H''') es problema A. Sea $w(z)$ una función que aplica conformemente el dominio D sobre un círculo unitario y convierte el punto excepcional z_0 en el origen de coordenadas. Entonces, de acuerdo con la expresión (27.6),

$$Q(z) = i\beta_0 + \sum_{k=0}^{\varkappa} \{c_k [w(s)]^k - \bar{c}_k [w(z)]^{-k}\}$$

será la solución del problema A_0 para el dominio D.

Supongamos que

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{e^{-i\gamma(\tau)} g(\tau)}{(\tau-z_0)^{\varkappa_H} X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} \qquad (45.6)$$

es una solución particular del problema de salto (R″), S es el operador de Schwarz para el dominio D y

$$\Psi(z) = S\left(\frac{c}{pX^+} - \operatorname{Re}\Phi_1\right). \tag{45.7}$$

Recurriendo a los razonamientos del p. 45.2, obtendremos la solución del problema considerado en la forma

$$\Phi(z) = (z - z_0)^{\varkappa} X(z) e^{i\gamma(z)} [\Phi_1(z) + \Psi(z) + Q_{\varkappa}(z)]. \tag{45.8}$$

Puesto que esta solución contiene, en calidad de sumando, la solución general del problema homogéneo (H″), será, evidentemente, solución general del problema (H″). El problema (R″) admite mayor arbitrariedad en la solución, a saber: en el problema figura un polinomio arbitrario de grado $\varkappa$ respecto de $1/(z - z_0)$. No obstante, el requisito de satisfacción simultánea de la condición (H″) dicta que el coeficiente en el grado nulo del polinomio ha de ser puramente imaginario. De aquí se infiere que la solución (45.8) es la más general también para la condición de contorno (R″). De este modo, la solución del problema contiene $2\varkappa + 1$ constantes reales arbitrarias.

2) $\varkappa < 0$.

En este caso se debe poner $Q(z) \equiv 0$ y exigir que la función $\Phi_1(z) + \Psi(z)$ tenga en el punto z_0 un cero de orden $|\varkappa|$. Esto nos dará $|\varkappa|$ condiciones de resolubilidad complejas. En el caso en que se conoce la expresión explícita del operador de Schwarz para el dominio D (en particular, para un círculo), las condiciones de resolubilidad se escriben en la forma explícita. No nos detenemos en los detalles.

Al combinar los métodos expuestos aquí con los del § 17, se puede dar la solución completa de un problema análogo, cuando la condición de contorno del problema de Riemann se sustituye por las condiciones del problema con traslación.

§ 46. Problema de contorno de Hilbert con coeficientes discontinuos

Consideraremos el problema de Hilbert (p. 27.1), admitiendo que en la condición de contorno

$$a(s)\, u(s) + b(s)\, v(s) = c(s) \tag{46.1}$$

las funciones $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ pueden sufrir discontinuidades de 1ra especie en un número finito de puntos del contorno.

Para la resolución de este problema se prevén diferentes métodos. Podríamos, por ejemplo, generalizar la solución del problema de Hilbert, obtenida en el cap. IV, para el caso de coeficientes discontinuos. La propia generalización puede ser efectuada me-

diante dos procedimientos, por analogía con lo que se hizo para el problema de Riemann (§§ 41, 43) (véanse los problemas 7, 8 al final del capítulo). El segundo método consiste en el empleo de la posibilidad (establecida en el § 30) de reducir el problema de Hilbert al de Riemann.

Deseando aprovechar la solución del problema de Riemann con coeficientes discontinuos ya obtenida, elijamos el segundo método[1]). Este método presta la oportunidad de resolver el problema de Hilbert para una circunferencia o un semiplano. El caso general puede reducirse a las aplicaciones conformes en consideración.

46.1. Problema de Hilbert para un semiplano. En vista de los razonamientos del p. 30.2, la solución del problema de Hilbert (46.1) para el semiplano superior será representada, en el caso dado, por la solución Φ^+ del problema de Riemann

$$\Phi^+(t) = -\frac{a(t)+ib(t)}{a(t)-ib(t)}\Phi^-(t) + \frac{2c(t)}{a(t)-ib(t)}, \tag{46.2}$$

que satisface la condición

$$\Phi^-(z) = \overline{\Phi^+(\bar{z})} = \overline{\Phi}^+(z) \tag{46.3}$$

(con motivo de las designaciones véase el p. 12.1).

La solución del problema de Hilbert se obtiene con una facilidad especial de la solución general del problema de Riemann, si la última se toma en la forma procedente de los razonamientos del p. 44.2[2]).

Convengamos en considerar el eje Ox como una curva cerrada (se cierre en el infinito), cuyos puntos inicial y final se encuentran en el origen de coordenadas. Para simplificar, consideremos que el coeficiente $G(t)$ es continuo en el infinito, es decir, $G(-\infty) = G(+\infty)$. Conforme a (44.6), la solución canónica del problema de Riemann (46.2) se la puede dar en la forma

$$X(z) = z^{-\varkappa} e^{\Gamma(z)}, \tag{46.4}$$

donde[3])

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta(\tau)\,d\tau}{\tau - z}, \qquad \theta(t) = \arg G(t) = \arg\left(-\frac{a+ib}{a-ib}\right), \tag{46.5}$$

---

[1]) Recomendamos al lector que restablezca en la memoria los pp. 30.1 y 30.2.

[2]) Aquí se reproduce en la forma corregida la solución de que se trató en la primera edición del libro.

[3]) Las integrales de límites se entienden, en general, en el sentido de valor principal.

y $\varkappa$ es el índice de la función $G(t)$ en la clase elegida de soluciones. La solución general se expresa mediante una fórmula ordinaria

$$\Phi(z) = X(z)\,[\Psi(z) + P_\varkappa(z)]. \tag{46.6}$$

Sin embargo, si $\Psi(z)$ se representa, como siempre, por una integral de tipo de Cauchy, entonces, para $\varkappa > 0$, la última resultará ser divergente. Este inconveniente puede ser superado, haciendo uso de la integral (4.38), introducida en el p. 4.6, y definiendo $\Psi(z)$, en virtud de (46.4), mediante la fórmula

$$\Psi(z) = \frac{z^\varkappa}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c(\tau)}{[a(\tau) - ib(\tau)]\,e^{\Gamma^+(\tau)}}\,\frac{d\tau}{\tau - z}, \tag{46.7}$$

Resulta lícito (para $\varkappa \geqslant 0$) el siguiente

TEOREMA. *La función $\Phi^+(z)$, definida mediante la fórmula* (46.6), *satisface la condición* (46.3), *siempre que los coeficientes del polinomio $P_\varkappa(z)$ en la fórmula son reales, y, por lo tanto, será la solución del problema de Hilbert para el semiplano superior en la clase dada de soluciones.*

DEMOSTRACIÓN. En virtud de que $\Phi^+(z)$ y $\Phi^-(z)$ se dan por medio de la misma expresión analítica, podemos en la condición (46.3) hacer caso omiso de los símbolos $^+$, $^-$, es decir, exigir que se cumpla la condición

$$\overline{\Phi}(z) = \Phi(z). \tag{46.8}$$

Aquí se han utilizado las designaciones del p. 12.1. Puesto que la función $X(z)$ es real [1]), entonces $\overline{X}(z) = X(z)$ para todo z. Por consiguiente, una función canónica satisface la condición de contorno del problema de Hilbert homogéneo. Lo último puede ser representado en la forma

$$(a - ib)\,X^+(t) + (a + ib)\,\overline{X}^+(t) = 0,$$

de donde en el contorno

$$(a + ib)\,\overline{X}^+(t) = -(a - ib)\,X^+(t).$$

Con la ayuda de la última correlación obtendremos

$$\overline{\Psi}(z) = -\frac{z^\varkappa}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(\tau)}{[a(\tau) + ib(\tau)]\,\tau^\varkappa \overline{X}^+(\tau)}\,\frac{d\tau}{\tau - z} =$$

$$= \frac{z^\varkappa}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(\tau)}{[a(\tau) - ib(\tau)]\,e^{\Gamma^+(\tau)}}\,\frac{d\tau}{\tau - z} = \Psi(z).$$

[1]) Por *funciones reales* se entienden aquellas funciones de argumento complejo que toman valores reales para los valores reales del argumento.

De aquí se deduce que si en el polinomio $P_\varkappa(z)$ se toman coeficientes reales ($\overline{P}_\varkappa(z) = P_\varkappa(z)$), entonces la fórmula (46.6) definirá la función que satisface la condición (46.8).

Cuando $\varkappa < 0$, la solución se determinará mediante la misma fórmula (46.6) ($P_\varkappa = 0$), si se cumplen $|\varkappa|$ condiciones de resolubilidad.

Para resolver el problema de Hilbert, hemos aprovechado el método de resolución del problema de Riemann, expuesto en el p. 44.2. Al resolver los problemas prácticos podemos emplear también el método del § 42. Si, en este caso, todas las integrales resultan ser reales, la solución del problema de Riemann será también la del problema de Hilbert. Esto se deduce del hecho de que para todas las funciones reales, y solamente para ellas, se verifica la igualdad $\overline{\Phi}(z) = \Phi(z)$.

46.2. Ejemplo. Con el fin de ilustrar los métodos expuestos, consideraremos un ejemplo concreto [1]).

Hállese la función $F(z) = u + iv$, analítica en el semiplano inferior, según la siguiente condición de contorno en el eje real:

$$u = \sigma(x) \quad (-1 < x < 1),$$
$$u_0 u - v_0 v = 0 \quad (x < -1,\ x > 1),$$

donde u_0, v_0 son ciertas constantes que satisfacen la condición $u_0 + v_0^2 = 1$; $\sigma(z)$ es la función dada.

El problema en consideración es un caso particular del problema de contorno de Hilbert con coeficientes discontinuos

$$\operatorname{Re}\{[a(x) + ib(x)]\, F(x)\} = c(x)$$

para

$$a(x) = 1, \quad b(x) = 0, \quad c(x) = \sigma(x) \quad (-1 < x < 1),$$
$$a(x) = u_0, \quad b(x) = v_0, \quad c(x) = 0 \quad (x < -1,\ x > 1).$$

El problema de Riemann que le corresponde tiene por expresión

$$\Phi^+(x) = G(x)\,\Phi^-(x) + g(x);$$

$$G(x) = \begin{cases} -1, \\ -e^{2i\varphi}, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2\sigma(x) & (-1 < x < 1), \\ 0 & (x < -1,\ x > 1), \end{cases}$$

donde $e^{i\varphi} = u_0 + iv_0$, con la particularidad de que, cambiando, si es necesario, el signo en la condición de contorno, se puede lograr que se satisfaga la condición $0 \leqslant \varphi < \pi$.

El problema de contorno en consideración será equivalente al último problema de Riemann en aquel sentido que toda función $\Phi^-(z)$, que satisface la condición $\overline{\Phi}^-(z) = \Phi^+(z)$, será su solución.

[1]) Este ejemplo se ha tomado de la obra de V. S. Rogózhin 2)*.

Vamos a resolver el problema de Riemann por el método del § 41. Tenemos

$$\frac{G(-1-0)}{G(-1+0)}=e^{2i\varphi}, \quad \frac{G(1-0)}{G(1+0)}=e^{-2i\varphi}.$$

De aquí

$$\gamma_1=\frac{\varphi}{\pi}-\varkappa_1, \quad \gamma_2=-\frac{\varphi}{\pi}-\varkappa_2.$$

Los números enteros $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ se escogen en dependencia de la clase requerida de soluciones. Si se busca una solución que sea acotada en el infinito y se reduzca en los extremos $-1,1$ al infinito de orden integrable, hay que poner $\varkappa_1 = 1$, $\varkappa_2 = 0$.

Este caso se diferencia del explorado en el § 42 en lo que aquí el punto infinitamente alejado pertenece al contorno. Los dominios D^+ y D^- son equitativos con relación al punto infinitamente alejado, por lo cual las funciones auxiliares fundamentales, que eliminan la discontinuidad del coeficiente, se toman aquí, para ambas funciones Φ^+, Φ^-, según el modelo de la función $^{-}\omega(z)$ (véase la fórmula (41.7)). Al elegir a título de z_0 los puntos $\pm i$, pongamos

$$\Phi^+(z)=\left(\frac{z+1}{z+i}\right)^{\frac{\varphi}{\pi}-1}\left(\frac{z-1}{z+i}\right)^{-\frac{\varphi}{\pi}}\Phi_1^+(z),$$

$$\Phi^-(z)=\left(\frac{z+1}{z-i}\right)^{\frac{\varphi}{\pi}-1}\left(\frac{z-1}{z-i}\right)^{-\frac{\varphi}{\pi}}\Phi_1^-(z).$$

Llegaremos, pues, al problema de Riemann

$$\Phi_1^+(x) = G_1(x)\,\Phi_1^-(x) + g_1(x).$$

De conformidad con la teoría general, el coeficiente

$$G_1(x)=\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{1-\frac{\varphi}{\pi}}\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\frac{\varphi}{\pi}}G(x)$$

ha de ser una función continua. En el deseo de iluminar mejor esta circunstancia, consideraremos más detalladamente el mecanismo de eliminación de la discontinuidad.

En el intervalo $(-1, 1)$ se tiene $G(x) = -1$, por lo cual

$G_1(x)=-\dfrac{x-i}{x+i}$. Al pasar por los puntos -1 ó $+1$, $G(x)$ pasa al valor $-e^{-2i\varphi}$. En el producto $\left(\dfrac{x-i}{x+i}\right)^{1-\varphi/\pi}\left(\dfrac{x-i}{x+i}\right)^{\varphi/\pi}$ por definición de una función fundamental, el primer factor es discontinuo en el punto -1, el segundo, en el punto $+1$. Al pasar por los puntos -1, 1 desde la izquierda a la derecha, estas funciones adquieren los siguientes factores respectivos

$$e^{2\pi i\left(1-\frac{\varphi}{\pi}\right)}=e^{-2i\varphi}, \quad e^{2\pi i\frac{\varphi}{\pi}}=e^{2i\varphi}.$$

De aquí obtenemos con facilidad que en todo el eje real

$$G_1(x)=-\frac{x-i}{x+i}$$

Al escribir la condición de contorno del problema de Riemann en la forma

$$(x+i)\,\Phi_1^+(x) = -(x-i)\,\Phi_1^-(x) + g(x)\,(x+1)^{1-\frac{\varphi}{\pi}}(x-1)^{\frac{\varphi}{\pi}},$$

obtenemos con facilidad

$$(z+i)\,\Phi_1^+(z) = \Psi^+(z) + c_0 + c_1 z,$$
$$-(z-i)\,\Phi_1^-(z) = \Psi^-(z) + c_0 + c_1 z,$$

donde

$$\Psi(z) = \frac{(-1)^{\frac{\varphi}{\pi}}}{\pi i}\int_{-1}^{1} \frac{\sigma(t)\,(t+1)^{1-\frac{\varphi}{\pi}}(1-t)^{\frac{\varphi}{\pi}}}{t-z}\,dt,$$

y c_0, c_1 son constantes arbitrarias. De aquí

$$\Phi^+(z) = \left(\frac{z+1}{z+i}\right)^{\frac{\varphi}{\pi}-1}\left(\frac{z-1}{z+i}\right)^{-\frac{\varphi}{\pi}}\frac{\Psi^+(z)+c_0+c_1 z}{z+i} =$$
$$= (z+1)^{\frac{\varphi}{\pi}-1}(z-1)^{-\frac{\varphi}{\pi}}[\Psi^+(z)+c_0+c_1 z],$$

$$\Phi^-(z) = \left(\frac{z+1}{z-i}\right)^{\frac{\varphi}{\pi}-1}(-1)\left(\frac{z-1}{z-i}\right)^{-\frac{\varphi}{\pi}}\frac{\Psi^-(z)+c_0+c_1 z}{z-i} =$$
$$= -(z+1)^{\frac{\varphi}{\pi}-1}(z-1)^{-\frac{\varphi}{\pi}}[\Psi^-(z)+c_0+c_1 z].$$

Para que la función multiforme $f(z) = (z+1)^{\varphi/\pi-1}(z-1)^{-\varphi/\pi}$ esté completamente definida, indiquemos, además, de qué modo se debe trazar el corte

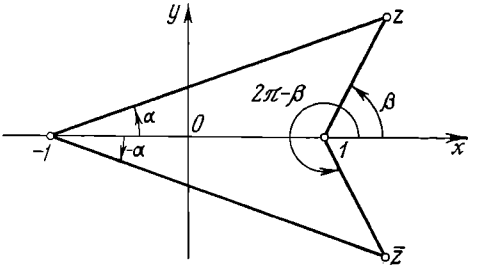


Fig. 17

que une sus puntos de ramificación -1, 1. Introduciendo la solución del problema homogéneo ($\Psi^+ = \Psi^- = 0$) en la condición de contorno homogénea ($\sigma = 0$), llegamos a que en el tramo $(-1, 1)$ del eje se verifica la igualdad $f^+(x) = f^-(x)$, es decir, en este tramo la función se hace prolongar analíticamente. Por consiguiente, el corte debe ser trazado por los segmentos del eje real $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$.

Señalemos, por fin, cómo han de elegirse la magnitud $(-1)^{\varphi/\pi}$ y las constantes arbitrarias c_0, c_1, para que se satisfaga la condición $\overline{\Phi^-(z)} = \overline{\Phi^-(\bar{z})} = \Phi^+(z)$. Para calcular $\overline{f(z)}$, hagamos $z+1 = r_1 e^{i\alpha_1}$, $z-1 = r_2 e^{i\alpha_2}$. Entonces (fig. 17), $\bar{z}+1 = r_1 e^{-i\alpha_1}$, $\bar{z}-1 = r_2 e^{i(2\pi-\alpha_2)}$.

Por consiguiente,

$$f(\bar{z}) = r_1^{\frac{\varphi}{\pi}-1} r_2^{-\frac{\varphi}{\pi}} e^{-i\alpha_1\left(\frac{\varphi}{\pi}-1\right)} e^{-i(2\pi-\alpha_2)\frac{\varphi}{\pi}},$$

$$\overline{f(\bar{z})} = r_1^{\frac{\varphi}{\pi}-1} r_2^{-\frac{\varphi}{\pi}} e^{i\alpha_1\left(\frac{\varphi}{\pi}-1\right)} e^{i(2\pi-\alpha_2)\frac{\varphi}{\pi}} = e^{2i\varphi} f(z).$$

Luego, al hacer $(-1)^{\varphi/\pi} = e^{i\varphi}$, tendremos

$$\overline{\Psi^-}(z) = -\frac{e^{i\varphi}}{\pi i}\int_{-1}^{1} \frac{\sigma(t)\,(t+1)^{1-\frac{\varphi}{\pi}}(1-t)^{\frac{\varphi}{\pi}}}{t-z}\,dt = -e^{-2i\varphi}\Psi^+(z).$$

Introduciendo todas las magnitudes en la igualdad $\overline{\Phi^-}(z) = \Phi^+(z)$, obtendremos

$$-(\overline{c_0} + \overline{c_1} z)\, e^{2i\varphi} = c_0 + c_1 z.$$

De las igualdades $\overline{c_k} e^{2i\varphi} = -c_k$ $(k=0,\ 1)$ se deduce que $ic_k e^{-i\varphi} = \overline{(ic_k e^{-i\varphi})}$ es una magnitud real. Por esto

$$c_0 = -iR_0 e^{i\varphi}, \qquad c_1 = -iR_1 e^{i\varphi},$$

donde R_0 y R_1 son constantes reales.

De aquí obtenemos la solución del problema de partida en la forma definitiva

$$F(z) = \Phi^-(z) = i\,(1+z)^{\frac{\varphi}{\pi}-1}(1-z)^{-\frac{\varphi}{\pi}}\,[\Psi_1(z) + R_0 + R_1 z],$$

donde

$$\Psi_1(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{(1+t)^{1-\frac{\varphi}{\pi}}(1-t)^{\frac{\varphi}{\pi}}\,\sigma(t)}{t-z}\,dt.$$

46.3. Problema de contorno mixto de funciones analíticas. Como ejemplo de la aplicación de la teoría expuesta consideraremos un caso particular del problema de contorno de Hilbert con coeficientes discontinuos, esto es, el así llamado problema de contorno mixto de funciones analíticas que enfrentamos en muchas aplicaciones. Demos la enunciación general de este problema.

Supongamos que el contorno cerrado L está dividido en 2m partes mediante los puntos $a_1, b_1, \ldots, a_m, b_m$. *Designemos con L' el conjunto de los arcos* (a_k, b_k) *y con L''*, el conjunto de los arcos (b_k, a_{k+1}) $(k = 1, 2, \ldots, m;\ a_{2m+1} = a_1)$. *Hace falta determinar una función*

$$F(z) = u + iv, \tag{46.9}$$

que sea analítica en D^+ y satisfaga la condición de contorno

$$u = f(s) \text{ en } L', \quad v = h(s) \text{ en } L'', \tag{46.10}$$

donde $f(s)$, $h(s)$ son las funciones dadas que satisfacen la condición de Hölder. En los puntos a_k, b_k la función $F(z)$ debe pertenecer a cierta clase dada.

Examinemos un caso en que el contorno L es el eje real. En principio, el problema siempre puede ser reducido a este caso por medio de una aplicación conforme del dominio D^+ sobre el semiplano superior. Es menester considerar, en este caso, que $F(z)$ es acotada en el infinito.

Supondremos que el punto infinitamente alejado del eje no coincide con los puntos de partición a_k, b_k. Por consiguiente, L' estará compuesto por m segmentos finitos (a_k, b_k), y L'', por $m-1$ segmentos finitos y dos infinitos (b_m, ∞), $(-\infty, a_1)$.

Las condiciones de contorno (46.10) pueden escribirse como una sola condición de contorno del problema de Hilbert, definida en todo el contorno L:

$$a(s)\, u(s) + b(s)\, v(s) = c(s) \quad \text{en } L, \tag{46.11}$$

donde se debe tomar

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = f(s) \text{ en } L';$$
$$a = 0, \quad b = 1, \quad c = h(s) \text{ en } L''.$$

Construyamos el problema de Riemann correspondiente

$$\Phi^+(t) = G(t)\, \Phi^-(t) + g(t). \tag{46.12}$$

De acuerdo con la fórmula (46.2)

$$G(t) = -\frac{a+ib}{a-ib} = -1, \quad g(t) = \frac{2c}{a-ib} = 2f(t) \text{ en } L',$$
$$G(t) = +1, \quad g(t) = 2ih(t) \qquad \text{en } L''.$$

Hemos llegado al problema de contorno (42.12'), investigado en el p. 42.2, y podemos servirnos directamente de los resultados allá obtenidos. Demos a conocer las soluciones para tres clases de mayor importancia; las fórmulas que se obtienen se deben a M. V. Keldish y L. I. Sedov 1).*

1° La solución no acotada cerca de todos los extremos a_k, b_k:

$$\Phi(z) = \frac{1}{R(z)}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{R(\tau)\, g(\tau)}{\tau - z}\, d\tau + P_m(z)\right], \tag{46.13}$$

$$R(z) = \sqrt{\prod_{k=1}^{m} (z-a_k)(z-b_k)}.$$

Si se tiene la condición adicional $\Phi(\infty) = 0$, se debe sustituir $P_m(z)$ por $P_{m-1}(z)$. Las demás fórmulas las escribamos para esta condición adicional.

2° **La solución acotada cerca de los extremos a_k y no acotada cerca de los extremos b_k:**

$$\Phi(z) = \frac{R_a(z)}{R_b(z)} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{R_b(\tau)}{R_a(\tau)} \frac{g(\tau)}{\tau - z} d\tau, \tag{46.14}$$

$$R_a(z) = \sqrt{\prod_{k=1}^{m} (z - a_k)}, \quad R_b(z) = \sqrt{\prod_{k=1}^{m} (z - b_k)}.$$

3°. **La solución acotada cerca de todos los extremos:**

$$\Phi(z) = R(z) \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{R(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z}, \tag{46.15}$$

con la particularidad de que aquí han de cumplirse las condiciones de resolubilidad

$$\int_L \frac{g(\tau)}{R(\tau)} \tau^{j-1} d\tau = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{46.16}$$

Resulta fácil demostrar que las fórmulas escritas, que ofrecen la solución del problema de Riemann (46.12), si se consideran reales los coeficientes del polinomio $P_m(z)$, darán también la solución del problema de Hilbert inicial. Con este objeto, es necesario demostrar, de acuerdo con la observación al final del p. 46.2, que todas las integrales, que figuran en estas fórmulas, son reales. Lo último se deduce de los siguientes razonamientos.

Si $\tau \in L'$, entonces habrá un número impar de binomios negativos $\tau - a_k$, $\tau - b_k$, y por esta razón $R(\tau)$ y $\frac{R_b(\tau)}{R_a(\tau)}$ tienen valores imaginarios. Mas, en el caso dado $g(\tau) = 2f(\tau)$ es una función real, por lo cual, a causa de la presencia del factor $\frac{1}{2\pi i}$, toda la integral será real.

Si $\tau \in L''$, entonces los binomios negativos serán representados por un número par; $R(\tau)$ y $\frac{R_b(\tau)}{R_a(\tau)}$ son reales y $\frac{g(\tau)}{2\pi i} = \frac{h(\tau)}{\pi}$ es también una función real. Consecuentemente, la integral es real otra vez.

Es fácil ver que la función $\frac{P_m(z)}{R(z)}$ es la solución general del problema homogéneo en la clase más amplia de funciones, no acotadas en todos los extremos. La fórmula (42.24) dará la solución en cualquier clase en que se requiere la acotación en cualesquiera p extremos y en los restantes $2m - p$ extremos se admite inversión en el infinito integrable. Cuando $p < m$, el problema tiene $m - p$ soluciones

linealmente independientes; cuando $p > m$, existe una única solución, si se cumplen $p - m$ condiciones de resolubilidad (42.25).

En conclusión indiquemos que si una de las integrales resulta divergente, entonces, por analogía con lo que se hizo en el p. 46.1, tendremos que pasar a la integral (4.38), introducida en el p. 4.6.

46.4. Problema de Dirichlet y sus modificaciones para un plano con aberturas. Excluyamos del plano complejo los segmentos del eje real (a_k, b_k) $(k = 1, 2, \ldots, m)$ y sea D el dominio restante. Por frontera del dominio vamos a comprender los segmentos excluidos (cortes), que se recorren dos veces, con la particularidad de que el margen superior es recorrido en la dirección del eje positivo, y el inferior, en la dirección contraria. La tarea principal consiste en *hallar una función, armónica en el dominio D, según los valores que ella tiene en los márgenes del corte.*

Este problema, por su carácter, es el de Dirichlet para un dominio múltiplemente conexo en aquel caso especial, cuando todos los contornos, que limitan el dominio, se degeneran en los segmentos del eje Ox, recorridos dos veces. El caso especial en consideración difiere esencialmente del caso de un dominio múltiplemente conexo, examinado en el § 37, en lo que aquí no hay puntos del plano que sean distintos de los puntos $D + L$. Recordemos que las dificultades de la resolución del problema de Dirichlet para un dominio múltiplemente conexo estaban relacionadas con la posibilidad de obtener soluciones multiformes. En el § 37 estas dificultades se superaban por separación explícita de la parte multiforme $(\ln (z - z_k)$, lo que sólo era posible gracias a la presencia de unos puntos, no pertenecientes a $D + L$. Por esta razón, el problema planteado no puede ser resuelto por el método empleado en el § 37. La solución se dará a base de otros razonamientos que se apoyan en la consideración de los problemas de contorno con coeficientes discontinuos. Según veremos en lo sucesivo, los resultados obtenidos se diferencian considerablemente de los resultados correspondientes del § 37.

Empecemos por el examen de un problema que, representando un interés independiente, será auxiliar para la resolución del problema de Dirichlet.

Se requiere hallar la función $\Phi(z) = u + iv$, analítica y *uniforme* en D, basándose en los valores de su parte real prefijados en los cortes:

$$u^+ = f^+(t), \quad u^- = f^-(t) \quad \text{en } L, \tag{46.17}$$

donde $f^+(t)$, $f^-(t)$ son unas funciones prefijadas, que satisfacen la condición de Hölder. Convengamos en considerar que los valores de contorno son funciones continuas. En este caso han de estar cumplidas las condiciones

$$f^+(a_k) = f^-(a_k), \quad f^+(b_k) = f^-(b_k) \quad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{46.18}$$

A la par con la función buscada $\Phi(z)$, introduzcamos en la consideración, además, la función $\overline{\Phi}(z) = \overline{\Phi(\bar{z})}$, ya mencionada en los pp. 30.2 y 46.1. Si $\Phi(z)$ es analítica en D, entonces, en virtud de lo establecido anteriormente, será analítica en este dominio también $\overline{\Phi}(z)$. Cuando z va aproximándose hacia el eje real, $\Phi(z)$ y $\overline{\Phi}(z)$ tienden a sus valores límites en el eje de diferentes semiplanos, con la particularidad de que estos valores límites están conjugados de una manera compleja.

Reduzcamos el problema propuesto a los considerados anteriormente, haciendo uso, con este objeto, del procedimiento de N. I. Musjelishvili[1]). Escribamos la identidad

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}[\Phi(z) + \overline{\Phi}(z)] + \frac{1}{2}[\Phi(z) - \overline{\Phi}(z)] = \Psi(z) + \Omega(z) \quad (46.19)$$

y examinemos dos funciones analíticas en D

$$\Psi(z) = \frac{1}{2}[\Phi(z) + \overline{\Phi}(z)], \quad \Omega(z) = \frac{1}{2}[\Phi(z) - \overline{\Phi}(z)]. \quad (46.20)$$

Investiguemos su comportamiento en todo el eje real.

En los tramos (a_k, b_k) tendremos

$$\begin{gathered} \operatorname{Re}\Psi(t) = \frac{1}{2}[\operatorname{Re}\Phi(t) + \operatorname{Re}\overline{\Phi}(t)] = \frac{1}{2}[f^+(t) + f^-(t)], \\ \operatorname{Re}\Omega(t) = \frac{1}{2}[f^+(t) - f^-(t)]. \end{gathered} \quad (46.21)$$

Designemos con L' el resto del eje, menos los segmentos (a_k, b_k). En L' ambas funciones son analíticamente prolongables por el eje y poseen las propiedades

$$\Psi(t) = \frac{1}{2}[\Phi(t) + \overline{\Phi}(t)] = \operatorname{Re}\Phi(t),$$

$$\Omega(t) = \frac{1}{2}[\Phi(t) - \overline{\Phi}(t)] = i \operatorname{Im}\Phi(t),$$

lo que es equivalente a la condición

$$\operatorname{Im}\Psi(t) = 0, \quad \operatorname{Re}\Omega(t) = 0 \text{ en } L'.$$

Al cotejar las últimas igualdades con las (46.21), resulta que las funciones $\Psi(z)$, $\Omega(z)$ satisfacen en todo el eje Ox las siguientes condiciones de contorno:

$$\operatorname{Re}\Psi(t) = \frac{1}{2}[f^+(t) + f^-(t)] \text{ en } L, \quad \operatorname{Im}\Psi(t) = 0 \text{ en } L', \quad (46.22)$$

$$\operatorname{Re}\Omega(t) = \frac{1}{2}[f^+(t) - f^-(t)] \text{ en } L, \quad \operatorname{Re}\Omega(t) = 0 \text{ en } L'. \quad (46.23)$$

[1]) N. I. Musjelishvili emplea este procedimiento no para reducir el problema a uno mixto (el cual se resuelve por él más tarde), sino para resolver inmediatamente el problema por el método indicado en el p. 30.2.

Por consiguiente, la búsqueda de la función $\Psi(z)$ se ha reducido a la resolución de un problema de contorno mixto de funciones analíticas, investigado en el punto antecedente. En cuanto a la función $\Omega(z)$, el problema se reduce a la búsqueda de una función, analítica en el semiplano, partiendo de los valores de su parte real prefijados en el eje Ox, a condición de que la función es analíticamente prolongable al semiplano adicional. En vista de las condiciones de continuidad (46.18), el valor de contorno $\operatorname{Re}\Omega(z)$ en el eje es una función continua.

La función $\Psi(z)$ se determina mediante las fórmulas del p. 46.3, donde hay que poner

$$g(t)=\frac{1}{2}[f^+(t)+f^-(t)] \text{ en } L, \quad g(t)=0 \text{ en } L'.$$

La búsqueda de la función $\Omega(z)$ se efectúa por aplicación del operador de Schwarz, el cual para el eje real, como se sabe, coincide con la integral de tipo de Cauchy.

Por lo tanto, tendremos

$$\Omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f^+(\tau)-f^-(\tau)}{\tau-z}\,d\tau. \tag{46.24}$$

Escribamos la solución del problema de partida en la clase de funciones, las cuales son finitas en algunos extremos $c_1, c_2, \ldots, c_p$ y tienen un infinito integrable en los restantes $2m-p$ extremos con la condición adicional $\Phi(\infty)=0$. Según las fórmulas (42.24) y (46.24)

$$\Phi(z)=\frac{R_1(z)}{R_2(z)}\left[\frac{1}{4\pi i}\int_L \frac{R_2(\tau)}{R_1(\tau)}\frac{f^+(\tau)+f^-(\tau)}{\tau-z}\,d\tau+P_{m-p-1}(z)\right]+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f^+(\tau)-f^-(\tau)}{\tau-z}\,d\tau, \tag{46.25}$$

donde

$$R_1(z)=\sqrt{\prod_{k=1}^{p}(z-c_k)}, \quad R_2(z)=\sqrt{\prod_{k=p+1}^{2m}(z-c_k)}.$$

Si $p \geqslant m$, se debe poner $P_{m-p-1}(z) \equiv 0$ y añadir (para $p > m$) $p-m$ condiciones de resolubilidad:

$$\int_L \frac{R_2(\tau)}{R_1(\tau)}[f^+(\tau)+f^-(\tau)]\,\tau^{j-1}\,d\tau=0 \quad (j=1, 2, \ldots, p-m). \tag{46.26}$$

El lector mismo escribirá con facilidad, sirviéndose de las fórmulas (46.13)—(46.16), las soluciones para todas las clases más importantes.

Si despreciamos la condición de continuidad (46.18), entonces, en virtud de las propiedades de la integral de tipo de Cauchy (p. 8.1), la segunda integral en la fórmula (46.25) nos proporcionará una función con singularidad logarítmica. Por consiguiente, las soluciones acotadas del problema no existen. Si la solución del problema mixto se ha tomado en la clase de funciones, finitas en el extremo dado, entonces toda la solución tendrá un infinito logarítmico. N. I. Musjelishvili denomina tal solución *casi acotada*. La singularidad de este tipo es, en general, propia para la solución del problema de Dirichlet con valores de contorno discontinuos que tienen una discontinuidad de primera especie.

La comparación de los resultados obtenidos con los del párrafo 37 muestra la siguiente distinción esencial. Para un dominio múltiplemente conexo en el caso de contornos que no se degeneran en aberturas, la solución del problema considerado en la clase de funciones uniformes será posible sólo con una elección especial de los valores de contorno prefijados (condiciones de uniformidad (37.20)). Para el mismo problema en el caso de contornos que se degeneran en aberturas, la solución resulta posible con los valores de contorno arbitrarios, siempre que se admiten unas soluciones que tienen en los extremos el infinito integrable. En este caso se hace posible incluso una solución no trivial del problema homogéneo.

La causa de tal fenómeno, paradójico a primera vista, radica en el hecho de que el contorno no es suave en los extremos de las aberturas. El ángulo formado por los vectores tangentes izquierdo y derecho es igual aquí a 2π. Por eso, la función que aplica conformemente un plano dotado de corte sobre otro dominio, limitado por un contorno suave (un círculo, por ejemplo), en el entorno del extremo z_0 del corte tiene la forma

$$z - z_0 = (\zeta - \zeta_0)^2 f_1(\zeta) \quad (f_1(\zeta_0) \neq 0).$$

De aquí se deduce que a la solución del problema en un plano cortado, que tiene en el extremo del corte cierto orden α, le corresponde una solución en el contorno suave que en el punto ζ_0 tiene el orden 2α. Por consiguiente, a la solución obtenida que en los extremos se reduce al infinito der orden 1/2, le corresponde en el contorno suave una solución que en ζ_0 tiene un polo simple. Pero la admisión de que la solución del problema tiene una singularidad polar de primer orden aumenta el número de soluciones linealmente independientes (o disminuye el número de condiciones de resolubilidad) en una unidad. Por eso precisamente se explica una distinción aparente entre las soluciones en el contorno suave y en el plano cortado[1]).

OBSERVACIÓN. Las fórmulas (46.25) quedan en vigor también para el caso cuando en los extremos, donde se admite un unfinito

[1]) Véanse las explicaciones en la tesis de E. I. Zverόvich 5)*.

integrable, las funciones $f^+(t)$, $f^-(t)$ se reducen al infinito de orden integrable (véase el p. 43.4).

Pasemos ahora a la resolución del problema de Dirichlet, es decir, hallaremos la función $u(x, y)$, armónica y acotada en D, que satisfaga una condición de contorno

$$u^+ = f^+(t), \quad u^- = f^-(t) \quad \text{en } L, \tag{46.27}$$

donde $f^+(t)$, $f^-(t)$ son unas funciones prefijadas que satisfacen la condición de continuidad (46.18). Para el método de resolución que utilizaremos en lo ulterior se requiere que sus derivadas satisfagan la condición de Hölder.

Apliquemos el método de resolución propuesto por M. V. Keldish y L. I. Sedov 1).* Designemos con $\Phi(z) = u + iv$ una función analítica cuya parte real es la función armónica buscada. Esta función, en general, será multiforme. Su derivada

$$\Phi'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}$$

será una función uniforme, lo que se prueba con facilidad. En efecto, por ser u uniforme, la parte imaginaria v sólo puede adquirir incrementos constantes cualquiera que sea el camino recorrido que abarca algún segmento (a_k, b_k). De aquí se desprende que la derivada irá volviendo al valor de partida recorriendo en el dominio D cualquier camino, es decir, será una función uniforme.

Apliquemos los resultados obtenidos en el presente punto a la búsqueda de $\Phi'(z)$, tomando en consideración que la última se reduce en el infinito a cero cuyo orden no es inferior a dos.

En la clase más amplia de funciones que tienen infinito integrable en todos los extremos (y tienen en el infinito un cero de segundo orden) la solución tendrá por expresión

$$\Phi'(z) = \frac{1}{R(z)}\,\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{R(\tau)\,[f'^+(\tau) + f'^-(\tau)]}{\tau - z}\,d\tau + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f'^+(\tau) - f'^-(\tau)}{\tau - z}\,d\tau + \frac{c_0 + c_1 z + \ldots + c_{m-2}z^{m-2}}{R(z)}. \tag{46.28}$$

Es fácil ver que todos los términos del segundo miembro tienen en el infinito cero de segundo orden. Para los términos primero y tercero esto es obvio. En lo que se refiere al segundo término, podemos convencernos de lo mismo mediante la integración por partes, teniendo en cuenta que en vista de la continuidad de las funciones $f^+(t)$, $f^-(t)$, la parte integrada se convertirá en cero.

La función $\Phi(z)$ se determinará mediante la fórmula

$$\Phi(z) = \int_0^z \Phi'(z)\,dz + C, \tag{46.29}$$

donde por C conviene entender una constante arbitraria.

Con el fin de determinar las constantes reales $c_0, c_1, \ldots, c_{m-2}, C$, hagamos uso de las igualdades $\operatorname{Re} \Phi(a_k) = f(a_k)$. Haciendo en (46.29) $z = a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ e integrando a lo largo del camino que no se corta con L (por ejemplo, a lo largo del margen izquierdo del eje Ox), obtendremos m ecuaciones

$$\operatorname{Re} \int_0^{a_k} \Phi'(z)\, dz + C = f^*(a_k). \tag{46.30}$$

Para demostrar la resolubilidad de este último sistema examinemos un sistema homogéneo correspondiente. El último se obtendrá, si en el problema de contorno ponemos $f^+(t) = f^-(t) \equiv 0$. Tendremos

$$\operatorname{Re} \int_0^{a_k} \frac{c_0 + c_1\tau + \ldots + c_{m-2}\tau^{m-2}}{R(\tau)}\, d\tau + C = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{46.31}$$

Por medio de una sustracción sucesiva obtenemos el sistema de $m - 1$ ecuaciones

$$\operatorname{Re} \int_{a_k}^{a_{k+1}} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Teniendo en cuenta que en la suma $\int_{a_k}^{b_k} + \int_{b_k}^{a_{k+1}}$ el primer sumando tiene el integrando imaginario puro, llegaremos al sistema siguiente

$$\int_{b_k}^{a_{k+1}} \frac{c_0 + c_1\tau + \ldots + c_{m-2}\tau^{m-2}}{R(\tau)}\, d\tau = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m-1). \tag{46.32}$$

Dado que el denominador tiene signo constante, para que se verifiquen las igualdades, el numerador tiene que al menos una vez cambiar el signo en cada segmento (b_k, a_{k+1}). Por consiguiente, el polinomio de grado $m - 2$ cambia el signo por lo menos $m - 1$ veces. Mas, tal polinomio es idénticamente igual a cero. Se hace obvio que también $C = 0$.

De este modo, el sistema homogéneo (46.31) correspondiente al sistema (46.30) sólo tiene soluciones nulas. Por consiguiente, el sistema no homogéneo se resuelve unívocamente con el segundo miembro cualquiera. De aquí se deduce la resolubilidad del mismo problema de Dirichlet. Al mismo tiempo se ha encontrado también el algoritmo para obtener la solución.

Hemos de notar que en la obra de N. I. Musjelishvili [16] se ofrece también otro procedimiento de resolución del problema de Dirichlet que no requiere suposición sobre la diferenciabilidad de los valores de contorno. Este procedimiento se apoya en la solución de un problema auxiliar más (véase el problema 11 al final del capítulo).

§ 47. Ecuación característica para los contornos abiertos

47.1. Conceptos fundamentales y designaciones. Empezaremos la exposición por un caso más simple, al considerar primero una ecuación con coeficientes continuos cuyo contorno está compuesto de unas curvas abiertas que no se intersecan. Resulta casi automática la extensión de los resultados al caso general del contorno complejo compuesto de cualquier número finito de las curvas cerradas y abiertas (véase el § 44), dispuestas arbitrariamente, suponiendo que los coeficientes de la ecuación tienen discontinuidades de primera especie en el número finito de puntos.

En lo que sigue vamos a emplear las designaciones y la terminología del capítulo III para las ecuaciones integrales, en particular, del p. 20.1, y del capítulo VI, en primer lugar §§ 42, 43, para el problema de Riemann.

Así pues, supongamos que el contorno $L = L_1 + L_2 + \ldots + L_m$ consta de m curvas suaves abiertas que no se intersecan. Por analogía con el p. 20.1 el operador singular y la ecuación integral singular se escribirán en la forma

$$K\varphi \equiv a(t)\,\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M(t,\tau)}{\tau - t}\,\varphi(\tau)\,d\tau = f(t) \qquad (47.1)$$

o bien

$$K\varphi \equiv K^0\varphi + k\varphi \equiv a(t)\,\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \\ + \int_L k(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = f(t). \qquad (47.2)$$

Consideramos que las funciones $a(t)$, $b(t) = M(t, t)$ satisfacen la condición de Hölder. A diferencia del p. 20.1 exigimos que la función

$$k(t,\tau) = \frac{1}{\pi i}\,\frac{M(t,\tau) - M(t,t)}{\tau - t},$$

observe la condición de Hölder según ambas variables. Para ello es suficiente exigir que el núcleo $M(t, \tau)$ satisfaga la condición

de Hölder respecto de la variable t y tenga derivada parcial respecto de τ, que satisface dicha condición según ambas variables.

La solución $\varphi(t)$ de las ecuaciones la buscaremos en aquellas clases, a las cuales pertenecen valores de contorno de las soluciones de problemas de Riemann, examinados en los §§ 41—45, es decir, *en las clases de funciones que satisfacen la condición de Hölder en todos los puntos del interior de la curva y están acotadas o admiten infinito integrable en los extremos.* (El último requisito ha de ser precisado cada vez por separado). A título de término independiente $f(t)$ puede admitirse una función de aquella clase, en la cual se tomaba en el p. 41.5 el término independiente $g(t)$ del problema de Riemann. Al principio, para simplificar las formulaciones, consideraremos que la función $f(t)$ satisface la condición de Hölder.

La razón de reforzar, en comparación con el p. 20.1, el requisito que se impone sobre el núcleo regular $k(t, \tau)$ radica en lo que ha de ser asegurada la integrabilidad del producto $k(t, \tau)\varphi(\tau)$ en aquellos extremos, donde se admiten las soluciones no acotadas.

Determinaremos de un modo habitual el operador transpuesto

$$K'\psi \equiv a(t)\psi(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M(\tau, t)}{\tau - t}\psi(\tau)\,d\tau, \tag{47.3}$$

$$K'\psi \equiv K^{0\prime}\psi + k'\psi \equiv a(t)\psi(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{b(\tau)\psi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \int_L k'(t, \tau)\psi(\tau)\,d\tau, \tag{47.4}$$

donde

$$b(\tau) = M(\tau, \tau), \quad k'(t, \tau) = \frac{1}{\pi i}\cdot\frac{M(\tau, t) - M(\tau, \tau)}{\tau - t}.$$

La ecuación $K'\psi = 0$ será homogénea, transpuesta a la dada.

47.2. Resolución de la ecuación característica. Procedamos a resolver la ecuación característica

$$K^{0}\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = f(t). \tag{47.5}$$

Introduciendo una función analítica

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau$$

y razonando igual que en el p. 21.1, llegaremos al problema de contorno de Riemann para el contorno L:

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\Phi^{-}(t) + g(t), \tag{47.6}$$

$$G(t) = \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}, \quad g(t) = \frac{f(t)}{a(t) + b(t)}, \tag{47.7}$$

con la condición adicional $\Phi(\infty) = 0$.

Consideraremos un caso normal (no excepcional), cuando $G(t)$ en ningún punto se reduce a cero ni tampoco al infinito, lo que para la ecuación de partida corresponde a la condición $a(t) \pm b(t) \neq \neq 0$.

Con el fin de simplificar las fórmulas que siguen dividamos previamente toda la ecuación (47.5) por $\sqrt{a^2(t) - b^2(t)}$, de suerte que consideraremos que los coeficientes de esta ecuación satisfacen la condición

$$a^2(t) - b^2(t) = 1. \tag{47.8}$$

Con motivo de la necesidad de partir en clases las soluciones de la ecuación integral singular, demos a conocer al mismo tiempo la clasificación de las soluciones del problema de Riemann.

Todos los extremos a_k y b_k los denotaremos de una manera uniforme con letras c_1, c_2, y.., c_{2m}. Supongamos que c_1, c_2, ..., c_q *no son extremos* de acotación automática (no singulares). Los restantes extremos c_{q+1}, ..., c_{2m} los consideraremos singulares, es decir, extremos de la acotación automática. Dividiremos todos los extremos en tres grupos:

$$c_1, c_2, \ldots, c_p; \quad c_{p+1}, \ldots, c_q; \quad c_{q+1}, \ldots, c_{2m}. \tag{47.9}$$

Una función analítica a trozos que sirve de solución del problema de contorno de Riemann (47.6), satisface en todos los puntos de L, salvo los extremos, la condición de Hölder, tiene en los extremos del primer grupo infinito integrable y es acotada en los demás extremos, se llamará *perteneciente a la clase* H (c_1, c_2, ..., c_p). Los puntos c_1, c_2, ..., c_p en los cuales se admite la inversión de la solución en el infinito, los llamaremos *extremos que definen la clase*[1]).

La clase de soluciones acotadas en todos los extremos (la clase más estrecha) se denotará con H_0.

Aplicaremos la clasificación mencionada no sólo a las soluciones del problema de Riemann sino, en general, a todas las funciones

---

[1]) La clasificación aquí introducida es algo diferente de la de N. I. Musjelishvili [16]. Éste toma por fundamental la más amplia clase de funciones que tienen infinito integrable en todos los extremos no singulares; las demás clases las obtiene por estrechamiento. Según Musjelishvili, por eso, los puntos que definen una clase son todos los extremos no singulares en los cuales se requiere que la solución sea acotada. En nuestro caso destacamos como fundamental la más estrecha clase de soluciones, acotadas en todos los extremos. Las demás clases se obtienen por ampliación de la fundamental, admitiendo un infinito integrable en algunos extremos. Estos últimos precisamente definen la clase. La modificación de la clasificación nos hace falta para conseguir uniformidad con la clasificación en casos excepcionales, cuando $G(t)$ admite los ceros y polos. En dichos casos los puntos, donde la solución se reduce al infinito, se consideraban no ordinarios, sino excepcionales.

analíticas a trozos. Introduzcamos también una noción de *clases transpuestas*. Si en la definición de clase, indicada más arriba, cambiamos de lugares los puntos de I y II grupos, llegaremos a una clase transpuesta a la dada. De este modo, si $H(c_1, c_2, \ldots, c_p)$ es la clase dada, $H'(c_1, c_2, \ldots, c_p) = H(c_{p+1}, \ldots, c_q)$ será la *clase transpuesta* a la primera.

La solución de la ecuación característica (47.5) se obtendrá según la fórmula de Sojotski:

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t). \tag{47.10}$$

Para la resolución del problema de Riemann de contorno abierto partiremos de las fórmulas del p. 43.1. Razonando igual que en el p. 21.2, llegaremos a la fórmula

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{G(t)}\right] g(t) + \\ + X^+(t)\left[1 - \frac{1}{G(t)}\right]\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - t} - \frac{1}{2}P_{\varkappa-1}(t)\right]. \tag{47.11}$$

La última expresión demuestra que la clase de soluciones de la ecuación integral coincide con la clase de soluciones del problema de Riemann que le corresponde. (Recordemos que por hipótesis el término independiente $f(t)$ pertenece a la misma clase que la solución buscada.)

Al introducir en la expresión

$$X^+(t) = \prod_{k=1}^{m}(t - b_k)^{-\varkappa_k}\sqrt{G(t)}\, e^{\Gamma(t)}$$ los valores de $G(t)$,

$g(t)$, tomados de las fórmulas (47.7), y teniendo presente la condición (47.8), transformemos la fórmula (47.11) del modo siguiente

$$\varphi(t) = a(t) f(t) - \frac{b(t) Z(t)}{\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - t} + b(t) Z(t) P_{\varkappa-1}(t), \tag{47.12}$$

donde

$$Z(t) = [a(t) + b(t)] X^+(t) = [a(t) - b(t)] X^-(t) = \\ = \prod_{k=1}^{m}(t - b_k)^{-\varkappa_k} e^{\Gamma(t)}, \tag{47.13}$$

$$\Gamma(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau - t}\, d\tau, \quad \varkappa = \sum_{k=1}^{m}\varkappa_k.$$

Si es que $\varkappa \leqslant 0$, hay que poner $P_{\varkappa-1}(t) \equiv 0$. Para $\varkappa > 0$, la solución de la clase dada existe, cuando, y sólo cuando, se satisfacen las condiciones de resolubilidad

$$\int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)} \tau^{j-1} d\tau = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, -\varkappa). \tag{47.14}$$

El último término de la fórmula (47.12) representa en sí la solución general de la ecuación característica homogénea $K^\circ \varphi = 0$.

Al introducir, por analogía con el p. 21.2, el operador R:

$$Rf \equiv a(t) f(t) - \frac{b(t) Z(t)}{\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t}, \tag{47.15}$$

escribamos la solución general de la ecuación característica en la forma

$$\varphi(t) = Rf + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_k \varphi_k(t), \tag{47.16}$$

donde $\varphi_k(t) = b(t) Z(t) t^{k-1}$ son las funciones propias del operador K°, es decir, soluciones linealmente independientes de la ecuación característica homogénea $K^\circ \varphi = 0$.

Investiguemos la cuestión acerca de las clases de soluciones. Introduzcamos para las últimas la clasificación análoga a la indicada más arriba para las soluciones del problema de Riemann. La diferencia consiste sólo en el hecho de que aquí se tratará no de funciones analíticas a trozos, definidas en todo el plano, sino de las funciones que están dadas solamente en el contorno.

DEFINICIÓN. La solución $\varphi(t)$ de una ecuación integral singular, que satisface en todos los puntos de L, a excepción, quizás, de los extremos, la condición de Hölder, que tiene en los puntos del I grupo (47.9) un infinito integrable y es acotada cerca de todos los demás extremos, se llamará *perteneciente a la clase* h $(c_1, c_2, \ldots, c_p)$.

De los puntos $c_1, c_2, \ldots, c_p$, en los cuales la solución se reduce al infinito, suele decirse que ellos *definen la clase*.

Una solución de la ecuación integral perteneciente a la clase h $(c_{p+1}, \ldots, c_q)$ se denominará *solución de la clase transpuesta* respecto a la clase h $(c_1, c_2, \ldots, c_p)$. Es fácil ver que los valores límites de las funciones analíticas a trozos de la clase H $(c_1, \ldots, c_p)$ son funciones de la clase h $(c_1, c_2, \ldots, c_p)$. Denotemos con h_0 la clase de soluciones acotadas en todos los extremos (la clase más estrecha). Esta clasificación la emplearemos no sólo para la solución de una ecuación integral singular, sino, en general, para cualesquiera funciones definidas en el contorno.

En vista de las fórmulas (47.13) y las propiedades de la función canónica (las fórmulas (43.3)—(43.5)), la función Z (t)[1]) tendrá por expresión

$$Z(t) = \omega_0(t) \prod_{k=1}^{2m} (t - c_k)^{\gamma_k} \quad (\gamma_k = \alpha_k + i\beta_k), \tag{47.17}$$

donde $\omega_0(t)$ satisface la condición de Hölder y no se reduce a cero en ningún punto, y Re γ_k se determina por las condiciones

$$\begin{aligned} -1 < \alpha_k < 0 &\text{ para } k = 1, 2, \ldots, p, \\ 0 < \alpha_k < 1 &\text{ para } k = p+1, \ldots, q, \\ \alpha_k = 0 &\text{ para } k = q+1, \ldots, 2m. \end{aligned} \tag{47.18}$$

De la expresión para la función Z (t) y de la fórmula (47.11) se desprende que si la solución del problema de Riemann (47.6) se ha tomado de la clase $H(c_1, \ldots, c_p)$, entonces la solución de la ecuación integral (47.5) pertenecerá a la clase $h(c_1, \ldots, c_p)$.

Investiguemos el comportamiento de la solución en el entorno de los puntos de acotación automática c_k $(k = q+1, \ldots, 2m)$. Para estos puntos $\gamma_k = i\beta_k$. Si $\beta_k \neq 0$, entonces, en virtud de la fórmula (8.7), las soluciones (47.12) no tienen límite determinado, aunque son acotadas en el punto c_k. Si, en cambio, $\beta_k = 0$, entonces $G(c_k) = 0$, y en este caso $b(c_k) = 0$. La integral singular en (47.12) tiene, en virtud de la fórmula (8.1), una singularidad logarítmica. Pero las soluciones resultan ser continuas en el punto c_k, puesto que $b(c_k) = 0$.

El índice $\varkappa$ del problema de Riemann (47.6) en la clase dada, lo llamaremos *índice* de la misma *ecuación integral*. Las propiedades de la ecuación singular característica pueden enunciarse igual que en el p. 21.2, donde la solución y el índice deben considerarse pertenecientes a una misma clase. No vamos a repetirlas aquí. Lo mismo que para el problema de Riemann, la admisión de que una solución no es acotada cerca de alguno de los extremos no singulares aumenta el número de soluciones de la ecuación integral en una unidad. El número máximo de soluciones la ecuación tiene en la clase $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ y el mínimo, en la clase h_0. La diferencia entre los números de soluciones en estas clases equivale al número q de extremos no singulares. (En este caso el número de las condiciones de resolubilidad se entiende como el número de soluciones tomado con el signo opuesto.)

Es fácil de comprobar, teniendo en cuenta la propiedad de la función Z (t), que R transforma toda función $f(t)$ de la clase

[1]) N. I. Musjelishvili [16] la denomina *función canónica de la ecuación integral* (47.5) *de la clase dada*.

$h(c_1, \ldots, c_p)$ en la función $\varphi(t)$ de la misma clase. Esto justifica la condición que se ha impuesto sobre el término independiente $f(t)$ al principio del punto corriente.

OBSERVACIÓN 1. Según lo indicado en el p. 43.4, al buscar la solución general del problema de contorno de Riemann en alguna clase $H(c_1, \ldots, c_p)$, la solución particular del problema no homogénea, que figura en la fórmula de la solución general, puede tomarse en cualquier otra clase más estrecha $H(c_1, \ldots, c_r)$ $(r < p)$. Denotemos mediante $X(z)$ una función canónica del problema de Riemann en la clase $H(c_1, \ldots, c_p)$, y mediante $X_1(z)$, en la clase $H(c_1, \ldots, c_r)$; las funciones canónicas de la ecuación característica singular que les corresponden conforme a la fórmula (47.13) las designaremos con $Z(t)$ y $Z_1(t)$.

Entonces la solución general de la ecuación característica en la clase $h(c_1, \ldots, c_p)$ puede ser dada como sigue

$$\varphi(t) = a(t) f(t) - \frac{b(t) Z_1(t)}{\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{Z_1(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + b(t) Z(t) P_{\varkappa-1}(t). \quad (47.11')$$

OBSERVACIÓN 2. Si en calidad de término independiente $f(t)$ tomamos las funciones de la clase más amplia, lo que se hacía para $g(t)$ al final del p. 41.5, entonces la solución de la ecuación en consideración puede tener singularidades complementarias de conformidad con las singularidades del término independiente. Sobre el carácter de estas singularidades ya se trataba detalladamente al final del p. 41.5 y aquí nos detendremos en esta cuestión.

OBSERVACIÓN 3. Demos a conocer la siguiente propiedad de las soluciones acotadas de una ecuación característica que será utilizada en lo sucesivo. Supongamos que el punto terminal c_k no es un punto de acotación automática (extremo no singular). En este caso toda solución $\varphi(t)$ de la ecuación característica (47.5) (cuyo miembro derecho es de Hölder), acotada en el punto c_k, se reduce en este punto a cero:

$$\varphi(c_k) = 0.$$

Efectivamente, en virtud de las fórmulas (42.10) y (47.10), la solución de la ecuación cerca del extremo c_k tiene la forma $\varphi(t) = (t - c_k)^{\alpha_k + i\beta_k} \varphi_0(t)$, donde $\varphi_0(t)$ es una función acotada en el entorno de c_k. Con ello, la parte real del exponente α_k, que determina el orden en el extremo, no puede ser negativa debido a la acotación de la solución; en virtud de que el extremo no es singular, $\alpha_k \neq 0$. Por consiguiente, $\alpha_k > 0$. De aquí se sigue la observación enunciada arriba.

47.3. Solución de la ecuación transpuesta a una característica. Examinemos una ecuación

$$K^{\circ\prime}\psi \equiv a(t)\psi(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{b(\tau)\psi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = f(t), \qquad (47.19)$$

que es transpuesta a la ecuación característica (47.5).

Al introducir una función analítica a trozos (véase el p. 21.3)

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{b(\tau)\psi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau, \qquad (47.20)$$

llegaremos al problema de contorno

$$\Omega^+(t) = \frac{1}{G(t)}\Omega^-(t) + \frac{b(t)f(t)}{a(t) - b(t)}, \qquad (47.21)$$

donde $G(t)$ se determina por la fórmula (47.7). El problema homogéneo $\Omega^+(t) = \frac{1}{G(t)}\Omega^-(t)$ se denomina *transpuesta* con relación al problema $\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t)$. Si $X(z)$ es una función canónica del problema de Riemann (47.6), entonces, obviamente, $X'(z) = 1/X(z)$ será la función canónica del problema (47.21). Además, si $X(z)$ pertenece a cierta clase $H(c_1, \ldots, c_p)$, entonces $X'(z)$ pertenece a la clase transpuesta H'. Si el orden de la función canónica $X(z)$ en el infinito (igual al índice del problema en la clase $H(c_1, \ldots, c_p)$) es $\varkappa$, entonces, por lo visto, este orden para $X'(z) = 1/X(z)$ será $-\varkappa$. Por consiguiente, el índice $\varkappa'$ del problema transpuesta en la clase transpuesta $H(c_{p+1}, \ldots, c_q)$ de soluciones es igual al índice del problema dado $\varkappa$ de signo contrario.

La solución general del problema de contorno (47.21) en la clase $H(c_{p+1}, \ldots, c_q)$ puede escribirse en la forma

$$\Omega(z) = \frac{[X(z)]^{-1}}{2\pi i}\int_L \frac{X^+(\tau)b(\tau)f(\tau)}{a(\tau) - b(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z} + [X(z)]^{-1}P_{-\varkappa-1}(z), \qquad (47.22)$$

donde $P_{-\varkappa-1}$ es un polinomio de grado $-\varkappa - 1$ con coeficientes arbitrarios.

Recurriendo a la fórmula de Sojotski

$$b(t)\psi(t) = \Omega^+(t) - \Omega^-(t), \qquad (47.23)$$

de la solución (47.22) del problema de Riemann obtendremos, por medio de unas operaciones habituales, la solución de la ecuación transpuesta (47.19):

$$\psi(t) = a(t)f(t) + \frac{1}{\pi i Z(t)}\int_L \frac{Z(\tau)b(\tau)f(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \frac{1}{Z(t)}P_{-\varkappa-1}(t), \qquad (47.24)$$

la cual, evidentemente, será la función de la clase transpuesta $h(c_{p+1}, \ldots, c_q)$.

Si es que $-\varkappa \leqslant 0$, es necesario poner $P_{-\varkappa-1}(t) \equiv 0$, con la particularidad de que siendo $-\varkappa < 0$, deben satisfacerse las condiciones de resolubilidad

$$\int_L Z(\tau)\, b(\tau)\, f(\tau)\, \tau^{j-1}\, d\tau = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, \varkappa). \tag{47.25}$$

La fórmula (47.24) muestra que el papel de soluciones linealmente independientes de la ecuación transpuesta (47.19) desempeñan las funciones $\psi_j(t) = \frac{1}{Z(t)}\, t^{j-1}$ $(j = 1, \ldots, -\varkappa)$. Por lo tanto, las condiciones de resolubilidad (47.14) de la ecuación característica dada (47.5) pueden ser escritas en la forma

$$\int_L f(\tau)\, \psi_j(\tau)\, d\tau = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, -\varkappa). \tag{47.26}$$

Esto es el segundo teorema de Noether (véase el p. 23.2), demostrado aquí para un caso particular de la ecuación característica. Dicho teorema, al igual que los otros teoremas de Noether, serán demostrados en el p. 48.5 para el caso general de una ecuación completa.

47.4. Ejemplos. 1. A título del primer ejemplo consideremos una ecuación integral singular característica de primera especie.

Hagamos en la ecuación (47.5) $a(t) \equiv 0$. Debido a la condición $a(t) \pm b(t) \neq 0$, $b(t)$ no se reduce a cero en ningún punto de L. Al dividir por $b(t)$, podemos representar la ecuación en la forma

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = f(t).$$

Por consiguiente, la resolución de una ecuación integral de primera especie es la inversión de una integral singular de tipo de Cauchy. Este problema ha sido resuelto en el p. 42.3. En este caso todos los extremos son no singulares ($q = 2m$). En la clase $h(c_1, \ldots, c_p)$ el problema tiene, para $p \geqslant m$, $p - m$ soluciones linealmente independientes; cuando $p < m$, el problema tiene solución, siempre que se cumplan $m - p$ condiciones de resolubilidad. No escribiremos otra vez las fórmulas correspondientes.

2. Examinemos una ecuación integral que aparece en la resolución de un problema mecánico concreto

$$a\varphi(t) + \frac{a_0 + a_1 t}{\pi} \int_0^l \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = b_0 + b_1 t.$$

De contorno L sirve un segmento del eje real $(0, l)$; a, a_0, a_1, b_0, b_1 son constantes reales.

Por un procedimiento habitual reduzcamos la ecuación al problema de contorno de Riemann

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t),$$

$$G(t) = \frac{a - i(a_0 + a_1 t)}{a + i(a_0 + a_1 t)}, \quad g(t) = \frac{b_0 + b_1 t}{a + i(a_0 + a_1 t)}.$$

Hemos llegado al problema de contorno, examinado en el p. 43.3. La solución de la ecuación de partida se obtendrá según la fórmula de Sojotski

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t).$$

Concedemos que el propio lector escriba la solución, sirviéndose de las fórmulas (43.20) y (47.12).

3. Consideremos en el segmento $[\alpha, \beta]$ una ecuación homogénea con coeficientes constantes

$$a\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = 0 \qquad (47.27)$$

y a su base indiquemos un método para calcular algunas integrales singulares. Buscando, mediante las fórmulas generales, la solución de la ecuación homogénea y sustituyéndola en la propia ecuación, llegaremos a una identidad que proporciona la expresión para cierta integral singular. Tomemos en (47.27) $a = i \operatorname{ctg} \mu\pi$ $(0 < \mu < 1)$. Entonces $G(t) = e^{2\pi i \mu}$. El índice en la clase de funciones no acotadas en ambos extremos es igual a 1. De conformidad con la fórmula (47.12) encontramos que la solución general de la ecuación (47.27) tiene la forma

$$\varphi(t) = \frac{c}{(t-\alpha)^\mu (\beta - t)^{1-\mu}}.$$

Sustituyendo esta solución en la ecuación (47.27) llegamos a la identidad

$$\int_\alpha^\beta \frac{d\tau}{(\tau-\alpha)^\mu (\beta-\tau)^{1-\mu}(\tau - t)} = \frac{\pi \operatorname{ctg} \mu\pi}{(t-\alpha)^\mu (\beta - t)^{1-\mu}} \quad (0 < \mu < 1), \qquad (47.28)$$

la cual nos hará falta en el p. 54.2, cap. VII.

En el problema 21 al presente capítulo el lector puede encontrar unas integrales singulares más complejas que se calculan con la ayuda del método indicado.

47.5. Ecuación en el semieje real. En todos los razonamientos antecedentes del capítulo presente se suponía que el contorno era finito, y, por lo tanto, los «extremos», números finitos. Mostremos con un ejemplo más sencillo, cómo se debe proceder en el caso en que un «extremo» se encuentra en el infinito. Consideraremos una ecuación característica

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_0^\infty \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = f(t). \qquad (47.29)$$

Para su resolución se presentan posibles dos caminos:

1. Reducir la ecuación, cambiando la variable independiente, al caso ya estudiado de un contorno finito.

2. Aplicar inmediatamente para el contorno infinito los razonamientos análogos a aquellos que fueron empleados en la resolución de la ecuación en el contorno finito.

Vamos a utilizar el primer camino. Este nos ofrece un procedimiento más simple para determinar las clases de soluciones admisibles en un extremo infinito. Introduzcamos nuevo par de variables σ, s, empleando las sustituciones

$$\tau = \frac{\sigma}{1-\sigma}, \quad t = \frac{s}{1-s}, \quad d\tau = \frac{d\sigma}{(1-\sigma)^2}, \quad \frac{1}{\tau - t} = \frac{(1-s)(1-\sigma)}{\sigma - s}. \tag{47.30}$$

El semieje positivo real pasa, como resultado, en el segmento [0, 1]. Al introducir las designaciones

$$\begin{gathered} a(t) = A(s), \quad b(t) = B(s), \quad \frac{f(t)}{1-s} = F(s), \\ \frac{\varphi(t)}{1-s} = \psi(s), \quad \frac{\varphi(\tau)}{1-\sigma} = \psi(\sigma), \end{gathered} \tag{47.31}$$

levemos la ecuación dada a la forma

$$A(s)\psi(s) + \frac{B(s)}{\pi i}\int_0^1 \frac{\psi(\sigma)}{\sigma - s}\, d\sigma = F(s). \tag{47.32}$$

En la última ecuación tomemos en el extremo superior dos clases habituales de soluciones: acotadas

$$|\psi(s)| < M$$

y no acotadas integrables

$$|\psi(s)| < \frac{M}{(1-s)^{\alpha}} \quad (0 < \alpha < 1).$$

En virtud de las igualdades (47.31) y correlación $1 - s = 1/(1 + t)$, que se desprende de (47.30), se obtiene que las soluciones correspondientes de la ecuación de partida en el entorno del infinito deben satisfacer las siguientes correlaciones:

$$|\varphi(t)| < \frac{M}{1+t}, \tag{47.33}$$

$$|\varphi(t)| < \frac{M}{|1-t|^{1-\alpha}} \quad (0 < \alpha < 1). \tag{47.34}$$

De este modo, a las soluciones acotadas en el extremo superior les corresponden unas soluciones que en el infinito se reducen a cero cuyo orden no es inferior a la unidad. A las soluciones integrables no acotadas corresponden unas soluciones que en el infinito se reducen

a cero de cualquier orden positivo. Ha de ser notado, además, que en la condición (47.33) la disminución de primer orden exacto tendrá lugar solamente en el caso en que un punto infinitamente alejado sea el extremo de acotación automática ($G(\infty) > 0$). En todos los casos restantes en lugar de (47.33) se debe satisfacer la condición

$$|\varphi(t)| < \frac{M}{|1+t|^{1+\alpha}}.$$

De la correlación $f(t) = (1-s)F(s) = \frac{F(s)}{1+t}$ se sigue que a las clases de término independiente, usadas en el presente capítulo, sean acotadas o no acotadas, les van a corresponder en el extremo infinito las clases de términos independientes que se reducen a cero de orden no inferior a la unidad o de cualquier orden positivo.

Teóricamente la ecuación transformada (47.32), recién utilizada por nosotros, puede servir también para la resolución práctica de la ecuación (47.29), dada originalmente en el contorno infinito, para lo cual se emplean las fórmulas de este párrafo. La ecuación de partida puede resolverse asimismo inmediatamente en las clases (47.33), (47.34), siendo empleado para ello el método del párrafo presente (los pormenores están omitidos).

Indiquemos en conclusión que como en este caso las soluciones nulas en el infinito están ausentes, desaparecen también las dificultades (véase el p. 21.6) relacionadas con la teoría de tales soluciones.

47.6. Acerca del método de factorización incompleta [1]). La esencia de este método se pone de manifiesto al considerarse el problema de Riemann

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L, \tag{47.35}$$

en el simple contorno suave y cerrado L. Según hemos visto, este problema se resuelve por «factorización» del coeficiente $G(t)$, es decir, representándolo en forma de la razón

$$G(t) = \frac{\Omega^+(t)}{\Omega^-(t)}, \quad t \in L. \tag{47.36}$$

En el caso elemental, cuando $G(t) \neq 0$ e $\operatorname{Ind} G(t) = 0$, Ω^+ y Ω^- se llaman funciones *de factorización*; ellas son analíticas y están privadas de ceros en el interior y en el exterior del contorno L, respectivamente. Pero, ya para $\operatorname{Ind} G(t) \neq 0$, nos vemos obligados a admitir en estas funciones los ceros y polos. Habitualmente a título de funciones de factorización se eligen funciones canónicas (véase el § 14), en las cuales los ceros o los polos se admiten en un único

[1]) Los datos para este punto se han tomado de las obras de Yu. I. Cherski 3), 4)*.

punto, esto es, en el punto infinitamente alejado. Sin embargo, conviene subrayar que son totalmente aplicables las funciones de factorización cuyos ceros o polos están concentrados en cualquier otro punto del plano complejo (incluso en el de contorno), o bien simultáneamente en varios puntos. En este caso el proceso de resolución del problema queda el mismo: una prolongación analítica y el empleo del teorema generalizado de Liouville. La diferencia consistirá en lo que en lugar de un polinomio con coeficientes arbitrarios, que aparecía como resultado de resolución en el caso de índice positivo, ahora habrá una función racional con parámetros constantes cuyo número es una unidad mayor que el índice. De este modo cualquier factorización conduce al objetivo.

Está claro que cuanto más sustancial es la diferencia entre la función de factorización y la canónica, tanto mayor será la cantidad de dificultades complementarias en la resolución definitiva del problema de Riemann, pero actualmente para nosotros es de mayor importancia recalcar la posibilidad de obtener la solución en principio. Para las funciones de factorización se pueden admitir, además de los polos, también otras singularidades, en particular, una discontinuidad a lo largo de ciertas líneas. Precisamente las funciones de esta índole se usan *en el método de factorización incompleta.*

Supongamos, por ejemplo, que la función $\Omega^+(z)$ es analítica y no tiene ceros en el interior de L, mientras que $\Omega^-(z)$, siendo analítica, no tiene ceros en el exterior de L, a excepción de los puntos del contorno abierto Γ (dispuesto fuera de L), en el cual $\Omega^-(z)$ experimenta una discontinuidad de primera especie.

Como siempre al resolver el problema de Riemann, sustituyamos (47.36) en (47.35) y escribamos la función conocida

$$h(t) = \frac{g(t)}{\Omega^+(t)}$$

en la forma de una diferencia entre valores límites de las funciones analíticas en el interior y fuera de L,

$$h(t) = h^+(t) - h^-(t).$$

Obtendremos

$$\frac{\Phi^+(t)}{\Omega^+(t)} - h^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{\Omega^-(t)} - h^-(t) = F(t) \quad t \in L. \tag{47.37}$$

Una prolongación analitíca a través del contorno L, posible en vista de la igualdad izquierda de (47.37), muestra que $F(t)$ es el valor en el contorno L de una nueva función incógnita $F(z)$ que es analítica a trozos y tiene un único salto a lo largo de Γ. Las fun-

ciones buscadas $\Phi^+(t)$ y $\Phi^-(t)$ se expresan en términos de $F(t)$ mediante las igualdades

$$\begin{aligned} \Phi^+(t) &= \Omega^+(t) F(t) + \Omega^+(t) h^+(t), \\ \Phi^-(t) &= \Omega^-(t) F(t) + \Omega^-(t) h^-(t), \end{aligned} \quad t \in L. \qquad (47.38)$$

Hallemos la condición de contorno para determinar la función $F(t)$. Con este fin prefijemos en Γ el sentido de recorrido y convengamos en designar con el signo $+$ (al pie del símbolo) los valores límites de las funciones analíticas al aproximarse hacia Γ desde la izquierda, y con el signo—(al pie del símbolo), al aproximarse desde la derecha. De la continuidad de la función $\Phi^-(z)$ fuera de L proviene la igualdad

$$\Phi^-_+(\tau) = \Phi^-_-(\tau), \quad \tau \in \Gamma,$$

o, en la forma desarrollada,

$$\Omega^-_+(\tau) F_+(\tau) + \Omega^-_+(\tau) h^-(\tau) = \Omega^-_-(\tau) F_-(\tau) + \Omega^-_-(\tau) h^-(\tau), \quad \tau \in \Gamma. \quad (47.39)$$

Esto es un problema de contorno de Riemann en el contorno Γ con una función desconocida, analítica a trozos $F(z)$. Al haber determinado la última, encontraremos, según las fórmulas (47.38), la solución del problema de Riemann de partida (47.35).

Para el propio problema de Riemann la aplicación de tal factorización incompleta puede resultar conveniente sólo en aquellos raros casos cuando, por ejemplo, el coeficiente $G(t)$ en L es una función generalizada (funcional lineal) en la cual se supone prefijada sólo factorización incompleta. Pero, los razonamientos expuestos arriba a veces suelen ser útiles en la resolución de otros problemas de la teoría de funciones analíticas en cuyas condiciones de contorno hay más que dos sumandos que contienen las funciones buscadas. El método habitual de factorización no puede ser aplicado para estos problemas.

Examinemos un problema de este género. Se necesita hallar una función $\Phi(z)$, analítica a trozos (el eje real es línea de saltos) y acotada en todo el plano, sirviéndose de la condición de contorno

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Phi^+(x) + \lambda \overline{\Phi^+(-x)} - \Phi^-(x) = g(x), \qquad (47.40)$$

$$-\infty < x < \infty, \quad \sqrt{x^2+1} > 0.$$

El problema de contorno propuesto es un problema con conjugación y traslación ($\alpha(x) = -x$). Como ya vimos en los pp. 39.3, 39.4, en el caso general los problemas de tal género no se resuelven en la forma cerrada, sino que se reducen a unas ecuaciones integrales. En lo ulterior será mostrado que con la ayuda del método de factorización incompleta el problema planteado puede ser reducido a unos problemas que se resuelven en cuadraturas.

La función $\overline{\Phi^+(-x)}$ puede considerarse como valor de contorno de la función $\overline{\Phi^+(-\bar{z})}$. La última puede ser obtenida de $\Phi^+(z)$ con la ayuda de dos operaciones: una transformación $\Phi_1^-(z) = \Phi^+(-z)$, que convierte $\Phi^+(z)$ en la función $\Phi_1^-(z)$, analítica en el semiplano inferior, y la transformación de simetría $\overline{\Phi^+(-\bar{z})} = \overline{\Phi_1^-(\bar{z})}$, que convierte (véase el p. 30.2) $\Phi_1^-(z)$ en una función analítica en D^+. Por consiguiente, $\overline{\Phi^+(-x)}$ es el valor de contorno de una función analítica en D^+.

La función $\sqrt{x^2+1}$ será el valor de contorno de la función analítica $\sqrt{z^2+1}$, que posee los puntos de ramificación $\pm i$. De la condición $\sqrt{x^2+1} > 0$ se deduce que el corte realizado entre los puntos de ramificación, que sujeta la rama unívoca, no puede cruzar el eje real. Por lo tanto, el corte debe pasar por el punto infinitamente alejado. Hagámoslo por el eje imaginario.

Escribamos la condición de contorno, como siempre, en una forma que sea cómoda para la prolongación analítica

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\Phi^+(x) + \lambda\overline{\Phi^+(-x)} - g^+(x) = \Phi^-(x) - g^-(x) = F(x). \quad (47.41)$$

A diferencia de una solución habitual del problema de contorno de Riemann, $F(z)$ ya no será un polinomio, sino tendrá en el semiplano superior la misma singularidad que tiene la función $\frac{\Phi^+(z)}{\sqrt{z^2+1}}$, es decir, una línea de saltos a lo largo del tramo del eje imaginario $\Gamma = (i, i\infty)$. El problema se ha reducido a la determinación de la función $F(z)$, analítica en el plano cortado a lo largo de Γ.

En la igualdad (47.41) sustituimos x por $-x$ y pasamos a valores conjugados. Al eliminar del sistema obtenido $\overline{\Phi^+(-x)}$, obtendremos

$$\Phi^+(x) = \frac{x^2+1}{\lambda^2x^2+\lambda^2-1}\left\{\lambda\left[\overline{F(-x)} + \overline{g^+(-x)}\right] - \frac{F(x)+g^+(x)}{\sqrt{x^2+1}}\right\}. \quad (47.42)$$

Una función analítica con línea de saltos puede ser representada en la forma de la integral de tipo de Cauchy a lo largo de dicha línea con densidad buscada:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_i^{i\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\, d\tau + c. \quad (47.43)$$

Definamos el comportamiento de $\varphi(\tau)$ en los extremos i, $i\infty$. De la expresión (47.41) obtenemos, tomando en consideración la acotación de $\Phi^+(z)$ en los puntos i y $i\infty$, que $F(z)$ en el infinito debe ser acotada, mientras que en el punto i se admite un crecimiento de orden $|z - i|^{-1/2}$. De aquí, al tener en cuenta las propiedades de la inte-

gral de tipo de Cauchy, se obtiene que $\varphi(\tau)$ debe satisfacer las condiciones

$$|\varphi(\tau)| < \frac{A}{|\tau - i|^{1/2}}, \quad |\varphi(\tau)| < \frac{M}{|\tau|^{\mu}}, \quad \mu > 0. \qquad (47.44)$$

Haciendo uso del hecho de que $\Phi^+(z)$ es continua en Γ:

$$\Phi^+(iy - 0) = \Phi^+(iy + 0),$$

formemos una ecuación integral para $\varphi(\tau)$. Empleando las fórmulas de Sojotski, tomemos en la expresión (47.42) los valores límites de $F(z)$ en Γ a la izquierda y a la derecha, y sustituyamos en la última igualdad, teniendo presente las correlaciones $\sqrt{(iy-0)^2+1} = -\sqrt{(iy+0)^2+1}$. Obtendremos

$$\lambda\overline{\varphi(iy)} + \frac{1}{\pi\sqrt{y^2-1}} \int_1^{\infty} \frac{\varphi(i\eta)}{\eta - y}\, d\eta = \frac{2ig^+(iy) + 2ic}{\sqrt{y^2-1}},$$

$$y > 0, \qquad \sqrt{y^2-1} > 0.$$

Al poner $\varphi(iy) = u(y) + iv(y)$, $g^+(iy) = g_1(iy) + ig_2(iy)$, $c = c_1 + ic_2$, y separando en la última igualdad las partes real e imaginaria, obtendremos dos ecuaciones características independientes para determinar $u(y)$ y $v(y)$:

$$\begin{aligned} \lambda\sqrt{y^2-1}\, u(y) + \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{u(\eta)}{\eta - y}\, d\eta &= 2g_2(y) + c_2, \\ \lambda\sqrt{y^2-1}\, v(y) - \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{v(\eta)}{\eta - y}\, d\eta &= 2g_1(y) + c_1. \end{aligned} \qquad (47.45)$$

La clase de sus soluciones se define por las condiciones (47.44). Hay que tomar en consideración también las condiciones necesarias de resolubilidad del problema:

$$\operatorname{Im}\left[F\left(i\frac{\sqrt{\lambda^2-1}}{|\lambda|}\right) + g^+\left(i\frac{\sqrt{\lambda^2-1}}{|\lambda|}\right)\right] = 0, \text{ si } |\lambda| \geqslant 1,$$

$$F\left(\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}\right) + g^+\left(\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}\right) = \overline{F\left(-\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}\right)} + \overline{g^+\left(-\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}\right)}, \quad \text{si } |\lambda| < 1. \qquad (47.46)$$

Estas condiciones suprimen los polos de la función (47.42), engendrados por la presencia del factor $\frac{1}{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 - 1}$ en la fórmula (47.42). Al resolver el sistema de ecuaciones (47.45) (véase el p. 47.5) en con-

junto con las condiciones (47.46), hallaremos $\varphi(\tau)$ y con ésta la solución del problema planteado.

Por el método de factorización incompleta se resuelve el problema de contorno de Riemann para un sistema de dos pares de funciones

$$\begin{aligned} \Phi_1^+(x) &= \sqrt{x^2+\sigma^2}\,\Phi_1^-(x) + \Phi_2^-(x) + g_1(x), \\ \Phi_2^+(x) &= \Phi_1^-(x) + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+\sigma^2}}\,\Phi_2^-(x) + g_2(x) \end{aligned} \qquad (-\infty < x < \infty),$$

donde λ y σ son constantes. A este tipo de problemas se reduce el problema mixto fundamental para un semiespacio elástico, como también ciertos otros problemas de la física matemática.

Por fin, el método de factorización incompleta puede ser útil en el estudio de unos problemas nuevos. Supongamos, por ejemplo, que en la factorización (47.36) la función $\Omega^-(z)$ tiene, al lado con la discontinuidad Γ, los ceros en el conjunto numerable de puntos a_k y los polos simples en el conjunto numerable de puntos b_k ($k = 1, 2, \ldots$). En este caso el problema de Riemann (47.35) se reducirá a otro problema, en el cual para la función buscada $F(z)$ se admiten, además de la discontinuidad Γ, los polos en los puntos a_k. Con ello, a la par con la condición de contorno (47.39), habrá asimismo un conjunto numerable de condiciones de tipo $F(b_k) = c_k$ ($k = 1, 2, \ldots$), donde c_k son los números conocidos. De este modo, al investigar los problemas de contorno para las funciones meromorfas a trozos con un conjunto numerable de condiciones adicionales, se puede utilizar las relaciones que existen entre estos problemas y el problema de Riemann corriente.

47.7. Ecuación característica en el espacio de Banach. La investigación de Yu. I. Cherski 1) referente al problema de Riemann en el espacio de Banach fue extendida por S. G. Samko 8) a un caso más general, correspondiente al contorno abierto y los coeficientes discontinuos (véase el p. 16.3). En el espacio de Banach X se ha considerado una ecuación singular general

$$(A_1 + A_2 PS)\,\varphi = f, \qquad (47.47)$$

correspondiente al problema de contorno de Riemann y análogo de una ecuación característica en un contorno abierto y con coeficientes discontinuos. El operador S se determina, como antes, por la condición $S^2 = I$, $S \neq \pm I$ mientras que el operador P, determinado como un proyector $P^2 = P$, correspondía a la operación de multiplicación por una función característica

$$p(t) = \begin{cases} 1, & t \in L, \\ 0, & t \overline{\in} L \end{cases}$$

del contorno L. La resolubilidad de la ecuación (47.47) depende de un número entero $\varkappa$, determinado, al igual que en la obra de Yu. I. Cherski 1), por la representación

$$A = \Psi_+^- U^{\varkappa} \Psi_-,$$

donde los operadores determinados de modo axiomático $\Psi_{\pm}$ son los análogos de multiplicación por los valores límites de funciones analíticas, y $U^{\varkappa}$ es el análogo de multiplicación por la potencia $t^{\varkappa}$. Una diferencia considerable con respecto a las consideraciones de Yu. I. Cherski consiste aquí en lo que los operadores $\Psi_{\pm}^{+}$ no son acotados en el espacio considerado X, actuando de X a un espacio más amplio X_1. Para ciertas suposiciones respecto de los operadores A_1, A_2, la solución de la ecuación (47.47) se ha obtenido en la forma explícita.

§ 48. Ecuación completa para contornos abiertos y coeficientes discontinuos

La teoría completa de la ecuación integral (47.1) en el caso que se considera, como también en el caso de un contorno cerrado, consta de dos partes:

1. La regularización, incluidas la elaboración de los métodos de regularización y la investigación de la relación entre las soluciones de la ecuación singular de partida y la ecuación regular obtenida (las cuestiones de la regularización equivalente).

2. Las propiedades fundamentales de la ecuación singular (teoremas de Noether).

Los métodos de investigación serán, en lo principal, los mismos que se han usado en el caso de un contorno cerrado y los coeficientes continuos (cap. III).

Según veremos, la diferencia entre el caso en consideración y el de un contorno cerrado consiste en lo que el producto de dos funciones integrables $\varphi(t)$, $\psi(t)$ puede resultar no integrable. Con el fin de asegurar la integrabilidad del producto se debe preocupar de que ambos factores no se reduzcan al infinito en un mismo extremo. Recordando las propiedades de las clases transpuestas, de que se trató en el § 47, concluimos con facilidad que el producto de funciones pertenecientes a clases transpuestas siempre resultará ser integrable.

La parte original de la teoría a seguir consistirá en la aclaración cada vez de la cuestión: ¿de qué clase (véase el § 47) deben tomarse las funciones correspondientes?

48.1. Regularización mediante la solución de la ecuación característica. La información fundamental sobre la regularización de una ecuación integral singular completa fue dada en los §§ 22 y 24, y en lo que sigue utilizaremos las nociones y designaciones adoptadas en los párrafos indicados.

En el caso que se considera son aplicables los mismos tres métodos de regularización que nos sirvieron en el caso de un contorno cerrado: regularización a la izquierda, regularización a la derecha y regularización mediante la solución de una ecuación característica. Empecemos la exposición por el último método, puesto que es más sencillo para la investigación del comportamiento de los núcleos que surgen y de las clases admisibles de soluciones. Con el objeto de no

complicar la exposición, examinemos al principio el caso de coeficientes continuos y contorno abierto. La extensión de los resultados de dicha investigación al caso de coeficientes discontinuos no representará dificultades algunas.

Escribamos la ecuación completa (47.1) en la forma

$$a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau = f(t)-\int\limits_L k(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau, \qquad (48.1)$$

o, en una forma simbólica

$$K^{\circ}\varphi = f - k\varphi \qquad (48.1')$$

y resolvámosla como característica, considerando el segundo miembro en calidad de una función conocida. Buscaremos la solución en cierta clase $h(c_1, c_2, \ldots, c_p) = h$. Supondremos, para simpleza, que $f(t)$ satisface la condición de Hölder. Si, conforme a lo supuesto en el p. 47.1, $k(t, \tau)$ satisface la condición de Hölder según ambas variables, y $\varphi(t)$ pertenece a la clase h, entonces, como es fácil de deducir, $k\varphi$ satisface la condición de Hölder, por lo cual, todo el miembro derecho de la igualdad (48.1) satisface dicha condición.

Al aplicar la fórmula (47.12), obtendremos (véase el p. 24.6)

$$\varphi(t)+\int\limits_L K(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = f_1(t), \qquad (48.2)$$

donde

$$K(t,\tau) \equiv R_t k(t,\tau) = a(t)k(t,\tau) - \frac{b(t)Z(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{k(\tau_1,\tau)}{Z(\tau_1)}\frac{d\tau_1}{\tau_1-t},$$

$$f_1(t) = a(t)f(t) - \frac{b(t)Z(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-t} + b(t)Z(t)P_{\varkappa-1}(t),$$

$$Z(t) = [a(t)+b(t)]X^+(t) = \qquad (48.3)$$

$$= [a(t)-b(t)]X^-(t) = \prod_{k=1}^{m}(t-b_k)^{-\varkappa_k}e^{\Gamma(t)},$$

$$\Gamma(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau-t}\,d\tau.$$

Si es que $\varkappa \leqslant 0$, se debe poner $P_{\varkappa-1} \equiv 0$, con la particularidad de que para $\varkappa < 0$ deben cumplirse las correlaciones funcionales

$$\int\limits_L \left[\int\limits_L \frac{k(t,\tau)}{Z(t)}t^{j-1}\,dt\right]\varphi(\tau)\,d\tau = \int\limits_L t^{j-1}\frac{(t)}{Z(t)}\,dt \qquad (48.4)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, -\varkappa).$$

Las últimas condiciones pueden presentarse también en la forma

$$\int_L \rho_j(\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = f_j, \qquad (48.4')$$

donde se ha puesto

$$\rho_j(\tau) = \int_L \frac{k(t,\tau)}{Z(t)}\,t^{j-1}\,dt, \quad f_j = \int_L t^{j-1}\,\frac{f(t)}{Z(t)}\,dt. \qquad (48.5)$$

Si la ecuación prefijada (48.1) es resoluble, las condiciones (48.4) resultarán cumplidas.

48.2. Investigación de una ecuación regularizada. Investiguemos el núcleo $K(t, \tau)$ y el término independiente $f_1(t)$ de la ecuación (48.2), obtenida como resultado de regularización de la ecuación singular de partida (48.1). Para las suposiciones hechas en el punto 48.1 respecto a las funciones prefijadas $k(t, \tau)$, $f(t)$, dichas funciones satisfarán, evidentemente, la condición de Hölder en todos los puntos del contorno, distintos de los extremos. Examinaremos su comportamiento en los extremos.

De acuerdo con la fórmula (47.17)

$$Z(t) = \omega_0(t)\prod_{k=1}^{2m}(t-c_k)^{\gamma_k}; \quad \gamma_k = \alpha_k + i\beta_k, \qquad (48.6)$$

$$-1 < \alpha_k < 0 \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots, p,$$

$$0 < \alpha_k < 1 \quad \text{para } k = p+1, \ldots, q,$$

$$\alpha_k = 0 \quad \text{para } k = q+1, \ldots, 2m,$$

$\omega_0(t)$ es una función que satisface la condición de Hölder y no se reduce a cero.

De las fórmulas (48.3) es fácil concluir que las funciones $K(t, \tau)$ y $f_1(t)$ se comportarán en los extremos $c_1, c_2, \ldots, c_p$ igual que la función $Z(t)$, es decir, se reducirán al infinito de orden α_k. En los demás extremos serán acotadas. Así pues, el núcleo $K(t, \tau)$ y el término independiente $f_1(t)$, al tener en los extremos $c_1, \ldots, c_p$ un infinito fijo, no satisfacen las condiciones que se imponen sobre estas funciones en la teoría de Fredholm[1]). No obstante, cambiando las variables para la función φ y el argumento de integración τ, es fácil deshacerse de los infinitos fijos y llevar la ecuación a una forma, cuando el núcleo y el término independiente se subordinan a todas las condiciones de la teoría de Fredholm.

---

[1]) Solamente en el caso de un infinito móvil de orden inferior a la unidad, es decir, infinito de tipo $(\tau - t)^{-\alpha}(0 < \alpha < 1)$, este orden disminuye, realizándose la iteración, y existe un número m tal que m-ésimo núcleo de iteración esté acotado.

En efecto, designaremos

$$T(t) = \prod_{k=1}^{p} (t - c_k)^{\gamma_k} \tag{48.7}$$

y hagamos la sustitución

$$\varphi(t) = T(t)\,\varphi_0(t). \tag{48.8}$$

La ecuación (48.2) adquiere la forma

$$\varphi_0(t) + \int_L \frac{K(t, \tau)\,T(\tau)}{T(t)}\,\varphi_0(\tau)\,d\tau = \frac{f_1(t)}{T(t)}.$$

Ahora ya no hay infinitos fijos respecto de la variable t, pero aparecieron los mismos respecto de la varibale τ. Con el fin de deshacerse de los últimos, realicemos, además, el cambio de las variables independientes:

$$\tau_1 = \int_{a_k}^{\tau} T(\tau)\,d\tau, \quad t_1 = \int_{a_k}^{t} T(t)\,dt \text{ en } L_k\,(k = 1, 2, \ldots, m). \tag{48.9}$$

Designando de nuevo $\varphi_0\,[t\,(t_1)]$ mediante $\varphi_0\,(t_1)$, llegaremos a la ecuación

$$\varphi_0(t_1) + \int_\Gamma K_1(t_1, \tau_1)\,\varphi_0(\tau_1)\,d\tau_1 = f_2(t_1), \tag{48.10}$$

en la cual el nuevo núcleo $K_1\,(t, \tau)$ y el término independiente $f_2\,(t)$ serán acotados en el contorno nuevo Γ.

Ha de ser notado que como la inversión de las fórmulas (48.9) no es, en el caso general, unívoca, puede suceder que el contorno nuevo Γ posea puntos múltiples, lo que no tiene importancia considerable. Al haber encontrado todas las soluciones de la ecuación de Fredholm (48.10), con ayuda de la fórmula (48.8) obtendremos las soluciones de la ecuación (48.2), pertenecientes a la clase $h\,(c_1, \ldots, c_p)$.

Puesto que las soluciones de la ecuación (48.2) y (48.10) se hallan relacionadas por dependencia simple (48.8), entonces, aunque la ecuación (48.2) no es fredholmiano en el sentido cabal, pero para ella resultan ser válidos todos los teoremas de Fredholm. Toda la diferencia consiste en lo que sus soluciones no serán acotadas, como se prevé en la teoría de Fredholm, sino que pertenecerán a la clase $h\,(c_1, \ldots, c_p)$.

Por consiguiente, podemos afirmar que como resultado de regularización la ecuación singular se reduce a la de Fredholm.

Si tomamos una ecuación homogénea

$$\psi(t) + \int_L K(\tau, t)\,\psi(\tau)\,d\tau = 0, \tag{48.11}$$

transpuesta a la ecuación (48.2) y realizamos en ella un cambio de variables por analogía con (48.8), (48.9), entonces resulta fácil de establecer que llegamos a la ecuación de Fredholm

$$\psi_0(t_1) + \int_\Gamma K_1(\tau_1, t_1)\,\psi_0(\tau_1)\,d\tau_1 = 0, \tag{48.12}$$

transpuesta a la ecuación (48.10).

48.3. Ecuación característica de coeficientes discontinuos en un contorno compuesto. Antes de pasar a la investigación de una ecuación completa de coeficientes discontinuos consideraremos una ecuación característica correspondiente. Como ya hemos visto en los §§ 41-46, la teoría del problema de contorno de Riemann en el caso general de un contorno compuesto arbitrario y coeficientes discontinuos poco se diferencia del caso de contornos abiertos simples. Teniendo en cuenta las relaciones estrechas existentes entre las ecuaciones integrales singulares y el problema de contorno de Riemann, lo mismo se debe esperar también para las ecuaciones en consideración.

Examinemos una ecuación característica

$$K^\circ\varphi \equiv a(t)\,\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = f(t), \tag{48.13}$$

suponiendo que el contorno L se compone de cualquier número finito de curvas, sean cerradas o abiertas, dispuestas arbitrariamente. Consideremos que los coeficientes $a(t)$, $b(t)$ satisfacen la condición de Hölder en todos los puntos del contorno, a excepción del número finito de puntos $t_1, \ldots, t_i$, donde ellos experimentan discontinuidades de primera especie. Todos los extremos de las curvas, como también los puntos de discontinuidad, los llamaremos uniformemente «extremos» (véase el p. 43.2) y designaremos $c_1, c_2, \ldots, c_r$. Para simpleza, convengamos en que los extremos no coinciden con los puntos múltiples. Igual que en todos los casos semejantes, exigimos que la ecuación se satisfaga en todos los puntos salvo los extremos y puntos múltiples. Suponemos que la condición $a^2(t) - b^2(t) = 1$ está cumplida.

Sean $c_1, c_2, \ldots, c_q$ los extremos no singulares y $c_{q+1}, \ldots, c_r$, extremos singulares. Por analogía con el p. 47.2 introduzcamos clases transpuestas $h(c_1, \ldots, c_p) = h$, $h(c_{p+1}, \ldots, c_q) = h'$. Buscaremos la solución de la ecuación en cierta clase h. El término independiente de la ecuación $f(t)$ en el caso general puede considerarse perteneciente a la misma clase h.

La solución de la ecuación (48.13) en la forma cerrada puede obtenerse por un procedimiento sumamente igual al empleado anteriormente en los casos elementales (los pp. 21.2, 47.2). Al introducir una función analítica

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau, \tag{48.14}$$

llegaremos al problema de contorno de Riemann

$$\Phi^+(t)=G(t)\,\Phi^-(t)+g(t), \tag{48.15}$$

$$G(t)=\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}, \qquad g(t)=\frac{f(t)}{a(t)+b(t)}, \tag{48.16}$$

bajo las suposiciones del § 44 para la condición $\Phi(\infty)=0$.

Al tomar, según las formulas (44.11)-(44.13), la solución de este problema en cierta clase H, sirviéndonos de la fórmula de Sojotski

$$\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t) \tag{48.17}$$

llegaremos a la solución de la ecuación de partida (48.13). Esta se representará por medio de las fórmulas

$$\varphi(t)=a(t)f(t)-\frac{b(t)Z(t)}{\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-t}+b(t)Z(t)P_{\varkappa-1}(t), \tag{48.18}$$

$$Z(t)=[a(t)+b(t)]\,X^+(t)=[a(t)-b(t)]\,X^-(t)=$$

$$=\prod_{k=1}^{r}(t-c_k)^{-\varkappa_k}e^{\Gamma(t)}, \qquad \Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau-z}\,d\tau, \tag{48.19}$$

donde los números $\varkappa_k$ se eligen en cada extremo en correspondencia con la clase escogida de soluciones.

Si $\varkappa \leqslant 0$, se debe poner $P_{\varkappa-1}(t)\equiv 0$; cuando $\varkappa<0$, tienen que cumplirse las condiciones de resolubilidad

$$\int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)}\tau^{j-1}\,d\tau=0, \qquad (j=1,2,\ldots,-\varkappa). \tag{48.20}$$

De modo análogo se resuelve la ecuación

$$K^{o\prime}\psi\equiv a(t)\psi(t)-\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{b(\tau)\psi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=f(t),$$

transpuesta a la característica.

Ejemplo. Sea L una circunferencia unitaria y L_1, L_2, unas semicircunferencias suyas, derecha e izquierda, respectivamente.

Resolvamos la ecuación singular característica

$$a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=\frac{4(t^2+1)(4t+i)}{e^{\pi t}(4t^2+1)}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\frac{it}{2}},$$

donde

$$a(t)=\frac{1}{2}(e^{-\pi t}+1), \quad b(t)=\frac{1}{2}(e^{-\pi t}-1) \quad \text{en } L_1,$$

$$a(t)=\operatorname{ch}\pi t, \quad b(t)=-\operatorname{sh}\pi t \quad \text{en } L_2$$

y la función polivalente $\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{it/2}$ viene dada por cierta rama en la clase siguiente de funciones

$$\text{a) } h(i,\ -i); \quad \text{b) } h(i).$$

Al calcular, según las fórmulas (48.16), los coeficientes $G(t)$, $g(t)$, llegaremos al problema de contorno de Riemann

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+\frac{4(t^2+1)(4t+i)}{4t^2+1}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\frac{it}{2}},$$

donde

$$G(t)=e^{\pi t} \text{ en } L_1, \quad G(t)=e^{2\pi t} \text{ en } L_2.$$

Esto es un problema de contorno, considerado en el p. 43.3 (ejemplo 2), para $a = 1/2$. Podemos hacer uso de la solución, obtenida en aquel caso, imponiendo sobre ella la condición adicional $\Phi^-(\infty) = 0$.

a) Para obtener una solución deseable de la clase $h(i, -i)$ es necesario poner en la fórmula (43.22) $a = 1/2$, $c = 0$. Obtendremos

$$\Phi^+(z)=\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{\frac{iz}{2}}\frac{6(iz-1)e^{\pi z}+4(z^2+1)(4z+i)}{4z^2+1},$$

$$\Phi^-(z)=\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{\frac{iz}{2}}\frac{6(iz-1)}{4z^2+1}.$$

Al tomar en consideración las indicaciones levantadas durante la resolución del problema de contorno respecto del método de determinar los valores límites, tendremos

$$\Phi^+(t)=\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\frac{it}{2}}\frac{6(it-1)e^{\pi t}+4(t^2+1)(4t+i)}{4t^2+1} \quad \text{en } L,$$

$$\Phi^-(t)=\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\frac{it}{2}}\frac{6(it-1)}{4t^2+1} \quad \text{en } L_1,$$

$$\Phi^-(t)=\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\frac{it}{2}}\frac{6(it-1)}{4t^2+1}e^{-\pi t} \quad \text{en } L_2.$$

De aquí

$$\varphi(t)=\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\frac{it}{2}}\frac{6(it-1)(e^{\pi t}-1)+4(t^2+1)(4t+i)}{4t^2+1} \quad \text{en } L_1,$$

$$\varphi(t)=\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\frac{it}{2}}\frac{12(it-1)\operatorname{sh}\pi t+4(t^2+1)(4t+i)}{4t^2+1} \quad \text{en } L_2.$$

b) En la clase $h(i)$ el índice de la ecuación $\varkappa=-1$, por lo cual la última es resoluble sólo cuando se cumpla la condición

$$\int_L \frac{(\tau-i)(4\tau+i)e^{-\pi\tau}}{4\tau^2+1}d\tau=0.$$

Es fácil comprobar que la última igualdad se satisface. Por analogía con lo anterior obtendremos

$$\Phi^+(t)=e^{\pi t}(t+i)\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\frac{it}{2}}\frac{6i+4e^{-\pi t}(4t^2-3it+1)}{4t^2+1} \quad \text{en } L,$$

$$\Phi^-(t)=6i\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\frac{it}{2}}\frac{t+i}{4t^2+1} \quad \text{en } L_1,$$

$$\Phi^-(t)=6ie^{-\pi t}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\frac{it}{2}}\frac{t+i}{4t^2+1} \quad \text{en } L_2,$$

$$\varphi(t)=\frac{t+i}{4t^2+1}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\frac{it}{2}}[6i(e^{\pi t}-1)+4(4t^2-3it+1)] \quad \text{en } L_1,$$

$$\varphi(t)=\frac{t+i}{4t^2+1}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{\frac{it}{2}}[12i\operatorname{sh}\pi t+4(4t^2-3it+1)] \quad \text{en } L_2.$$

48.4. Regularización de la ecuación singular completa. Observemos ante todo que al considerar una ecuación completa nos encontramos con una singularidad que hace diferentes el caso de coeficientes discontinuos y el de contornos abiertos. El método de separar la parte característica que consiste en el empleo de la identidad

$$\int\frac{M(t,\tau)\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=M(t,t)\int\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau+\int\frac{M(t,\tau)-M(t,t)}{\tau-t}\varphi(\tau)d\tau,$$

se hace inaplicable en el caso de la función discontinua M, puesto que cerca del punto de discontinuidad la función subintegral tiene singularidad de tipo $(\tau-t)^{-1}$. En particular, los operadores de tipo

$$\int_L\frac{a(\tau)-a(t)}{\tau-t}\varphi(\tau)d\tau \qquad (48.21)$$

con función discontinua $a(t)$ no son regulares. De este modo, una ecuación integral singular completa debe tomarse desde el principio con la parte característica separada

$$K\varphi = K^{\circ}\varphi + k\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + \\ + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \int_L k(t, \tau)\varphi(\tau)\,d\tau = f(t). \qquad (48.22)$$

Por la misma razón la ecuación transpuesta

$$K'\psi \equiv a(t)\psi(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{b(\tau)\psi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \int_L k(\tau, t)\psi(\tau)\,d\tau = f(t)$$

ha de ser considerado como clase independiente que no se reduce a la antecedente.

Consideremos la cuestión acerca de la regularización de la ecuación singular (48.22). Apliquemos el método de composición de operadores singulares. No obstante, en el caso dado los operadores regularizadores en la forma (22.16) no sirven. Se puede probar que el empleo de los regularizadores de esta forma lleva a unas ecuaciones que no son, en general, de Fredholm. Esto introduce dificultades considerables en la investigación de las ecuaciones completas con coeficientes discontinuos. Las dificultades pueden ser evitadas sólo por la elección adecuada del regularizador especial. A título de operador acomodado para el papel de regularizador servirá aquí el operador

$$Rf = a(t)f(t) - \frac{b(t)Z(t)}{\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)}\,\frac{d\tau}{\tau - t}, \qquad (48.23)$$

el cual permite resolver la ecuación característica no homogénea. Mostremos que este operador es regularizador para el operador K, tanto a la izquierda como a la derecha. Las dificultades que surgen aquí se deben a lo que al formar las composiciones $R\mathrm{K}^{\circ}$ y $\mathrm{K}^{\circ}R$ no podemos aprovechar las fórmulas de composición citadas en el p. 22.1, puesto que en el caso de coeficientes discontinuos los operadores de tipo (48.21) no son regulares. Por esto emplearemos un procedimiento aplicado anteriormente con respecto al problema de Riemann: reduzcamos la ecuación con coeficientes discontinuos a una ecuación de coeficientes continuos. Siguiendo este procedimiento, obtendremos el regularizador R como composición de dos operadores, de los cuales uno regulariza la ecuación con coeficientes continuos que se obtiene y el otro, cierta ecuación elemental con coeficientes discontinuos.

Supongamos primero que $\varkappa = 0$. Como se sabe (fórmula (48.18)), la ecuación $K^{\circ}\varphi = f$ es, en este caso, incondicionalmente resoluble y $\varphi = Rf$. De aquí, $K^{\circ}Rf \equiv f$ y $R\mathrm{K}^{\circ}\varphi = \varphi$. Por consiguiente, para

el caso de $\varkappa = 0$, el operador R es para K un regularizador tanto a la izquierda como a la derecha.

En el caso general, siguiendo el método de reducción del problema de Riemann de coeficiente discontinuo a un problema de coeficiente continuo, repitiremos las mismas operaciones para una ecuación característica. Para simpleza, limitémonos a la exposición para el caso en que L sea un contorno cerrado simple. Supongamos que de conformidad con las consideraciones del § 41

$$\omega(t) = \prod_{k=1}^{r} (t - z_0)^{\gamma_k} = \frac{\omega^+(t)}{\omega^-(t)},$$

donde $\omega^+(t) = \prod_{k=1}^{r} (t - t_k)^{\gamma_k}$, $\omega^-(t) = \prod_{k=1}^{r} \left(\frac{t - t_k}{t - z_0}\right)^{\gamma_k}$,

y

$$G_1(t) = \frac{G(t)}{\omega(t)}.$$

El coeficiente $G_1(t)$ es continuo. Al problema de Riemann con este coeficiente corresponde, de acuerdo con (21.8), la ecuación característica

$$K_1^\circ \varphi \equiv a_1(t)\,\varphi(t) + \frac{b_1(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = f(t)$$

de coeficientes continuos $a_1(t) = \frac{1}{2}(1 + G_1)$, $b_1(t) = \frac{1}{2}(1 - G_1)$. El proceso de reducción del problema de Riemann con coeficiente $G(t)$ a un problema con coeficiente $G_1(t)$ en la forma operadora puede escribirse así:

$$K^\bullet = \Omega K_1^\bullet + T, \tag{48.24}$$

donde T es un operador con núcleo regular, y

$$\Omega\varphi = \frac{a+b}{2}\left[(1 + \omega(t))\,\varphi(t) + \frac{1 - \omega(t)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau - t}\right] \tag{48.25}$$

es un operador característico con coeficientes discontinuos de tipo especial. Sea al cargo del propio lector la comprobación de la igualdad (48.24), tomando en consideración que ahora los coeficientes continuos $a_1(t)$ y $b_1(t)$ y el operador singular pueden permutarse con la precisión hasta el sumando regular.

El coeficiente del problema de Riemann, correspondiente al operador (48.25), es igual a $\omega(t)$. Puesto que

$$\frac{\omega(t_k - 0)}{\omega(t_k + 0)} = e^{2m\gamma_k} = \rho_k e^{2\pi i\left(\frac{\theta_k}{2\pi} - \varkappa_k\right)},$$

entonces de las fórmulas (41.19)-(41.21) se deduce directamente que el índice del operador Ω es nulo. De este modo, hemos llegado a dos operadores característicos más simples K_1° y Ω: los coeficientes del primer operador son continuos, el segundo operador tiene coeficientes discontinuos, pero, a pesar de esto, el índice es nulo. De acuerdo con (48.24), la regularización del operador inicial K se reduce a la regularización de los operadores K_1° y Ω. Para el operador K_1° en calidad de regularizador izquierdo y derecho sirve el operador que viene:

$$R_1\varphi = a_1(t)\,\varphi(t) - \frac{b_1(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau.$$

Para el operador Ω cuyo índice es igual a cero, como se indicó ya más arriba, el operador correspondiente (48.23) será un regularizador izquierdo y derecho. Puesto que para el operador Ω

$$Z(t) = e^{\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln \omega^+(\tau) - \ln \omega^-(\tau)}{\tau - t}\,d\tau} = \omega^+(t)\,\omega^-(t),$$

resulta que su regularizador (48.23) tiene por expresión (con la precisión hasta el sumando que no se reduce a cero)

$$R_\Omega\varphi = (\omega(t) + 1)\,\varphi(t) + \frac{\omega(t) - 1}{\pi i}\,\omega^+(t)\,\omega^-(t)\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\omega^+(\tau)\,\omega^-(\tau)}\,\frac{d\tau}{\tau - t}.$$

Así pues, de (48 24) se deduce que de regularizador izquierdo y derecho para el operador de partida K sirve el operador

$$R = R_1 R_\Omega. \tag{48.26}$$

Se puede mostrar, multiplicando los operadores en (48.26), que el operador obtenido R difiere del operador (48.23) solamente en el sumando regular. Dejando a parte las operaciones de cálculo, indiquemos solamente que aquí también, al multiplicar los operadores en (48.26), hay que aprovechar la circunstancia de que los coeficientes del operador R_1 y el operador singular pueden permutarse con la precisión hasta el sumando regular.

Teniendo presente las aplicaciones de los métodos citados más arriba a la investigación de las cuestiones de regularización equivalente y la deducción de las propiedades fundamentales (teoremas de Noether), consideraremos el problema sobre funciones propias del operador R, construido para resolver la ecuación $K^\circ\varphi = f$ en la clase $h(c_1, \ldots, c_p)$.

Examinemos a ecuación

$$R_\varphi \equiv a(t)\,\varphi(t) - \frac{b(t)\,Z(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{Z(\tau)}\,\frac{d\tau}{\tau - t} = f(t). \tag{48.27}$$

Al introducir una función nueva $\psi(t) = \varphi(t)/Z(t)$, obtendremos la ecuación característica

$$a(t)\psi(t) - \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\psi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = \frac{f(t)}{Z(t)}.$$

Si $f(t)$ pertenecía a la clase $h(c_1, \ldots, c_p)$, entonces, como es fácil de advertir, $f(t)/Z(t)$ pertenecerá a la clase $h(c_{p+1}, \ldots, c_q)$. El índice de la última ecuación en la clase $h(c_{p+1}, \ldots, c_q)$ será $-\varkappa$. Al resolver de una manera habitual la última ecuación en la clase $h(c_{p+1}, \ldots, c_q)$, obtendremos la solución de la ecuación de partida (48.27) en la clase $h(c_1, \ldots, c_p)$, sirviéndose de la fórmula $\varphi(t) = Z(t)\psi(t)$. Esta solución se representará en la forma

$$\varphi(t) = \mathrm{K}^{\circ} f + b(t) P_{-\varkappa\,1}(t).$$

Si $\varkappa \geqslant 0$, hay que poner $P_{-\varkappa-1}(t) \equiv 0$, con la particularidad de que siendo $\varkappa > 0$, deben cumplirse $\varkappa$ condiciones de resolubilidad

$$\int_L f(t)\, t^{j-1}\, dt = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, \varkappa). \tag{48.28}$$

De este modo hemos llegado al resultado siguiente:

Cuando $\varkappa \geqslant 0$, *la ecuación homogénea* $\mathrm{R}\varphi = 0$ *es insoluble. La ecuación no homogénea es resoluble incondicional y unívocamente para* $\varkappa = 0$, *y para* $\varkappa > 0$ *es resoluble (unívocamente) sólo cuando se cumplan* $\varkappa$ *condiciones* (48.28).

Si $\varkappa < 0$, *la ecuación homogénea* $R\varphi = 0$ *tiene* $\varkappa$ *soluciones linealmente independientes. La ecuación no homogénea es incondicionalmente resoluble y su solución depende de* $\varkappa$ *constantes arbitrarias.*

Haciendo uso de las propiedades obtenidas del operador R se puede pasar a la cuestión sobre la regularización equivalente en el sentido determinado por el p. 24.1.

Si el índice del operador K en cierta clase prefijada es no negativo ($\varkappa \geqslant 0$), entonces se aplica regularización a la izquierda. La ecuación

$$R\mathrm{K}\varphi = Rf$$

será fredholmiana, equivalente a la ecuación singular de partida (48.22).

Si $\varkappa \leqslant 0$, se aplica regularización a la derecha. Al introducir una función nueva $\omega(t)$ y emplear la sustitución

$$\varphi = R\omega \tag{48.29}$$

llegamos a la ecuación

$$\mathrm{K}R\omega = f, \tag{48.30}$$

la cual será equivalente a la ecuación singular de partida en aquel sentido que en la clase dada ambas ecuaciones (48.22) y (48.30) son simultáneamente resolubles o no resolubles, y si son resolubles, a toda solución de la ecuación (48.30) le corresponde, según la fórmula (48.29), la solución determinada de la ecuación de partida (48.22), y viceversa, a toda solución $\varphi(t)$ de la ecuación de partida le corresponden, según la fórmula

$$\omega(t) = K^{\circ}\varphi + b(t) P_{-\varkappa-1}(t),$$

las soluciones de la ecuación (48.22).

Así pues, el problema de regularización equivalente en el sentido generalizado para el caso de coeficientes discontinuos y contornos abiertos se ha resuelto en la forma sumamente análoga al caso de coeficientes continuos y contornos cerrados.

48.5. Propiedades fundamentales de la ecuación singular. Todos los resultados anteriores llevan a la conclusión de que las propiedades principales de una ecuación singular, expresadas por medio de los llamados teoremas de Noether, son, en lo esencial, las mismas que las que caracterizan un contorno cerrado. Estas propiedades pueden ser obtenidas de un modo igual que en el § 23 para un contorno cerrado.

Constatamos, ante todo, que si las funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ son tales que $\psi K\varphi$ y $\varphi K'\psi$ son integrables, en particular, si φ y ψ pertenecen a las clases transpuestas, entonces resulta válida la identidad

$$\int_L \psi K\varphi\, dt = \int_L \varphi K'\psi\, dt. \tag{48.31}$$

Luego, razonando igual que en el p. 23.2, llegaremos a las propiedades principales que poseen las ecuaciones de tipo en consideración. Por analogía con los teoremas obtenidos en el caso elemental por Noether (véanse las notas históricas a los cap. III y VI), estas propiedades se denominan a veces *teoremas de Noether*. Sin repetir la deducción de estos teoremas demos a conocer su enunciación.

TEOREMA 1. *El número de soluciones linealmente independientes (de cualquier clase) de una ecuación homogénea* $K\varphi = 0$ *es finito.*

TEOREMA 2. *La condición necesaria y suficiente de resolubilidad en la clase dada h de la ecuación no homogénea* $K\varphi = f$ *consiste en el cumplimiento de las igualdades*

$$\int_L f(t)\,\psi(t)\,dt = 0, \tag{48.32}$$

donde $\psi(t)$ *es cualquier solución de clase transpuesta h' de la ecuación homogénea transpuesta* $K'\psi = 0$.

TEOREMA 3. *Si n es el número de soluciones linealmente independientes de clase h de la ecuación homogénea* $K\varphi = 0$; $\varkappa$ *es el índice de*

la ecuación en esta clase, y n' es el número de soluciones linealmente independientes de clase transpuesta h' de la ecuación homogénea transpuesta $K'\psi = 0$, *entonces*

$$n - n' = \varkappa. \tag{48.33}$$

48.6. Teoría de Noether de las ecuaciones singulares con traslación de Carleman en un contorno abierto. Una ecuación integral singular con traslación tiene (en las designaciones del p. 23.5) la expresión siguiente:

$$N\varphi \equiv a(t)\,\varphi(t) + b(t)\,Q\varphi + c(t)S\varphi + d(t)\,QS\varphi = f(t), \tag{48.34}$$

donde Q es una operación de traslación de Carleman. $Q\varphi = \varphi[\alpha(t)]$. Siguiendo siempre el esquema expuesto en el p. 23.5, se pueden obtener para esta ecuación los teoremas de Noether, al cumplirse ciertas suposiciones respecto de los coeficientes $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$.

Supongamos que el contorno es abierto y la traslación $\alpha(t)$ cambia el sentido del recorrido. Los coeficientes $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ se consideran continuos. Aplicando al operador N el operador

$$\widetilde{N}\varphi = a[\alpha(t)]\,\varphi(t) - b(t)\,Q\varphi - c[\alpha(t)]\,S\varphi - d(t)\,QS\varphi,$$

introducido en el p. 23.25, llegaremos (tomando en consideración que ahora $S^2 \neq I$) a la ecuación

$$\widetilde{N}N\varphi = m(t)\,\varphi(t) + n(t)\,S\varphi + q(t)\,S^2\varphi + T\varphi = f_1(t), \tag{48.35}$$

donde T es un operador con núcleo regular, $f_1(t) = \widetilde{N}f$, $m(t) = a(t)\,a[\alpha(t)] - b(t)\,b[\alpha(t)]$, $n(t) = a[\alpha(t)]\,c(t) - a(t)\,c[\alpha(t)] + b[\alpha(t)]\,d(t) - b(t)\,d[\alpha(t)]$, $q(t) = d(t)\,d[\alpha(t)] - c(t)\,c[\alpha(t)]$. Resulta que el operador (48.35) puede ser representado como composición de dos operadores singulares con núcleo de Cauchy. De este modo, la cuestión acerca de la validez de los teoremas de Noether para la ecuación (48.34) se reduce a la cuestión sobre su validez para las ecuaciones singulares sin traslación que ya han sido consideradas. No damos aquí el resultado definitivo y recomendamos que el lector lea la obra de *N. K. Karapetians* y *S. G. Samko* 2), en la cual los autores realizaron la investigación aquí indicada.

En el caso más general, cuando los coeficientes de la ecuación son discontinuos, el problema es mucho más complejo. Sin detenernos en esto, sólo diremos que la validez de los teoremas de Noether en el caso de coeficientes discontinuos y una traslación, que conserva el sentido del recorrido, se demuestra en la obra 3) que se debe a los autores recién mencionados.

§ 49. Problema de contorno de Riemann de índice infinito

El problema de contorno de Riemann, como también otros problemas de contorno, se resolvían hasta ahora a la condición de que sus índices eran ciertos números finitos. De esta circunstancia se desprendía que la única singularidad factible de una función canónica en su punto excepcional se representaba por un polo. Como resultado, el número de soluciones linealmente independientes o de condiciones de resolubilidad era finito[1]). En los casos en que el pro-

[1]) La excepción sólo constituye el caso degenerado (p. 25.4).

blema admitía una solución cerrada o una investigación cualitativa completa, las soluciones linealmente independientes o las condiciones de resolubilidad se expresaban mediante un polinomio arbitrario.

No obstante, desde hace tiempo se han levantado los problemas que en el planteamiento general conducen a los problemas de contorno con índice infinito. Aun en el año 1945 se ha publicado la obra de *N. I. Ajieser* 1) acerca de la inversión de una integral de tipo de Cauchy en el conjunto numerable de segmentos del eje real. Más tarde aparecieron las obras de *S. A. Freidkin* 1), *V. A. Paatashvili* 2) y otros sobre el problema de Riemann en un conjunto numerable de contornos. Pero todos estos autores concentraban sus esfuerzos en la resolución de aquellas clases particulares de funciones en las cuales el índice quedaba finito. Una serie de las obras no se dio por terminada a causa de que los autores no supieron superar las dificultades relacionadas con el índice infinito.

Cuando se trata de un índice infinito, el comportamiento de la función canónica en el entorno de su punto excepcional es semejante al comportamiento de una función analítica en el entorno de un punto esencialmente singular. De aquí se deduce que el conjunto de soluciones linealmente independientes o de condiciones de resolubilidad se describe en este caso no por un polinomio, sino por una función entera. El comportamiento de esta última en el entorno de su punto esencialmente singular es muy diverso, lo que origina dificultades considerables durante la investigación de los problemas de contorno. Para dominarlas no es suficiente emplear el aparato clásico de funciones enteras, sino que se requiere solucionar toda una serie de problemas nuevos que no surgían antes en esta teoría.

No estamos en condiciones de tratar los detalles de la teoría compleja de problemas de contorno con índice infinito y en lo sucesivo nos limitaremos a un esbozo esquemático.

49.1. Algunos datos de la teoría de funciones. Para hacer más cómodas las enunciaciones ulteriores, demos a conocer ciertos conceptos de la teoría de funciones, analíticas dentro de un ángulo, y, en particular, de la teoría de funciones enteras.

Sea $f(z) \not\equiv 0$ una función analítica dentro del ángulo $0 \leqslant \alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta \leqslant 2\pi$. Se denomina *orden de* esta *función* dentro del ángulo considerado la cota infeior exacta ρ de aquellos números $\nu > 0$, para los cuales se verifica uniformemente respecto de $\theta \in [\alpha, \beta]$:

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r^{\nu}} \equiv 0.$$

Si ρ es un número positivo finito, entonces, hablando más simplemente, o bien $\max\limits_{\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta} |f(re^{i\theta})| \sim e^{r^{\rho}}$, o bien $\max\limits_{\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta} |f(re^{i\theta})| \sim$

$\sim e^{-r^\rho}$, cuando $r \to \infty$. De este modo, el orden caracteriza el crecimiento de la función o su decrecimiento dentro del ángulo. En ambos casos para cualquier $\varepsilon > 0$ resulta válida la acotación

$$|f(z)| < e^{|z|^{\rho+\varepsilon}}, \quad z \to \infty.$$

Con el fin del estudio del comportamiento de la función $f(z)$ de orden finito $\rho > 0$ en los rayos $\arg z = \theta$, se introduce un *indicador*, es decir, una función real

$$h_f(\theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r^\rho} \quad (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta).$$

Si $h_f(\theta_0) < 0$, entonces para $z \to \infty$ $f(z) \to 0$ a lo largo del rayo $\arg z = \theta_0$. En caso de $h_f(\theta_0) > 0$, la función $f(z)$ no está acotada en dicho rayo. Por fin, cuando $h_f(\theta_0) = 0$, la función puede ser tanto acotada como no acotada.

Para la función entera $F(z) \not\equiv \text{const}$ se utiliza con mayor frecuencia otra definición de orden, equivalente a la enunciada[1]):

$$\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln \ln \max\limits_{|z|=r} |F(z)|}{\ln r}.$$

Hemos de notar que en el sentido de tal definición el orden de cualquier polinomio es igual a cero.

Para una función entera, cuyas raíces se hallan en un mismo rayo, se usa frecuentemente la representación en términos de una integral de tipo de Cauchy. Por ejemplo, sea

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{r_n}\right) \quad (0 < r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots)$$

y $n(x)$, el número de raíces r_n en el intervalo $(0, x)$. Entonces $\int_0^\infty n(x)\, x^{-2}\, dx < \infty$ y

$$f(z) = \exp\left\{-z \int_0^\infty \frac{n(x)}{x(x-z)}\, dx\right\}. \tag{49.1}$$

Es justa también una afirmación recíproca. Si una función $n(x) \geqslant 0$, no decreciente, constante a trozos con valores de números enteros, es tal que $\int_0^\infty n(x)\, x^{-2}\, dx < \infty$, entonces la función $f(z)$, construida

[1]) Estas definiciones son equivalentes, en el caso general, sólo para funciones no acotadas dentro del ángulo.

según la fórmula (49.1), es entera. Sus raíces están dispuestas en el rayo positivo y coinciden con los puntos de discontinuidad de la función $n(x)$.

Demos a conocer, además, el teorema de Phragmén-Linderlof para el ángulo. Supongamos que la función $f(z)$ es analítica dentro del ángulo $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, y para todo $\varepsilon > 0$ y $\gamma = \pi/(\beta - \alpha)$ admite la acotación

$$|f(z)| < e^{\varepsilon |z|^{\gamma}}, \quad \alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta, \quad z \to \infty.$$

Entonces, de la acotación de $f(z)$ en los lados del ángulo se desprende su acotación en todos los puntos del interior del ángulo.

En particular, para el ángulo $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ esta acotación debe tener por expresión

$$|f(z)| < e^{\varepsilon \sqrt{|z|}}, \quad z \to \infty.$$

49.2. Problema homogéneo con índice infinito de orden potencial en el caso de una torsión unilateral [1]). El índice de la función G(t), continua en el contorno cerrado L, fue determinado antes (p. 13.1) como una alteración de arg $G(t)$, expresada en revoluciones completas, o, que es lo mismo, por la integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_L d \arg G(t). \tag{49.2}$$

En el caso de un contorno abierto o coeficiente discontinuo (con arg $G(t)$ acotado) el índice del problema también se expresa en términos de esta magnitud (véanse las fórmulas (42.8), (42.9)).

Supongamos ahora que en el contorno L (sea cerrado o abierto) hay un punto t_0 en cuyo entorno unilateral (bilateral) arg $G(t)$ no está acotado. En este caso suele decirse que la función $G(t)$ tiene en t_0 una *torsión unilateral (bilateral)*. El problema de contorno de Riemann, cuyo coeficiente $G(t)$ tiene en algún punto del contorno una torsión, se llamará *problema con índice infinito*. Además, si en este caso la integral (49.2) es igual a $+\infty$ o $-\infty$, diremos que el problema tiene, respectivamente, un índice de infinito positivo o de infinito negativo.

Las propiedades de las soluciones de problemas de contorno con índice infinito dependen considerablemente del orden para el cual arg $G(t)$ tiende al infinito. Actualmente están investigados los casos en que arg $G(t)$ crece como función potencial (índice infinito de orden potencial) y como función logarítmica (índice infinito de orden logarítmico).

Examinemos, ahora, un problema de Riemann homogéneo para uno de los casos de índice infinito de orden potencial. Para simpleza,

[1]) La exposición de este punto viene dada conforme a las obras de N. V. Górovor 1), 2), 3), 4)*.

a título del contorno L tomemos un rayo $1 \leqslant t \leqslant \infty$. Vamos a considerar que en la condición de contorno

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t), \quad 1 < t < \infty, \tag{49.3}$$

el coeficiente $G(t)$ satisface las siguientes exigencias:

1) $\ln|G(t)| \in H_{\mu_0}[1, \infty)$ (condición de Hölder con exponente μ_0 en el segmento $1 \leqslant t \leqslant \infty$: $|\ln|G(t_1)| - \ln|G(t_2)|| < A\,|t_1^{-1} - t_2^{-1}|^{\mu_0}$);

2) $\arg G(t) = 2\pi\varphi(t)\,t^{\rho}$, $1 \leqslant t \leqslant \infty$, $0 < \rho < \infty$, $\varphi(t) \in H_{\mu}[1, \infty]$, $\max\left\{0, \frac{2\rho-1}{2\rho+1}\right\} < \mu \leqslant 1$, $\varphi(\infty) = \lambda \neq 0$.

En el punto $t = \infty$ el coeficiente $G(t)$ tiene una torsión unilateral. Además, para $\lambda > 0$, el índice del problema es de infinito positivo, y para $\lambda < 0$, es de infinito negativo.

Las soluciones del problema las consideraremos en la clase de funciones $\Phi(z) \not\equiv 0$, acotadas en todo el plano.

En lo que sigue nos enfrentaremos con integrales de tipo de Cauchy cuyas densidades son no acotadas. Por esta razón, en lugar de la integral empleada antes, examinemos la integral de tipo (véase el final del p. 4.7)

$$\frac{z^{q+1}}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau^{q+1}(\tau - z)},$$

que se obtiene de la integral de tipo de Cauchy, si en el desarrollo de ésta última según potencias de $\frac{1}{z}$ suprimimos formalmente los primeros $q+1$ términos iniciales.

Introduzcamos la función

$$X(z) = \exp\left\{\frac{z^{q+1}}{2\pi i}\int_1^{\infty} \frac{\ln G(x)}{x^{q+1}(x-z)}\,dx\right\}, \quad q = [\rho]. \tag{49.4}$$

Esta función es analítica fuera del rayo $1 \leqslant t \leqslant \infty$, y es allá distinta de cero. Además, satisface la condición de contorno (49.3). Para el caso de índice infinito que se considera $X(z)$ desempeña el mismo papel que una función canónica del problema homogéneo de índice finito. Esta analogía se pone de manifiesto también en el hecho de que, según resulta, toda solución acotada del problema es representable en la forma

$$\Phi(z) = X(z)\,F(z), \tag{49.5}$$

donde $F(z)$ es cierta función entera. Llamaremos, por esto, $X(z)$ *función canónica* del problema en consideración. Para un índice finito $\varkappa$, $X(z) \sim \frac{1}{z^{\varkappa}}$ cuando $z \to \infty$, es decir, en todos los rayos $\arg z = \text{const}$ $X(z)$ varía de una manera igual: tiende a cero o al

infinito de orden potencial $|\varkappa|$. Otra cosa ocurre cuando se trata de un índice infinito. De la condición del problema se desprende que, para $t \to +\infty$, $\ln G(t)$ se reduce al infinito de orden potencial.

Por ello, pasando en (49.4) al contorno finito y haciendo uso de la representación para una integral de tipo de Cauchy con singularidad potencial (p. 8.3), se puede constatar que la función canónica $X(z)$ tiene dentro del ángulo $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ el orden ρ con un indicador

$$h_X(\theta) = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln|X(re^{i\theta})}{r^\rho} = -\frac{\pi\lambda}{\operatorname{sen}\pi\rho}\cos\rho(\theta-\pi) \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi) \tag{49.6}$$

para ρ no entero, y

$$h_X(\theta) \equiv \lim_{r\to\infty} \frac{\ln|X(re^{i\theta})|}{r^\rho \ln r} = -\lambda\cos\rho\theta \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi) \tag{49.7}$$

para ρ entero. Además, en ambos casos la tendencia al límite se realiza uniformemente respecto de $\theta \in [0, 2\pi]$. El análisis de los segundos miembros en (49.6) y (49.7) muestra que solamente para $\lambda > 0$ y $\rho < 1/2$ (es decir, en el caso de un índice de infinito positivo de orden potencial inferior a 1/2) la función canónica tiene en todos los puntos el indicador negativo y, por lo tanto, va decreciendo a lo largo de cada dirección. Si, en cambio, $\rho > 1/2$[1]), entonces existen direcciones (para $h_X(\theta) < 0$), en las cuales $X(z)$ experimenta decrecimiento, mientras que en las otras direcciones (para $h_X(\theta) > 0$) se observa crecimiento de orden exponencial ρ. Es por eso que en el caso general $X(z)$ se porta para $z \to \infty$ como función analítica en el entorno de su punto esencialmente singular. En esto precisamente consiste la diferencia de principio entre el problema con índice infinito y el de índice finito.

La resolución del problema de Riemann con índice infinito se reduce en el caso general a la búsqueda de unas funciones enteras $F(z)$ tales que, hablando en el lenguaje simplificado, decrecen rápidamente a lo largo de las direcciones, donde $X(z)$ no está acotada, y al mismo tiempo crecen de manera no demasiado rápida en las direcciones a lo largo de las cuales $X(z)$ decrece. Con la mayor facilidad tales funciones enteras se eligen en el caso en que $\lambda > 0$, $\rho < 1/2$, cuando $|X(z)| < ce^{-a|z|^\rho}$, $c, a > 0$. En efecto, de (49.6) se desprende que en este caso se cumple también la acotación $|X(z)| > me^{-b|z|^\rho}$, $m, b > 0$. Por eso, de la acotación del producto $X(z)F(z)$ se desprende que en todo el plano se tiene $|F(z)| < c_1|X(z)|^{-1} < Ce^{b|z|^\rho}$. En particular, en el contorno $\ln|F(t)| < -\ln|X^{\pm}(t)| + \text{const}$, $1 < t < \infty$. Si ρ_F es el orden de creci-

[1]) El caso $\rho = 1/2$, que se investiga por separado, no lo damos aquí (véase N. V. Góvorov 3)*).

miento de $F(z)$, entonces estas correlaciones pueden escribirse en la forma

$$1) \qquad \rho_F \leqslant \rho; \tag{49.8}$$

$$2) \quad \ln |F(t)| < -t \int_1^\infty \frac{\varphi(x)\, x^{\rho-1}}{x-t}\, dx + \text{const}, \quad 1 < t < \infty. \tag{49.9}$$

Es fácil mostrar que, viceversa, si la función entera $F(z)$ satisface las condicionas (49.8), (49.9), entonces la función $\Phi(z) = X(z) F(z)$ es una solución acotada del problema. Efectivamente, en virtud de (49.9), esta función está acotada en el rayo $1 \leqslant t \leqslant \infty$. Luego, en vista de (49.8), $\Phi(z)$, para todo $\varepsilon > 0$, admite en todo el plano la acotación $|\Phi(z)| < e^{|z|^{\rho+\varepsilon}}$, $z \to \infty$. Puesto que $0 < \rho < 1/2$, entonces, según el teorema de Fragmen-Lindelöf, para el ángulo $0 \leqslant \arg z \leqslant 2\pi$ la función $\Phi(z)$ está acotada en todo el plano. De este modo, la *solución general del problema con índice más infinito* ($\lambda > 0$, $\rho < 1/2$) *se determina mediante la fórmula* (49.5), *donde* $F(z)$ *es una función entera arbitraria de orden* ρ_F, *para la cual se verifican las condiciones* (49.8), (49.9).

Estas condiciones las satisface cualquier función entera $F(z)$ de orden $\rho_F < \rho$. En efecto, para tal función, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, se tiene $|F(z)| < \exp\{|z|^{\rho_F+\varepsilon}\}$, $z \to \infty$. Pero, en el caso dado $|X(z)| < e^{-a|z|^\rho}$, $a > 0$, $z \to \infty$. Por ello, la acotación (49.9), que implica que $\ln |F(t)| < -\ln |X^{\pm}(t)| + \text{const}$, proviene del requisito $\rho_F < \rho$. En particular, las condiciones (49.8) y (49.9) las satisface un polinomio arbitrario, puesto que su orden es igual a cero. En el caso más general de una función transcendente entera

$$F(z) = cz^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \quad (0 < |z_1| \leqslant |z_2| \ldots)$$

para el cumplimiento de estas condiciones basta exigir que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln |z_n|} = \rho_F < \rho.$$

De este modo, cuando se tiene un índice de infinito positivo de orden potencial inferior a 1/2, del conjunto infinito de soluciones acotadas del problema podemos separar un conjunto numerable de soluciones linealmente independientes (por ejemplo, $\Phi_k(z) = z^k X(z)$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$)).

En el caso de índice de infinito positivo de orden potencial $\rho > 1/2$ la función canónica $X(z)$ es no acotadas La búsqueda de una clase de funciones enteras $F(z)$, las cuales dan, según las fórmulas (49.5), soluciones acotada del problema, se efectúa de un modo mucho más complejo. Resulta que el orden de cada una de tales fun-

ciones enteras debe ser igual a ρ. Más, toda solución acotada tiene necesariamente el conjunto infinito de raíces que representan ceros de la función entera $F(z)$. Este conjunto determina la solución unívocamente (con la precisión hasta el factor constante). Por eso, la investigación del problema para $\lambda > 0$, $\rho > 1/2$ es de hecho, la aclaración de las condiciones las cuales debe satisfacer el conjunto de raíces de la solución acotada del problema. En calidad del punto de partida para tal investigación sirven propiedades de las funciones, analíticas y acotadas en el interior del ángulo $0 \leqslant \arg z \leqslant 2\pi$. Sin tener la posibilidad de entrar en los detalles de esta investigación bastante compleja, sólo demos a conocer el resultado definitivo:

La solución general del problema de contorno homogéneo de Riemann en consideración con índice de infinito positivo $\lambda > 0$) *tiene por expresión*

$$\Phi(z) = cz^m \exp\left\{\frac{z}{2\pi i}\int_1^\infty \frac{\ln G(x) - 2\pi i n(x)}{x(x-z)}\,dx\right\} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-\frac{z}{z_n}}{1-\frac{z}{|z_n|}},$$

donde $c = \text{const}$, *m es un número entero, y* $\{z_n\}$, *una sucesión de números, distintos de cero, que satisfacen las condiciones*:

1) *converge la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{\theta_n}{2}}{\sqrt{r_n}}$, $z_n = r_n e^{i\theta_n}$, $0 < \theta_n < 2\pi$;

2) *existe un límite finito*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\sqrt{r}} \int_1^r \frac{dt}{t} \int_1^t [\varphi(x)\, x^\rho - n(x)] \frac{dx}{x} = \gamma \geqslant 0;$$

3) *converge la integral*

$$\int_1^\infty [\varphi(x)\, x^\rho - n(x)]\, x^{-2}\, dx;$$

4) *en el contorno, para* $t \to +\infty$, *se verifica la acotación*

$$m \ln t + \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left|\frac{t-z_n}{t-r_n}\right| + t\int_1^\infty \frac{\varphi(x)\, x^\rho - n(x)}{x(x-t)}\,dx < \text{const},$$

donde $n(x)$ *es el número de puntos* z_n *en el círculo* $|z| \leqslant x$.

Hemos de notar que existe un conjunto infinito de diversas sucesiones $\{z_n\}$, que satisfacen estas condiciones.

El problema homogéneo de índice menos infinito ($\lambda < 0$) no tiene soluciones acotadas $\Phi(z) \not\equiv 0$.

Con este motivo es interesante indicar lo siguiente. Cuando el contorno es rectilíneo y el coeficiente $G(t) \in H$ ($G(t) \neq 0$), el problema homogéneo con índice negativo es insoluble. Si el contorno deja de ser rectilíneo cerca del punto t_0, y $|G(t)| \to 0$ cuando $t \to t_0$, el problema homogéneo con índice negativo (finito o infinito) puede resultar resoluble. Los ejemplos correspondientes están dados por *N. V. Góvorov* 4). El mismo obtuvo también dos condiciones tales que el cumplimiento de cada una de ellas asegura irresolubilidad del problema homogéneo de índice negativo.

49.3. Problema no homogéneo con índice infinito de orden potencial para una torsión unilateral [1]). Examinaremos ahora un problema no homogéneo

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t), \quad 1 < t < \infty, \tag{49.10}$$

donde

1) $\arg G(t) = 2\pi\varphi(t)\,t^{\rho}$, $0 < \rho < \infty$, $\varphi(t) \in H_{\mu}[1, \infty]$, con la particularidad de que $\frac{\rho}{\rho+1} < \mu \leqslant 1$, $-1 < \varphi(1) \leqslant 0$, $\varphi(\infty) = \lambda \neq 0$;

2) $\ln|G(t)|$, $g(t) \in H[1, \infty]$, $g(1) = g(\infty) = 0$.

Al principio convengamos en considerar que $\lambda > 0$, es decir, el índice del problema es de infinito positivo. Emplearemos el mismo procedimiento que fue usado en el caso de un índice finito (§ 14). Sea $\Psi_0(z)$ una solución particular del problema homogéneo correspondiente, para la cual se cumplen las condiciones

$$\frac{g(t)}{\Psi_0^+(t)} \in H[1, \infty], \quad \lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{\Psi_0^+(t)} = 0. \tag{49.11}$$

Entonces la función

$$\Phi_0(z) = \frac{\Psi_0(z)}{2\pi i} \int_1^{\infty} \frac{g(x)}{\Psi_0^+(x)} \frac{dx}{x - z} \tag{49.12}$$

será una solución particular del problema en consideración. La solución general se obtendrá como una suma de $\Phi_0(z)$ y la solución general del problema homogéneo correspondiente.

En el caso de índice finito a título de $\Psi_0(z)$ se pudo elegir una función canónica $X(z)$. Si el índice es infinito, entonces, en general, no podemos poner $\Psi_0(z) \equiv X(z)$, puesto que o bien $X(z)$ no está acotada o bien pueden no cumplirse las condiciones (49.11), es decir, en (49.12) la integral puede resultar divergente.

Por ello, la dificultad principal del caso considerado consiste en la construcción de tal solución especial $\Psi_0(z)$ del problema homo-

[1]) La exposición de este punto sigue las obras de N. V. Góvorov 5), 6)*.

géneo correspondiente la cual satisfaga las condiciones (49.11). Esta solución no se determina de un modo único. La estructura más simple la tiene en el caso en que sus raíces están dispuestas de manera especial en la curva $\varphi = r^{-\rho}$. Enunciaremos el resultado definitivo de investigación:

El problema de contorno de Riemann no homogéneo (49.10) *con índice de infinito positivo* ($\lambda > 0$) *admite el conjunto infinitto de soluciones acotadas cuya fórmula general tiene por expresión*

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Psi(z), \tag{49.13}$$

donde la función $\Phi_0(z)$ *queda determinada mediante la fórmula* (49.12), *y* $\Psi(z)$ *es la solución general del problema homogéneo correspondiente. La función* $\Psi_0(z)$ *en este caso está definida por la fórmula*

$$\Psi_0(z) = \exp\left\{\frac{z}{2\pi i}\int_1^\infty \frac{\ln G(x) - 2\pi i n_0(x)}{x(x-z)}\,dx\right\} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-\frac{z}{r_n}e^{-ir_n^{-\rho}}}{1-\frac{z}{r_n}},$$

donde $n_0(x)$ *implica el número de puntos de la sucesión* $\{r_n\}$ ($z_n = r_n e^{ir_n^{-\rho}}$) *en el segmento* $[1; x]$ *y se determina mediante la igualdad*

$$n_0(x) = \max\left\{0, \left[\max_{1\leqslant t\leqslant x}\left\{\varphi(t)\,t^\rho + \frac{1}{2}\right\}\right]\right\}$$

(r_n *son los puntos de discontinuidad* $n_0(x)$).

En el caso de índice de infinito negativo se construye una solución meromorfa $\Psi_0(z)$ del problema homogéneo correspondiente la cual tiene el conjunto infinito de polos dispuestos de un modo especial. Entonces el problema no homogéneo que se considera tiene, para $\lambda < 0$, una única solución (49.13) sólo cuando se cumpla el conjunto numerable de las condiciones de resolubilidad. Estas condiciones se expresan en el requisito de que la integral de tipo de Cauchy en (49.12) se reduzca a cero en todos los polos de $\Psi_0(z)$.

49.4. Problema con índice infinito de orden logarítmico para una torsión unilateral [1]. Examinaremos, ahora, el caso del problema de contorno de Riemann

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) = g(t), \quad 1 < t < \infty,$$

cuando $\arg G(t)$ crece como cierta potencia de un logaritmo. A saber, convendremos en considerar que las funciones $G(t)$ y $g(t)$ satisfacen las condiciones:

1) $$\arg G(t) = \varphi(t)\ln^\alpha t,$$

[1]) La exposición sigue las obras de P. G. Yurov 1)—5)*.

donde $0 < \alpha < \infty$, y la función $\varphi(t)$ pertenece a la clase de Dini-Lipschitz $D_\beta [1; \infty]$ con el exponente $\beta > \alpha + 2$, es decir, para $t_1, t_2 \in [1; \infty]$ arbitrarios debe cumplirse

$$| \varphi(t_1) - \varphi(t_2) | \leqslant M \left(\ln \left| \frac{t_1 t_2}{t_1 - t_2} \right| \right)^{-\beta},$$

y, además, $\varphi(\infty) \neq 0$;

2) $\ln | G(t) |$, $g(t) \in D_p [1; \infty]$ $p > \max \{2; \alpha\}$, $g(\infty) = 0$.

Las soluciones del problema se buscan en la clase de funciones acotadas.

Igual que en el caso de índice infinito de orden potencial, para la investigación del problema homogéneo (cuando $g(t) \equiv 0$) se introduce, según la fórmula (49.4) (siendo $q = 0$), una función canónica $X(z)$. La búsqueda de la clase de funciones enteras $F(z)$, que en el caso de índice de infinito positivo conceden, según la misma fórmula (49.5), soluciones acotadas, se realiza de nuevo tomando en consideración las propiedades asintóticas de $X(z)$. No obstante, si en el caso que se considera pasamos en (49.4) a un contorno finito, entonces la densidad de la integral de tipo de Cauchy obtenida tendrá ya una singularidad de orden no potencial, sino, en general, logarítmico no entero. Con el fin de investigar el comportamiento asintótico de las integrales de tal género P. G. Yurov 1), 2)* introdujo nuevo método que se basa en la aplicación de la teoría de diferencias finitas. Habiéndose realizado tal investigación, podemos llegar a la conclusión de que para la función canónica $X(z)$ resulta válida la siguiente representación para $z \to \infty$:

$$| X(z) | = \exp \left\{ - \frac{\varphi(\infty) \ln^{\alpha+1} | z |}{2\pi(\alpha+1)} + O(\ln^\alpha | z |) \right\}.$$

De aquí se pone claro que en el caso de índice más infinito (es decir, cuando $\varphi(\infty) > 0$) la función canónica está acotada en todo el plano y es una de las soluciones del problema homogéneo. Todas las soluciones acotadas se dan por la fórmula (49.5), donde $F(z)$ es una función entera arbitraria de orden nulo, que satisface en el contorno la acotación análoga a (49.10).

De ejemplo de tal función puede servir cualquier polinomio y también una función entera transcendente $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, para la cual

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\ln n}{\ln \ln \sqrt[n]{| c_n |^{-1}}} < \alpha.$$

Por esto también en el caso de índice de infinito positivo de orden logarítmico $\alpha > 0$, del conjunto de soluciones acotadas del problema se pueden separar un conjunto numerable de soluciones linealmente independientes: $\Phi_k(z) = z^k X(z)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Si el índice es de infinito negativo ($\varphi(\infty) < 0$), entonces $X(z) \to \infty$, cuando $z \to \infty$, y el problema homogéneo no tiene soluciones acotadas $\Phi(z) \not\equiv 0$.

Durante la investigación del problema no homogéneo con índice de infinito positivo de orden logarítmico ($\varphi(\infty) > 0$) surgen las mismas dificultades que tuvieron lugar en el caso de orden potencial. Por esta razón hemos de construir otra vez una solución especial $\Psi_0(z)$ del problema homogéneo correspondiente que satisfaga las restricciones:

$$\frac{g(t)}{X^+(t)} \in D_q[1; \infty], \quad q > 1, \quad \lim_{t \to +\infty} \frac{g(t)}{\Psi_0(t)} = 0.$$

Sin embargo, la construcción de tal solución resulta posible solamente en el caso para $\alpha \geqslant 1$. Al exigir que sus raíces estén dispuestas en el rayo negativo $-\infty < t \leqslant 1$, se puede construir esta solución en la forma

$$\Psi_0(z) = X(z) \exp\left\{ z \int_1^{\infty} \frac{\left[\frac{1}{2} + \frac{\varphi(\infty)}{2\pi} \operatorname{Re} (\ln x - \pi i)^{\alpha}\right]}{x(x+z)} dx \right\}$$

(aquí el símbolo $[u]$ significa, como siempre, la parte entera del número u). Entonces la solución particular del problema no homogéneo en consideración, para $\varphi(\infty) > 0$, puede obtenerse de la misma fórmula (49.12). La solución general se representará como la suma de esta solución particular y solución general del problema homogéneo correspondiente.

Si $0 < \alpha < 1$, entonces la investigación del problema no homogéneo se hace mucho más difícil. Nos vemos obligados a imponer sobre el término independiente $g(t)$ una restricción más severa en comparación con el caso cuando $\alpha \geqslant 1$: $g(t) \in H[1; \infty]$. Con el objeto de obtener la solución particular del problema no homogéneo se construye una solución particular no acotada (pero no creciente demasiado rápido cuando $z \to \infty$) especial $\Psi_0(z)$ del problema homogéneo. Esta solución es de tal índole que una integral de tipo de Cauchy que le corresponde en (49.12) tiende a cero cuando $z \to \infty$. Esta tendencia resulta suficiente para que la función $\Phi_0(z)$, definida mediante la fórmula (49.12), sea acotada y proporcione una solución particular del problema no homogéneo.

Los resultados de la investigación del problema no homogéneo con índice de infinito negativo de orden logarítmico (para $\varphi(\infty) < 0$) son análogos a los resultados correspondientes para el índice menos-infinito de orden potencial.

49.5. Caso de torsión bilateral. F. D. Berkovich y N. V. Góvorov 1)* fueron primeros en considerar el problema de contorno de Riemann con índice infinito de orden potencial inferior a la unidad para una torsión bilateral. Ellos hicieron

esto al estudiar el problema de contorno de Carleman:

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^+(-t) + g(t), \quad -\infty < t < \infty, \tag{49.14}$$

donde $\ln|G(t)|$, $g(t) \in H[-\infty; \infty]$, $g(\pm\infty) = 0$, $\arg G(t) = 2\pi\varphi(t)\,|t|^\rho$, $0 < \rho < 1$, $\varphi(-t) \equiv -\varphi(t)$, $\varphi(+\infty) = \lambda > 0$. Este problema se ha estudiado por reducción al problema de contorno de Riemann para un semiplano

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t), \quad -\infty < t < \infty. \tag{49.15}$$

En la investigación del último se ha usado la teoría desarrollada por N. V. Górovor para torsión unilateral.

Más tarde F. D. Berkovich 1), 2)* señaló una clase de ecuaciones integrales de tipo de convolución de primera especie, las cuales se reducen a los problemas de Carleman (49.14), Riemann (49.15) y de Hilbert:

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\overline{\Phi^+(t)} + g(t), \quad -\infty < t < \infty,$$

con índice infinito. A Berkovich se debe también la investigación de estos problemas para la suposición de que $G(t) = e^{2i\alpha t}[\lambda + K(t)]$, $\alpha \neq 0$, $\lambda + K(t) \neq \neq 0$, $-\infty < t < \infty$. En este caso las funciones $K(t)$, $g(t)$ pertenecen al anillo R_0 de las transformaciones de Fourier sobre las funciones de $L(-\infty, \infty)$. Esta investigación se apoya en las propiedades de transformaciones de Fourier y los teoremas de Wiener y Wiener—Levi para las funciones del anillo R_0.

F. D. Berkovich y E. M. Konishkova 1)* han ofrecido la solución del problema de Riemann (49.14) en la clase de funciones acotadas suponiendo que $G(t) = e^{2i\alpha t}G_0(t)$, $\alpha \neq 0$, y las funciones $G_0(t)$ y $g(t)$ satisfacen la condición de Hölder en todo el eje real. Esta solución se ha usado por E. M. Konishkova 1)* para el estudio de la ecuación integral singular característica de índice infinito.

El caso general de un problema homogéneo con índice infinito de orden potencial inferior a la unidad para la torsión unilateral ha sido considerado por M. E. Tolochkó 1)*. En esta obra se ha estudiado el problema (49.15) (para $g(t) \equiv 0$) con coeficiente $G(t)$ que satisface las condiciones:

1) $\ln|G(t)| \in H[-\infty, \infty]$;

2) $\arg G(t) = 2\pi\varphi(t)\,|t|^\rho$, donde $0 < \rho < 1$, y la función $\varphi(t)$, continua para $t \to \pm\infty$, pertenece a cierta clase de funciones más amplia que la de Hölder en cada uno de los rayos $-\infty \leqslant t \leqslant 0$ y $0 \leqslant t \leqslant \infty$; además,

$$\varphi(-\infty) = \lambda_1, \quad \varphi(+\infty) = \lambda_2, \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0.$$

Observemos que en este problema por primera vez se encuentra el caso de índice « indefinidamente infinito », cuando los números, λ_1, λ_2 tienen signos iguales y la variación de $\arg G(t)$ en el contorno no está determinada de ninguna manera.

Los resultados principales de la investigación se han expresado en forma de ciertas correlaciones para las magnitudes prefijadas λ_1, λ_2 y ρ, que determinan el comportamiento de $\arg G(t)$ cuando $t \to \pm\infty$. Así, por ejemplo, si estas magnitudes satisfacen una de las condiciones:

1) $0 < \rho < \frac{1}{2}$, $\quad \lambda_1 \leqslant 0, \quad \lambda_2 \geqslant 0$;

2) $0 < \rho < \frac{1}{2}$, $\quad \lambda_1\lambda_2 > 0, \quad \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\operatorname{sgn}\lambda_k} < \cos\rho\pi$;

3) $\frac{1}{2} \leqslant \rho < 1, \quad \lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 > 0$,

entonces el problema homogéneo en consideración tiene un conjunto infinito de soluciones acotadas.

Todos los demás casos para λ_1, λ_2, y ρ se subdividen en dos grupos, en uno de los cuales las soluciones actotadas no existen, y en el otro, la resolubilidad del problema depende de las propiedades complementarias de arg $G(t)$.

49.6. Problema en un conjunto numerable de contornos. Por las propiedades y el carácter de investigación este problema es parecido al problema para un dominio simplemente conexo en el caso de índice infinito.

El problema de contorno de Riemann en un conjunto numerable de contornos abiertos se encuentra por primera vez en las obras de N. I. Ajieser 1)*, I. N. Kartsivadze y B. V. Jvedelidze 1), 2)*, S. A. Freidkin 1), 2), 3)*, V. D. Frolov 3)*. No obstante, el planteamiento de problemas en estas obras prevé tales clases de soluciones, en las cuales el índice queda finito.

En el caso del conjunto numerable de contornos cerrados el problema de Riemann fue considerado por V. A. Paatashvili 2), 3)* y también por L. I. Chibrikova y P. J. Mkoyan 1)*. En la primera de estas obras el método elegido, consistente en el paso a un índice nulo en todas las curvas, ha permitido investigar, de hecho, solamente el caso de índice finito, es decir, el caso en que el índice del coeficiente $G(t)$ se diferencia de cero sólo en el conjunto finito de curvas. En la segunda obra la investigación se lleva a cabo en otra dirección, puesto que las soluciones se consideran en la clase de funciones meromorfas a trozos.

La consideración de uno de los casos en que el índice del coeficiente $G(t)$ es distinto de cero en un conjunto infinito de curvas cerradas se debe a M. E. Tolochkó 2)*.

Se supone que la condición de contorno del problema homogéneo

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t)$$

está determinada en cierta totalidad numerable de curvas simples suaves cerradas C_n que convergen hacia el infinito. Una condición más importante de las que se imponen sobre las curvas C_n consiste en el requisito de que la sucesión de ciertos puntos $\{z_n\}$ en el interior de C_n constituya el así llamado R-conjunto de exponente ρ $(0 < \rho < 1/2)$ introducido en la teoría de funciones enteras por B. Ya. Levin [13]. Esta restricción representa en sí una exigencia de uniformidad especial en la disposición de las curvas C_n. La misma condición se impone también sobre la sucesión de curvas con índices positivos $G(t)$. El coeficiente $G(t)$ en cada una de las curvas C_n es distinto de cero y satisface la condición de Hölder con un exponente y una constante no dependientes de n. Las soluciones del problema están consideradas en la clase de funciones acotadas.

La investigación del problema se apoya de modo considerable en la acotación, para $z \to \infty$, de una función canónica $X^{\pm}(z)$, construida conforme al método de resolución inmediata del problema de Riemann (§ 43). Si t_s y t_k' son ciertos puntos de aquellas curvas C_s y C_k, para las cuales $\operatorname{Ind}_{C_s} G(t) = \varkappa_s > 0$, $\operatorname{Ind}_{C_k} G(t) = \varkappa_k' < 0$, entonces

$$X^{\pm}(z) = \frac{\prod_k \left(1 - \frac{z}{t_k'}\right)^{-\varkappa_k'}}{\prod_s \left(1 - \frac{z}{t_s}\right)^{\varkappa_s}} \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z}\, d\tau\right\}.$$

El comportamiento de la función $X^{\pm}(z)$ cuando $z \to \infty$ está bien determinado por una función meromorfa $\prod_k \left(1 - \frac{z}{t_k'}\right)^{-\varkappa_k'} \prod_s \left(1 - \frac{z}{t_s}\right)^{-\varkappa_s}$. Al acotar la última empleamos la circunstancia de que la sucesión de puntos $\{t_s\}$ forma el R-conjunto.

Privados de la posibilidad de realizar la investigación completa del problema, enunciaremos sólo los resultados definitivos. Estos se expresan en términos de la teoría de funciones enteras.

Sean ρ_+ y ρ_- los exponentes de convergencia de los puntos $\{t_s\}$ y $\{t'_k\}$:

$$\rho_+ = \overline{\lim_{s\to\infty}} \frac{\ln s}{\ln |\, t_s \,|}, \quad \rho_- = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln k}{\ln |\, t'_k \,|}.$$

Sean, luego, $h_+(\theta)$ y $h_-(\theta)$ los indicadores de las funciones enteras

$$\prod_s \left(1-\frac{z}{t_s}\right)^{-\varkappa_s} \text{ y } \prod_k \left(1-\frac{z}{t'_k}\right)^{-\varkappa'_k}.$$

Entonces son válidas las siguientes afirmaciones:

1) Al cumplirse una de las condiciones

a) $\rho_- < \rho_+$;

b) $\rho_- = \rho_+$, $\min\limits_\theta \{h_+(\theta)\} > \max\limits_\theta \{h_-(\theta)\}$,

l problema homogéneo que se considera en un conjunto numerable de curvas admite un conjunto infinito de soluciones acotadas $\Phi^\pm(z) = X^\pm(z)\, F(z)$, donde $F(z)$ es una función entera arbitraria de orden $\rho_F \leqslant \rho$, que satisface en las curvas C_n $(n = 1, 2, \ldots)$ la acotación

$$|\, F(t) \,| < c_F\, |\, X^\pm(t) \,|^{-1} \quad (c_F = \text{const}).$$

2) Si $\rho_+ < \rho_-$, el problema está privado de soluciones acotadas $\Phi^\pm(z) \not\equiv 0$.

§ 50. Notas históricas

La cuestión de resolución del problema de Riemann con coeficientes discontinuos surgió simultáneamente con el planteamiento del propio problema. Riemann [21] (véanse las notas históricas al capítulo II) desde el mismo principio ha planteado este problema como problema con coeficientes discontinuos. Las primeras soluciones del problema en tal planteamiento fueron propuestas por Hilbert [10] en 1905 y Plemelj 2)** en 1907, cuando ha nacido la teoría de los problemas de contorno. El problema de Riemann para un contorno abierto se encuentra por primera vez en la obra de (Carleman 1))** en 1922 (véanse las notas históricas a los capítulos II y III).

La solución completa de los problemas de Riemann con contornos abiertos la dieron en 1941 dos autores independientemente: N. I. Musjelishevili 1)*, con ayuda del método expuesto en el § 43, y F. D. Gájov 2)*, por procedimiento expuesto en los §§ 41, 42[1]). En esta misma obra F. D. Gájov propuso también la solución del problema con coeficientes discontinuos, el cual más tarde fue resuelto por D. A. Kveselava 5)* con ayuda del método de N. I. Musjelishvili. De antecesores directos para estas obras finales servían las obras de Hilbert y Plemelj, en lo que se refiera a la solución de F. D. Gájov, y la de Carleman, en el caso de la solución propuesta por N. I. Musjelishvili.

Hilbert, Plemelj y Carleman que dominaban el método de resolución de los problemas con coeficientes discontinuos y contornos abiertos no dieron la solu-

[1]) La argumentación rigurosa de este método se hizo posible sólo a base de las fórmulas obtenidas por N. I. Musjelishvili sobre el comportamiento de la integral de tipo de Cauchy en los puntos de discontinuidad de la densidad (véanse los pp. 8.1—8.4).

ción completa de éstos por la única razón de que en aquel entonces no existía todavía un procedimiento efectivo de resolución de este problema en el caso elemental de contorno cerrado y coeficientes continuos. Es característico que N. I. Musjelishvili, F. D. Gájov, D. A. Kveselava resolvían los problemas con coeficientes discontinuos y contornos abiertos en conjunto, reduciendo un problema al otro, mientras que antes cada uno de estos problemas se resolvía independientemente por procedimientos propios para ellos, con la particularidad de que las obras en que se proponía la solución de los problemas fueron separadas por un intervalo temporal de 15 años.

F. D. Gájov [7] ha avanzado las aplicaciones de su método en la teoría del problema de contorno de Riemann con varias funciones incógnitas. Haciendo uso de las funciones de matrices, él tuvo éxito en escribir las funciones fundamentales, que eliminan discontinuidad, en la misma forma que en el caso de una función incógnita con la única diferencia de que el papel de exponente λ aquí desempeñaba la matriz. Empleando este mismo método, L. I. Chibrikova 1)* dio la solución del problema generalizado de Riemann con coeficientes discontinuos y para los contornos abiertos (véanse los problemas 15, 16 al final del capítulo).

El método de N. I. Musjelishvili se ha aplicado exitosamente en la resolución del problema de Riemann para contornos compuestos. La primera solución de este problema propuesta por (Trjizinsky 1))** era demasiado compleja. D. A. Kveselava 3)* propuso que la solución canónica del problema se tome en forma del producto de soluciones canónicas para los simples contornos componentes, gracias a lo cual la resolución se ha simplificado considerablemente. No obstante, quedaban aun unas complicaciones debidas a la distinción en los métodos de formar soluciones canónicas para los contornos cerrados y abiertos. F. D. Gájov y L. I. Chibrikova 1)* han propuesto que para obtener una solución canónica en el caso de contorno cerrado se emplee el mismo procedimiento que se utilizaba en la resolución del problema para un contorno abierto (véase el p. 44.2); de resultas la cuestión se ha reducido a la resolución de un problema con coeficientes discontinuos (discontinuo aquí no es el propio coeficiente, sino su logaritmo). La plicación de este procedimiento ha simplificado en forma definitiva la resolución del problema en el caso de contorno compuesto y la solución adquirió una forma semejante a la para un dominio múltiplemente conexo. En [16] toda la exposición de la teoría de problemas de contorno y de ecuaciones integrales singulares, referente al caso de coeficientes discontinuos y contornos abiertos, se efectúa desde el mismo principio para el caso general de contornos con puntos múltiples.

Un caso particular del problema de contorno de Hilbert con coeficientes discontinuos —el problema de contorno mixto de funciones analíticas— fue investigado por (Volterra 1))** aun en 1883. Desde aquel entonces este problema se resolvía por varios autores con ayuda de diferentes procedimientos particulares. Todos estos procedimientos tienen como base la propiedad de la función

$$\sqrt{\Pi (z-a_k)(z-b_k)}$$

cambiar, al pasar por los puntos a_k, b_k del eje real, los valores reales por los imaginarios puros, y viceversa.

Los resultados, próximos a los finales, se han obtenido en la obra de (Signorini 1))**. La solución completa fue propuesta por M. V. Keldish y L. I. Sedov 1)*. Recurriendo a los mismos procedimientos ellos han resuelto otros problemas análogos como, por ejemplo, problema de Dirichlet para un plano con aberturas.

El método general de reducción del problema de contorno mixto a un problema de Riemann con coeficientes discontinuos fue aplicado por primera vez en 1941. El autor F. D. Gájov 2)* lo utilizó como ilustración de la reducción del problema de contorno de Hilbert al de Riemann, lo que fue demostrado en dicha obra. La argumentación del método de reducción del problema de Hilbert

al problema de Riemann con coeficientes discontinuos se ha efectuado por N. I. Musjelishvili [16]. En esta última obra el autor dio las aplicaciones de este método a la resolución de muchos casos particulares del problema mencionado (problema de Dirichlet para un plano con aberturas y otros semejantes).

La teoría de ecuaciones integrales singulares con contornos abiertos, expuesta en § 47 y los pp. 48.1, 48.2, fue construida en 1942 por N. I. Musjelishvili y D. A. Kveselava en la obra 1)*. En el desarrollo posterior de esta teoría un gran papel se debe a la obra de D. A. Kveselava 5)* (1944). La importancia principal consiste en lo que en dicha obra se ha estudiado el empleo del operador R (p. 48.4) a título de regularizador a la izquierda y a la derecha, lo que servía de base para dar simple construcción de la teoría de ecuación singular. El estudio de la ecuación singular en el caso de coeficientes discontinuos se debe a F. D. Gájov [6]. No obstante, el método de investigación, empleado en esta obra, tiene mucho en común con el método de N. I. Musjelishvili y D. A. Kveselava; en vista de la relación estrecha existente entre los casos de contornos abiertos y coeficientes discontinuos lo que conoce el lector, esta obra contiene pocos resultados originales.

De las obras tempranas referentes a la cuestión sólo puede mencionarse la obra de (Carleman 1))*, de la cual se ha tratado ya en los capítulos II y III. Carleman ofreció la solución de la ecuación característica no homogénea de coeficientes constantes para el segmento del eje [0, 1] en la clase de funciones que son acotadas en un extremo y se reducen al infinito, en el otro extremo. La resolución en esta clase se realiza incondicional y unívocamente. La obra carece de menciones sobre la posibilidad de otras clases de soluciones.

Existe una serie de obras en las cuales la investigación se lleva a cabo bajo las suposiciones más amplias respecto de las discontinuidades que sufren los coeficientes. En los artículos de I. B. Simonenko 2), 3)* y otros se han estudiado el problema de contorno de Riemann y ecuaciones singulares con coeficientes medibles suponiendo que la oscilación de $\arg G(t)$ en los puntos de discontinuidad queda inferior a π. Los resultados de carácter análogo se han obtenido por I. I. Daniluk 1), 2)*. Estas investigaciones fueron continuadas por V. A. Paatashvili 1)* y V. D. Frolov 1), 2)*. Una serie de obras debidas a I. Ts. Gojverg y N. Ya. Krupnik 1), 2)* y otros autores está dedicada a la investigación de ecuaciones singulares con coeficientes discontinuos en los espacios L_p. A estas obras se les adhiere el artículo 3) de los autores mencionados, en el cual están investigados los operadores representados en forma de las sumas de productos de operadores singulares en el contorno abierto y con coeficientes discontinuos. En algunas obras se han considerado los casos de discontinuidades de otro tipo— casi periódica, etc. La exposición de las investigaciones de este género se presenta en el libro de I. Ts. Gojberg y N. Ya. Krupnik que se titula «Introducción a la teoría de operadores integrales singulares unidimensionales» (И. Ц. Гохберг и Н. Я. Крупник, «Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов», Кишинев, изд. АН Молд. ССР, 1973). No tenemos aquí las posibilidades de detenernos en los detalles.

Sobre el nacimiento y desarrollo de la teoría de problemas de contorno con índice infinito ya hablamos suficiente en el § 49. Aquí sólo diremos que la dificultad principal de esta teoría consiste en la búsqueda de soluciones acotadas. La obtención de soluciones que en el infinito tienen un crecimiento de orden cualquiera no representa dificultades algunas.

PROBLEMAS AL CAPITULO VI

1. Demuéstrese que la solución del problema de Riemann para un contorno abierto no depende de la forma que tiene una curva por cuyo intermedio el contorno abierto dado se completa hasta cerrado (F. D. Gájov [6]).

2. Sea L una circunferencia unitaria, y sean L_1, L_2 sus semicircunferencias superior e inferior, respectivamente.

Resuélvase para el contorno L un problema de contorno de Riemann

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + (t-1)^{\frac{2\pi-5}{\pi}}(t+1)^{\frac{5-\pi}{\pi}}\frac{e^{4t}}{t^2+a^2}$$

$$(|a|<1),$$

donde

$$G(t) = e^{14i} \text{ en } L_1, \quad G(t) = e^{4i} \text{ en } L_2,$$

y la función multívoca $\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^{5/\pi}$ se define por cierta su rama determinada. Examínense las clases de funciones que poseen infinito integrable en los puntos

a) $t_1 = 1$, $t_1 = -1$;
b) $t_1 = 1$;
c) $t_1 = -1$

y están acotadas en los puntos restantes del plano z.

d) Resuélvase el problema en la clase de funciones acotadas en todos los puntos.

e) Muéstrese que en la clase de funciones que están acotadas en todos los puntos y se reducen en el infinito a cero el problema tiene solución solamente cuando el parámetro a se elige de una manera especial; indíquense estos valores del parámetro y hállese en este caso la solución.

Respuesta

a) $$\Phi^+(z) = \frac{e^{4i}}{z+1}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{5-\pi}{\pi}}\left[\frac{a^2+1}{a}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{z\,\text{sen}\,4a + a\cos 4a}{z^2+a^2}e^{-4i} + \frac{(z^2-1)\,e^{4(z-i)}}{z^2+a^2} + c_0 + c_1 z\right],$$

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{z+1}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{5-\pi}{\pi}}\left[\frac{a^2+1}{a}\,\frac{z\,\text{sen}\,4a + a\cos 4a}{z^2+a^2}\,e^{-4i} + c_0 + c_1 z\right];$$

b) $$\Phi^+(z) = e^{4i}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{5-\pi}{\pi}}\left[\frac{(z-1)\,e^{4z-4i}}{z^2+a^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{a(1-z)\cos 4a + (a^2+z)\,\text{sen}\,4a}{a(z^2+a^2)}\,e^{-4i} + c\right],$$

$$\Phi^-(z) = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{5-\pi}{\pi}}\left[\frac{a(1-z)\cos 4a + (a^2+z)\,\text{sen}\,4a}{a(z^2+a^2)}\,e^{-4i} + c\right];$$

c) $$\Phi^+(z) = e^{4i}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{5-2\pi}{\pi}}\left[\frac{(z+1)\,(e^{4z}-\cos 4a)}{z^2+a^2}\,e^{-4i} + \right.$$
$$\left. + \frac{(a^2-z)\,\text{sen}\,4a}{a(z^2+a^2)}\,e^{-4i} + c\right],$$

$$\Phi^-(z) = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{5-2\pi}{\pi}}\left[\frac{(a^2-z)\,\text{sen}\,4a - a(z+1)\cos 4a}{a(z^2+a^2)}\,e^{-4i} + c\right];$$

d) $$\Phi^+(z)=(z-1)\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{5-\pi}{\pi}}\frac{ae^{4z}-(z\operatorname{sen}4a+a\cos 4a)}{a(z^2+a^2)},$$

$$\Phi^-(z)=(1-z)\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{5-\pi}{\pi}}\frac{z\operatorname{sen}4a+a\cos 4a}{a(a^2+z^2)}e^{-4i};$$

e) $$a=\pm\frac{\pi}{4},\quad \Phi^+(z)=(z-1)\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{5-\pi}{\pi}}\frac{e^{4z}+1}{z^2+\frac{\pi^2}{16}},$$

$$\Phi^-(z)=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{5-\pi}{\pi}}\frac{(z-1)e^{-4i}}{z^2+\frac{\pi^2}{16}}.$$

Por $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{5/\pi}$ se entiende una función, analítica en el plano cortado a lo largo de L_1, cuyos valores límites desde el interior del círculo coinciden con la función correspondiente que figura en la condición de contorno.

3. Supongamos que L, L_1, L_2 implican lo mismo que en el problema anterior. Resuélvase el problema de Riemann

$$\Phi^+(t)=G(t)\,\Phi^-(t)+\frac{1}{25}\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^{\frac{4t}{\pi}}\frac{t^2-1}{t^2-a^2}\quad(|a|<1);$$

$$G(t)=\begin{cases}e^{5it} & \text{en } L_1,\\ e^{-3it} & \text{en } L_2\end{cases}$$

en la clase más amplia de funciones que tienen infinito de orden integrable en ambos puntos de la discontinuidad.

Respuesta. El índice del problema en la clase dada $\varkappa=-2$, por lo cual el problema es, en general, insoluble. La solución existe para $a=\pm\frac{\pi}{5}$ y se determina en este caso mediante las fórmulas

$$\Phi^+(z)=(z^2-1)\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{4z}{\pi}}\frac{e^{5iz}+1}{25z^2-\pi^2},$$

$$\Phi^-(z)=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{4z}{\pi}}\frac{z^2-1}{25z^2-\pi^2}.$$

Por $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{4z/\pi}$ se entiende una función, analítica en el plano cortado a lo largo de L_2, cuyos valores límites desde el interior del círculo unitario coinciden con la función $\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^{4t/\pi}$ que figura en la condición de contorno.

4. Sean L un contorno cerrado suave y $G(t)$ una función que no se reduce a cero y satisface la condición de Hölder en todos los puntos, a excepción de

los puntos $t_1, t_2, \ldots, t_l$, donde sufre discontinuidades de primera especie. Determinemos el índice de $G(t)$ como

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi} \{\arg G(t)\}_L,$$

con la particularidad de que en los tramos de L comprendidos entre los puntos de discontinuidad, el argumento varía continuamente, mientras que al pasar por el punto de discontinuidad satisface una de las siguientes condiciones:

$$0 \leqslant \arg G(t_k - 0) - \arg G(t_k + 0) < 2\pi,$$
$$-2\pi < \arg G(t_k - 0) - \arg G(t_k + 0) < 0.$$

Muéstrese que el índice determinado de modo indicado coincide con e índice determinado en el p. 41.4. (N. I. Musjelishvili [16], § 78).

5*. Sea L un contorno que consta de m curvas abiertas y sean $f(t)$ la función prefijada que satisface la condición de Hölder y $P_{m-1}(t)$ un polinomio de grado $m-1$, cuyos coeficientes no están prefijados de antemano. Muéstrese que una integral de tipo de Cauchy

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t) + P_{m-1}(t)$$

admite inversión en la clase de funciones, acotadas en todos los extremos, y que le polinomio $P_{m-1}(t)$ se determina en este caso de un modo unívoco. (N. I. Musielishvili [16], § 87).

6*. Supongamos que L y $f(t)$ significan lo mismo que en el problema anterior y sean c_k unas constantes que no se prefijan de antemano. Muéstrese que la Integral de tipo de Cauchy

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t) + c_k, \quad t \in L_k$$
$$(k = 1, 2, \ldots, m),$$

admite inversión en la clase de funciones no acotadas y que todas las constantes en este caso se determinan unívocamente (N. I. Musjelishvili [16], § 88).

7*. Supongamos que en el contorno cerrado suave L está definida una función real $f(s)$, continua en L, a excepción de los puntos $t_1, t_2, \ldots, t_l$, donde tiene discontinuidades de primera especie. Los valores límites de $f(s)$ en los puntos de discontinuidad los denotaremos así: $f(s_k - 0) = a_k$, $f(s_k + 0) = b_k$. Muéstrese que la solución del problema de Dirichlet

$$u = f(s)$$

para el dominio D, limitado por el contorno L, puede ser representada en la forma

$$u(x, y) = v(x, y) + \sum_{k=1}^{l} \frac{a_k - b_k}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y - \beta_k}{x - \alpha_k} \quad (t_k = \alpha_k + i\beta_k),$$

donde $v(x, y)$ es la solución del problema de Dirichlet con coeficientes continuos. Demuéstrese que en la clase de funciones cuyo orden de crecimiento es inferior a uno logarítmico, esta solución es única $\left(\frac{u(x, y)}{\ln r_i} \to 0\right.$ junto con la distancia r_i entre el punto de discontinuidad t_i y un punto arbitrario del dominio).

8*. Resuélvase el problema de Hilbert con coeficientes discontinuos, aplicando el método del p. 28.2 (buscando un factor de regularización). Úsense los resultados del problema antecedente (V. K. Stoliarova 1)*).

9*. Supongamos que el dominio D es simétrico con relación al eje Ox y la función buscada $\Phi(z)$ se ha obtenido por prolongación desde el semiplano superior al inferior según simetría. En la parte del contorno del dominio D dispuesta en el semiplano superior está definida la parte real de $\Phi(z)$, y en la parte simétrica del contorno, la parte imaginaria de $\Phi(z)$. Demuéstrese que tal problema de contorno mixto es incondicionalmente resoluble en la clase de funciones acotadas. (A. V. Bitsadze 1)*).

Indicación. Al principio se debe aplicar el dominio D sobre un círculo unitario.

10*. Supongamos que el dominio D es un plano con cortes (a_k, b_k) del eje Ox (p. 46.4). Determínese la función $\Phi(z) = u + iv$, analítica y acotada en el dominio D, si en los márgenes del corte está dado

$$u^+ = f^+(t) + c_k,\ u^- = f^-(t) + c_k \text{ en } (a_k, b_k)$$
$$(k = 1, 2, \ldots, m),$$

donde f^+, f^- son funciones prefijadas que satisfacen la condición de Hölder; c_k son unas constantes que no se prefijan de antemano. Pruébese que el problema es resoluble incondicional y unívocamente y que todas las constantes c_k, en este caso, se determinan unívocamente (N. I. Musjelishvili [16], § 19).

11*. Partiendo de los resultados del problema anterior, resuélvese el problema de Dirichlet para un plano cortado a lo largo del eje real (p. 46.3) sin suponer la diferenciabilidad de los valores de contorno. (N. I. Musjelishvili [16], § 91).

Indicación. Examínese la función $U(x, y) = u(x, y) + \sum_{k=1}^{m} a_k \omega_k(z)$, donde

$$\omega_k(z) = \frac{1}{b_k - a_k}\left[(z - b_k)\ln(z - b_k) - (z - a_k)\ln(z - a_k)\right].$$

12. Hállese la función $w = f(z)$ que aplica el semiplano inferior $y < 0$ sobre un semiplano, limitado por la recta $u = kv$, con corte a lo largo del segmento vertical de longitud C que parte del origen de coordenadas, a la condición de que al intervalo $|x| < 1$ le corresponden los márgenes del corte, y a los intervalos $|x| > 1$, los rayos de la recta $u = kv$.

Respuesta.

$$f(z) = \pm iCe^{i\varphi}(z+1)^{\frac{\varphi}{\pi}}(z-1)^{1-\frac{\varphi}{\pi}}.$$

C es una constante real, $\varphi = \operatorname{arctg} k$. El signo en la fórmula se toma según la orientación del corte: arriba o abajo.

Indicación. Hágase uso de lo que la función buscada tiene que ser la solución del problema de contorno de Hilbert de que se trata en el ejemplo del p. 46.4, para $\sigma = 0$, en la clase de funciones, acotadas en los puntos $z = -1$, $z = 1$ y crecientes como z cuando $z \to \infty$.

Sirviéndose de las propiedades geométricas de la función de Zhukovski $W = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ y de su logaritmo, resuélvanse los dos siguientes problemas de contorno:

13. Hállese $f(z) = u + iv$, que es analítica en el semiplano inferior, acotada en los puntos $z = -1$, $z = 1$ y crece como $|z|$ cuando $z \to \infty$, aprovechando la condición de contorno:

$$\operatorname{Im} f(x) = 0 \text{ para } x < -1 \text{ y } x > 1,$$
$$|f(x)| = 1 \text{ para } -1 < x < 1.$$

14. Hállese $f(z) = u + iv$, que es analítica en el semiplano inferior, acotada en los puntos $z = -1$, $z = 1$ y crece como $\ln|z|$ cuando $z \to \infty$, aprovechando la condición de contorno

$$\operatorname{Im} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < -1, \\ \pi & \text{para } x > 1, \end{cases}$$
$$\operatorname{Re} f(x) = 0 \qquad \text{para } -1 < x < 1.$$

15*. Sea dado el problema de contorno

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\,\Phi^-(t),$$

donde se observan todas las condiciones del § 17, a excepción de que el coeficiente $G(t)$ admite discontinuidades de primera especie en los puntos $t_1, t_2, \ldots, t_l$.

Pruébese que por medio de la sustitución

$$\Phi^+(z) = \Pi\,[z - \alpha(t_k)]^{\overline{-\lambda_k}}\,\Phi_1^+(z),$$
$$\Phi^-(z) = \Pi\left(\frac{z - t_k}{z - z_0}\right)^{\lambda_k}\Phi^-(z), \qquad z_0 \in D^+,$$

este problema de contorno se reduce a un problema de contorno del mismo género con coeficiente continuo

$$G_1(t) = G(t)\,\Pi\left(\frac{t - t_k}{\alpha(t) - \alpha(t_k)}\right)^{\lambda_k}(t - z_0)^{-\lambda_k},$$

(L. I. Chibrikova 1)*).

16*. Pruébese que el problema de contorno anterior, para el caso en que el contorno L es abierto y $\alpha(t)$ hace pasar el contorno sobre sí, manteniendo inalterable el sentido, puede ser reducido, por procedimiento indicado en el p. 42.1, al problema

$$\Phi^+[\alpha_1(t)] = G_1(t)\,\Phi^-(t)$$

para un contorno cerrado con coeficiente continuo $G_1(t)$ y una función continua $\alpha_1(t)$. (L. I. Chibrikova)*).

17. Sea dada una ecuación integral singular generalizada

$$a(t)\,\varphi[\alpha(t)] + b(t)\,\varphi(t) + \frac{a(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - \alpha(t)}\,d\tau + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = f(t)$$

(véase el problema 10 al capítulo III y problema 15), donde L es un contorno cerrado; $a(t)$, $b(t)$ tienen discontinuidades de primera especie en el número finito de puntos. Redúzcase la ecuación a un problema de contorno de Riemann con traslación y dése la investigación (L. I. Chibrikova 1)*).

18. Hágase lo mismo para el caso en que L es un contorno abierto.
19. Muéstrese que la ecuación diferencial integral de ala de un avión

$$\frac{\Gamma(t)}{B(t)}-\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\Gamma'(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=f(t)$$

puede ser reducida a la ecuación integral de Fredholm

$$\Gamma(t)+\int_{-a}^{a}K(t,\ \tau)\,\Gamma(\tau)\,d\tau=F(t)+c_1+c_2\operatorname{arcsen}\frac{t}{a},$$

donde

$$K(t,\ \tau)=\frac{1}{2\pi B(\tau)}\ln\frac{a^2-t\tau+\sqrt{(a^2-t^2)(a^2-\tau^2)}}{a^2-t\tau-\sqrt{(a^2-t^2)(a^2-\tau^2)}},$$

$$F(t)=\int_{-a}^{a}B(\tau)\,K(t,\ \tau)\,f(\tau)\,d\tau,$$

c_1, c_2 son constantes arbitrarias.

Indicación. Hágase uso de la fórmula de inversión de la integral de tipo de Cauchy en la clase de funciones no acotadas en ambos extremos, y luego intégrese la ecuación obtenida respecto de t.

20. Con ayuda de una identidad, obtenida por sustitución en la ecuación

$$[\alpha\operatorname{sgn}(x-c)+\beta]\,\varphi(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{a}^{b}\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt=0,\quad a<c<b,$$

$$\beta\neq\pm(1\pm\alpha),\quad a<x<b,$$

de su solución (véase el p. 47.4, 3⁰), cerciórese de qué se verifican las siguientes igualdades en las cuales

$$\mu=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{\alpha-\beta+1}{\alpha-\beta-1},\qquad \nu=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{\alpha+\beta-1}{\alpha+\beta+1},$$

$$0<\operatorname{Re}\mu<1,\quad 0<\operatorname{Re}\nu<1:$$

a) $$\int_{a}^{b}\frac{\operatorname{sen}\mu\pi+\operatorname{sen}\nu\pi+(\operatorname{sen}\mu\pi-\operatorname{sen}\nu\pi)\ \operatorname{sgn}(c-t)}{(t-a)^{\mu}(b-t)^{1-\nu}\mid c-t\mid^{\nu-\mu}(t-x)}dt=$$

$$=\pi\frac{\cos\mu\pi+\cos\nu\pi+(\cos\mu\pi-\cos\nu\pi)\operatorname{sgn}(c-x)}{(x-a)^{\mu}(b-x)^{1-\nu}\mid c-x\mid^{\nu-\mu}};$$

b) $$\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\mu\pi+\operatorname{sen}\nu\pi+(\operatorname{sen}\mu\pi-\operatorname{sen}\nu\pi)\operatorname{sgn}(u-\lambda)}{\mid\lambda-u\mid^{\nu-\mu}u^{1-\nu}(u-v)}\,du=$$

$$=-\pi\frac{\cos\mu\pi+\cos\nu\pi+(\cos\mu\pi-\cos\nu\pi)\operatorname{sgn}(v-\lambda)}{\mid\lambda-v\mid^{\nu-\mu}v^{1-\nu}},\qquad \lambda\geqslant 0,$$

$$v>0;$$

c) $$\int_a^b \frac{[(\operatorname{sen}\mu\pi+\operatorname{sen}\nu\pi)\operatorname{sgn}(c-t)+\operatorname{sen}\mu\pi-\operatorname{sen}\nu\pi](At+B)}{(t-a)^{1-\mu}(b-t)^{1-\nu}\mid c-t\mid^{\mu+\nu}(t-x)}\,dt=$$

$$=-\pi\frac{[(\cos\mu\pi-\cos\nu\pi)\operatorname{sgn}(c-x)+\cos\mu\pi+\cos\nu\pi](Ax+B)}{(x-a)^{1-\mu}(b-x)^{1-\nu}\mid c-x\mid^{\mu+\nu}},$$

$\operatorname{Re}(\mu+\nu)<1$, A y B son números arbitrarios;

d) $$\int_0^\infty \frac{du}{\mid\lambda-u\mid^{1-2\mu}u^{\mu}(u-v)}=\pi\operatorname{ctg}(\mu\pi)\frac{\operatorname{sgn}(\lambda-v)}{\mid\lambda-v\mid^{1-2\mu}v^{\mu}},$$

$$\lambda\geqslant 0,\quad 0<\operatorname{Re}\mu<1/2,\quad v>0;$$

e) $$\int_0^\infty \frac{[(\operatorname{sen}\mu\pi+\operatorname{sen}\nu\pi)\operatorname{sgn}(u-\lambda)+\operatorname{sen}\mu\pi-\operatorname{sen}\nu\pi](b+au)\,du}{\mid\lambda-u\mid^{\mu+\nu}u^{1-\nu}(u-v)}=$$

$$=\pi\frac{[(\cos\mu\pi-\cos\nu\pi)\operatorname{sgn}(v-\lambda)+\cos\mu\pi+\cos\nu\pi](b+av)}{\mid\lambda-v\mid^{\mu+\nu}v^{1-\nu}}$$

$$\lambda\geqslant 0,\quad v>0,\quad \operatorname{Re}(\mu+\nu)<1;$$

f) $$\int_0^\infty \frac{(b+au)\operatorname{sgn}(u-\lambda)\,du}{\mid\lambda-u\mid^{2\mu}u^{1-\mu}(u-v)}=\pi\operatorname{ctg}(\mu\pi)\frac{b+av}{\mid\lambda-v\mid^{2\mu}v^{1-\mu}},$$

$$\lambda\geqslant 0,\quad 0<\operatorname{Re}\mu<1/2,\quad v>0.$$

CAPITULO VII

ECUACIONES INTEGRALES RESOLUBLES EN LA FORMA CERRADA

La resolución exacta de ecuaciones integrales requiere, como regla, la aplicación de ciertos procesos infinitos (método de aproximaciónes sucesivas, sistemas infinitos de las ecuaciones algebraicas lineales- etc.). No obstante, existen algunos tipos de ecuaciones integrales, para los cuales se logra obtener una solución que se expresa en tér minos de un número finito de cuadraturas de las funciones prefijadas o, como suele decirse, solución en la forma cerrada. Unas ecuaciones de este género se han resuelto en el § 21. Se caracterizan por lo que su núcleo representa una función analítica de la variable básica. De método de resolución de estas ecuaciones sirve, como regla, una prolongación analítica en el plano complejo. Su solución en la forma cerrada se logra obtener por introducción de una función analítica auxiliar y empleo de la solución del problema de contorno de Riemann.

A título de ejemplo de la aplicación del método mencionado sirve la resolución de una ecuación integral singular característica expuesta en el § 21. La prolongación analítica en un plano complejo se realizaba en aquel entonces mediante una integral de tipo de Cauchy, para la cual la solución buscada de la ecuación servía de densidad. Las fórmulas de Sojotski para valores límites de la integral permitían reducir la ecuación a un problema de contorno de Riemann. Un método semejante con modificaciones adecuadas permite obtener en la forma cerrada las soluciones de ciertos otros tipos de ecuaciones. En los §§ 51, 52 serán consideradas las ecuaciones integrales singulares con núcleos de tipo automorfo cuyo parte principal constituye un núcleo de tipo de Cauchy. En el caso dado se utilizan los análogos de las fórmulas de Sojotski. Por ser muy específica la representación integral, al problema de contorno de Riemann que aparece en estas circunstancias le es propia una particularidad de que la función buscada en el problema ya no es una función

analítica arbitraria, como fue antes, sino una función analítica de la clase especial, a saber, una función automorfa. Nos enfrentaremos con la necesidad de estudiar los problemas de contorno en esta nueva clase y con tal motivo hemos de atraer la teoría de las funciones automorfas.

Una vez surgida, la teoría de problemas de contorno en la clase de funciones automorfas iba, naturalmente, ampliándose y generalizándose. Se puso de manifiesto su relación estrecha con los problemas de contorno para los dominios dispuestos en las superficies de Riemann. En los últimos quince años la teoría de tales problemas de contorno se ha formado como una disciplina independiente ampliamente ramificada y basada en el aparato matemático bastante complejo.

En el presente capítulo se consideran también las ecuaciones con núcleos potenciales y logarítmicos. Los últimos son funciones integrales, por lo cual estas ecuaciones parecen ser no singulares. Sin embargo, la circunstancia decisiva en est ecaso consiste en lo que dichas ecuaciones son de primer género y a esto se debe que ellas se encuentran en la clase de ecuaciones subordinadas a la teoría de Noether.

Para la resolución de ambas clases de ecuaciones podríamos recurrir al método, descrito arriba, de prolongación analítica en un plano complejo y su reducción, con la ayuda de los análogos de las fórmulas de Sojotski, al problema de contorno de Riemann. No obstante, el estudio del problema ha revelado que con miras del desarrollo de la teoría, en particular, para la investigación de las clases admisibles de funciones prefijadas y buscadas, resulta más conveniente hacer uso de su relacióne directa con las ecuaciones con núcleo de Cauchy, estudiadas en los capítulos III y VI.

§ 51. Ecuaciones con núcleos automorfos de grupo finito [1]

Para la resolución de una ecuación completa que se escribirá en la forma

$$a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int\limits_{L_0}\left[\frac{1}{\tau-t}+K(t,\tau)\right]\varphi(\tau)\,d\tau=f(t), \qquad (51.1)$$

introduzcamos, por analogía con lo hecho en caso de la ecuación característica, la función

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\left[\frac{1}{\tau-z}+K(z,\tau)\right]\varphi(\tau)\,d\tau. \qquad (51.2)$$

[1]) El material de este párrafo sigue la obra de F. D. Gájov y L. I. Chíbrikova 1)*.

Para que $\Phi(z)$ sea una función analítica uniforme, es necesario ante todo que el núcleo $K(t, \tau)$ sea unívoco y analítico respecto de la variable t. Esto es la primera restricción natural para que el método pueda ser aplicable. Admitamos que ella se cumple. La diferencia esencial de una función, definida por la integral (51.2), de la función, definida por la integral de tipo de Cauchy consiste en lo que la primera, además de la línea L_0, puede tener también otras líneas de singularidades que representan las líneas singulares de la función $K(z, \tau)$ a la condición de que la variable τ recorre el contorno de integración L_0. Para que el método indicado pueda conducir al objetivo, es necesario que para todas las líneas posibles de discontinuidad de la función (51.2) la ecuación singular (51.1) preste la posibilidad de formar las condiciones de contorno del problema de Riemann. Los tipos de ecuaciones integrales singulares con núcleo de Cauchy, para las cuales se dará en lo sucesivo una solución en la forma cerrada, se eligen a base de los razonamientos generales aquí enunciados. Su característica fundamental radica en el automorfismo del núcleo.

Las cuestiones de esta índole nos harán salir de los márgenes de la teoría de funciones de la variable compleja y atraer la de funciones automorfas.

51.1. Algunas nociones sobre los grupos finitos de transformaciones lineales fraccionales y las funciones automorfas. Demos a conocer primero los hechos elementales de la teoría de funciones automorfas [1]).

El conjunto de todas las sustituciones lineales fraccionales constituyen un grupo. Este grupo es, en general, infinito. Aquí consideraremos solamente grupos finitos de las sustituciones lineales fraccionales.

Sean dadas las sustituciones $\omega_1(z), \ldots, \omega_m(z)$. Si formamos el conjunto que contiene dichas sustituciones, sus inversas y los productos, construidos de ellas mediante todos los medios posibles, este conjunto constituye un grupo. Tal grupo se denomina *engendrado por sustituciones* $\omega_1(z), \ldots, \omega_m(z)$, y las propias sustituciones llevan el nombre de *sustituciones fundamentales del grupo*. Los grupos engendrados por una sustitución se llama *cíclicos*. El conocimiento de grupos cíclicos es muy importante, porque todo grupo contiene subgrupos cíclicos.

Aclaremos, cuáles deben ser los coeficientes α, β, γ, δ de la sustitución

$$\omega_1(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \tag{51.3}$$

[1]) Los detalles pueden encontrarse en el libro [28] o en las «Conferencias de la teoría analítica» de V. V. Gólubev (В. В. Голубев, «Лекции по аналитической теории», М.—Л., Гостехиздат, 1950).

para que ésta engendre un grupo cíclico finito. Supongamos que el determinante de la sustitución ω_1 es igual a la unidad:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1. \tag{51.4}$$

Siempre podemos conseguir esto, al dividir los coeficientes de la sustitución por $\sqrt{\alpha\delta - \beta\gamma}$.

Puesto que el grupo cíclico engendrado por la sustitución ω_1 contendrá todas sus iteraciones sucesivas

$$\omega_2 = \omega_1(\omega_1), \quad \omega_3 = \omega_1(\omega_1(\omega_1)), \ldots,$$

entonces, para que el grupo sea finito, es necesario y suficiente que una de estas interaciones se reduzca idénticamente a z, por ejemplo, que

$$\omega_n(z) \equiv z.$$

Deduzcamos la expresión para n—ésima iteración $\omega_n(z)$. Con este fin hagamos uso de la siguiente representación para una función lineal fraccional ([28], pág. 24):

$$\frac{\omega_1(z)-\xi_1}{\omega_1(z)-\xi_2} = K\frac{z-\xi_1}{z-\xi_2}, \tag{51.5}$$

donde ξ_1, ξ_2 son los puntos fijos de la sustitución $\omega_1(z)$, y K es un número distinto de la unidad:

$$K = \frac{\alpha-\gamma\xi_1}{\alpha-\gamma\xi_2} \tag{51.6}$$

el cual, al cumplirse la condición (51.4), satisface la correlación

$$K + \frac{1}{K} = (\alpha+\delta)^2 - 2. \tag{51.7}$$

De (51.5) obtenemos

$$\frac{\omega_n(z)-\xi_1}{\omega_n(z)-\xi_2} = K^n\frac{z-\xi_1}{z-\xi_2},$$

de donde encontramos

$$\omega_n(z) = \frac{(K^n\xi_2-\xi_1)z+(1-K^n)\xi_1\xi_2}{(K^n-1)z+\xi_2-K^n\xi_1}.$$

De la expresión obtenida se infiere que $\omega_n(z) \equiv z$, si, y sólo si, $K^n = 1$, es decir, cuando

$$K = e^{\frac{2\pi ik}{n}} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Al sustituir el valor de K en (51.7), obtendremos

$$(\alpha+\delta)^2 - 2 = e^{\frac{2\pi ik}{n}} + e^{-\frac{2\pi ik}{n}} = 2\cos\frac{2\pi k}{n},$$

de donde

$$(\alpha+\delta)^2 = 4\cos^2\frac{\pi k}{n}$$

y, por lo tanto,

$$\alpha+\delta = \pm 2\cos\frac{\pi k}{n} \quad (k=1, 2, \ldots, n-1). \tag{51.8}$$

Esta última fórmula se empleará a continuación. Las igualdades (51.4) y (51.8) son condiciones necesarias y suficientes para que el grupo cíclico engendrado por la sustitución (51.3) tenga n términos.

Consideraremos a título de ejemplos los casos en que $n = 2$ y $n = 3$.

1) $\quad n=2,\ k=1; \quad \cos\frac{\pi k}{n} = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$

La condición (51.8) nos da $\delta = -\alpha$, y la sustitución

$$\omega(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z-\alpha}$$

es, para $-\alpha^2 - \beta\gamma = 1$, la forma general de la sustitución que coincide con su inversa $\omega[\omega(z)] = z$.

2) $\quad n=3, \quad k=1, 2; \quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$

Las condiciones (51.8) tienen la forma $\alpha + \delta = \pm 1$, y obtenemos dos familias de sustituciones de dos parámetros:

$$\omega(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+1-\alpha}, \quad \alpha(1-\alpha)-\beta\gamma = 1,$$

$$\omega(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z-1-\alpha}, \quad \alpha(1+\alpha)+\beta\gamma = -1,$$

que satisfacen la condición $\omega_3(z) \equiv z$.

Demos, ahora, la definición de funciones automorfas y señalemos algunas de sus propiedades. Las *funciones*, invariantes con relación a cierto grupo de sustituciones lineales fraccionales, se llaman *automorfas*.

Las funciones automorfas racionales constituyen una clase única de funciones uniformes que son automorfas con relación a los grupos finitos.

Los puntos (o figuras) que se obtienen uno del otro (una de la otra) con ayuda de las sustituciones de un grupo, se denominan *equivalentes*. Una función automorfa adquiere en los puntos equivalentes los mismos valores. Un dominio, que no contiene dos puntos distintos equivalentes entre sí, pero contiene puntos equivalentes a cualquier punto del plano con relación al grupo en consideración, recibe el

nombre de *dominio fundamental del grupo* (respectivamente, *dominio fundamental de la función automorfa*).

Si algún grupo no contiene sustituciones lineales enteras y

$$\omega_k(z) = \frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

son sustituciones básicas del grupo, entonces el dominio fundamental lo constituirá el exterior de las así llamadas circunferencias isométricas de las sustituciones básicas cuya ecuación es

$$|\gamma_k z + \delta_k| = 1.$$

Las funciones automorfas tienen en el dominio fundamental un número igual de ceros y polos y, en general, adquieren cualquiera de sus valores un número igual de veces. De esta propiedad se deduce que si una función automorfa en el dominio fundamental no tiene polo, es idénticamente igual a una constante.

Un papel destinguido en la teoría de funciones automorfas lo desempeña la así llamada *función básica del grupo*. Esta es una función automorfa

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\omega_k(z) - a} \tag{51.9}$$

(donde a es un número fijo cualquiera), que en cada dominio fundamental toma cualquiera de sus valores solamente una vez.

Si la función

$$F(z) = \sum_{k=1}^{n-1} \omega_k(z \tag{51.10}$$

no se degenera idénticamente en una constante, entonces es la función automorfa básica que posee polo en el punto infinitamente alejado.

En lo sucesivo hará falta una función automorfa que tiene polo de cierto orden $\varkappa$ en el infinito. En términos de la función (51.10) se expresa mediante un polinomio simple $P_\varkappa(F)$. Si $F(z)$ tiene polo en algún punto finito, ella puede ser representada en la forma

$$\frac{P_\varkappa(F)}{[F(z) - F(z_\infty)]^\varkappa}, \tag{51.11}$$

donde z_∞ es un punto infinitamente alejado o cualquier punto equivalente.

51.2. Reducción de una ecuación integral singular completa al problema de contorno. Sea L_0 una curva suave que en lo sucesivo consideraremos, para simpleza, cerrada, y sean

$$\omega_0(t) \equiv t, \quad \omega_1(t), \ \ldots, \ \omega_{n-1}(t)$$

funciones lineales fraccionales que componen un grupo.

Examinemos la ecuación

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_{L_0}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{\tau-\omega_k(t)} - \frac{1}{\tau-\omega_k(\infty)}\right]\varphi(\tau)\,d\tau = f(t), \quad (51.12)$$

donde $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ son las funciones prefijadas, que satisfacen la condición de Hölder, siendo $a^2(t) - b^2(t) = 1$.

Introduzcamos la función

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{\tau-\omega_k(z)} - \frac{1}{\tau-\omega_k(\infty)}\right]\varphi(\tau)\,d\tau, \quad (51.13)$$

que satisface la condición $\Phi(\infty) = 0$. Será analítica en todos los puntos, salvo la curva L_0 y las curvas L_k, cuyas ecuaciones son $\tau - \omega_k(z) = 0$ ó $z = \omega_k^{-1}(\tau)$, $\tau \in L_0$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$.

Veamos el comportamiento de $\Phi(z)$ en las líneas L_k. Cuando z corta la curva L_0, $\omega_k^{-1}(z)$ corta la curva L_k. Al sustituir en (51.13) $\omega_k^{-1}(z)$ en lugar de z, advertimos que todos los sumandos en la suma varían continuamente, a excepción de $(k+1)$—ésimo, el cual se convierte en una integral de tipo Cauchy con línea de saltos L_0. Supongamos que todas las funciones $\omega_k^{-1}(z)$ transforman la curva L_0 en las curvas L_k, conservando el sentido, y que todas las curvas L_k o bien están privadas de puntos comúnes o bien se intersecan en un número finito de éstos. Entonces es fácil ver que para todo punto de las curvas L_k, no coincidente con los puntos múltiples, para $z \to \omega_k^{-1}(t) \in L_k$ $(t \in L_0)$ se verifica la igualdad

$$\Phi^{\pm}[\omega_k^{-1}(t)] = \pm\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\frac{1}{\tau-\omega_j[\omega_k^{-1}(t)]} - \frac{1}{\tau-\omega_j(\infty)}\right]\varphi(\tau)\,d\tau.$$

En vista de que $\omega_k(z)$ forma un grupo, la suma en el segundo miembro de la última igualdad se diferencia de la suma $\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{\tau-\omega_k(t)} - \frac{1}{\tau-\omega_k(\infty)}\right]$ solamente en el orden de sumandos.

Por ello, en los contornos L_k serán válidas las fórmulas análogas a las de Sojotski:

$$\varphi(t) = \Phi^+[\omega_k^{-1}(t)] - \Phi^-[\omega_k^{-1}(t)],$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_{L_0}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{\tau-\omega_k(t)}-\frac{1}{\tau-\omega_k(\infty)}\right]\varphi(\tau)\,d\tau =$$

$$= \Phi^+[\omega_k^{-1}(t)] + \Phi^-[\omega_k^{-1}(t)] \quad (k=0, 1, \ldots, n-1) \qquad (51.14)$$

Sustituyendo las últimas expresiones en la ecuación integral (51.12), llegamos a que la función $\Phi(z)$ satisfará las condiciones de contorno

$$\Phi^+[\omega_k^{-1}(t)] = \frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}\,\Phi^-[\omega_k^{-1}(t)] + \frac{f(t)}{a(t)+b(t)},$$

las cuales pueden escribirse en la forma

$$\Phi^+(t) = G[\omega_k(t)]\,\Phi^-(t) + g[\omega_k(t)]$$
$$(k = 0, 1, \ldots, n-1), \qquad (51.15)$$

donde están introducidas las designaciones habituales

$$G(t) = \frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}, \quad g(t) = \frac{f(t)}{a(t)+b(t)}. \qquad (51.16)$$

En cuanto al carácter de las condiciones de contorno este problema recuerda el conocido problema de contorno de Riemann. No obstante, para evitar errores, hay que subrayar que NO ES un problema de Riemann puro. La diferencia consiste en lo que aquí se busca una función *que tiene una representación analítica bien determinada* (51.13). Por esta razón, al resolver el problema, se debe prestar atención a lo que, a la par con la satisfacción de las condiciones de contorno en las líneas L_k, la función tenga un carácter analítico prefijado.

Investiguemos la función $\Phi(z)$ más detalladamente. Sustituyendo en (51.13) z por $\omega_j(z)$ y teniendo presente que $\omega_j(z)$ forman un grupo, resulta que $\Phi(z)$ satisface la condición

$$\Phi[\omega_j(z)] = \Phi(z), \qquad (51.17)$$

es decir, queda invariante al sustituirse el grupo.

Por consiguiente, la función buscada $\Phi(z)$ es *una función automorfa con grupo prefijado de sutituciones* $\omega_0(z)$, $\omega_1(z)$, . . ., $\omega_{n-1}(z)$.

De este modo, la ecuación singular prefijada (51.12) se reduce al problema de contorno en el que se necesita determinar una función automorfa analítica a trozos $\Phi(z)$, dotada de n líneas de discontinuidad L_k, en las cuales sus valores límites satisfacen las condiciones de contorno (51.15) y la condición complementaria $\Phi(\infty) = 0$.

Ha de notarse que las condiciones de contorno (51.15) para las curvas L_1, . . ., L_{n-1} podrían ser obtenidas de la condición de contorno para la curva L_0, con la ayuda de la correlación (51.17).

Aplicando los razonamientos análogos a los realizados en el p. 21.1, podemos demostrar que la solución del problema de contorno obtenido es equivalente a la de la ecuación de partida (51.12).

OBSERVACION. Si entre las transformaciones del grupo hay algunas que aplican la curva L_0 alterando el sentido, entonces hay que cambiar algo los razonamientos.

Supongamos que las transformaciones del grupo $\omega_{k_1}^{-1}(z)$, $\omega_{k_2}^{-1}(z)$, . . . aplican el contorno L_0 alterando el sentido. Entonces para las curvas L_{k_j} $(j = 1, 2, \ldots)$ las funciones $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$ cambian de lugares y la condición de contorno (51.15) debe ser sustituida por

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{G[\omega_{k_j}(t)]}\Phi^-(t) - \frac{f[\omega_{k_j}(t)]}{a[\omega_{k_j}(t)] - b[\omega_{k_j}(t)]} \text{ en } L_{k_j} \quad (51.15')$$

$$(j = 1, 2, 3, \ldots).$$

51.3. Resolución del problema de contorno. Pasemos a la resolución del problema de contorno (51.15), al cual se ha reducido la de la ecuación singular (51.12). El contorno $L = L_0 + L_1 + \ldots + L_{n-1}$, en el cual está dada una condición de contorno, tendrá, en general, puntos múltiples. Con miras de resolver el problema de contorno aprovecharemos el método aplicado en el § 44. Según nos hemos convenido, consideraremos que el contorno L_0 es cerrado. En este caso todos los contornos L_k, equivalentes a L_0, también serán cerrados.

De acuerdo con lo establecido en el p. 44.3, la función canónica $X(z)$ para un conjunto de contornos $L_0, L_1, \ldots, L_{n-1}$ puede construirse como producto de las funciones canónicas $X_0(z), X_1(z), \ldots, X_{n-1}(z)$ para cada uno de estos contornos por separado. Sin embargo, en el caso dado no hay necesidad de construir función canónica para cada contorno L_k, puesto que si $X_0(z)$ es una función canónica para el contorno L_0:

$$X_0^+(t) = G(t)\, X_0^-(t),$$

entonces, sustituyendo en esta igualdad $t \in L_0$ por $\omega_k(t)$, $t \in L_k$, obtendremos

$$X_0^+[\omega_k(t)] = G[\omega_k(t)]\, X_0^-[\omega_k(t)] \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \quad (51.18)$$

De aquí proviene que $X_k(z) = X_0[\omega_k(z)]$.

De este modo, las funciones canónicas del problema de contorno para los contornos L_k, equivalentes al contorno L_0, son funciones, equivalentes a la función canónica $X_0(z)$ para el contorno principal L_0.

En virtud del p. 44.2

$$X_0(z) = (z - t_0)^{-\varkappa} e^{\Gamma_0(z)},$$

donde t_0 es un punto en el contorno L_0 distinto de puntos de intersección, $\varkappa$ es el índice de la función $G(t)$,

$$\Gamma_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z} d\tau. \tag{51.19}$$

Por consiguiente, la función canónica para todo el contorno L se representará en la forma

$$X(z) = \prod_{k=0}^{n-1} X_0[\omega_k(z)] = \prod_{k=0}^{n-1} [\omega_k(z) - t_0]^{-\varkappa} e^{\sum_{k=0}^{n-1} \Gamma_0[\omega_k(z)]}. \tag{51.20}$$

Esta función es distinta de cero en todos los puntos salvo, quizás, en el punto infinitamente alejado y en los puntos equivalentes a este último, donde ella tiene el orden $\varkappa$ y es invariante con relación a todas las sustituciones del grupo

$$X(z) = X[\omega_k(z)] \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{51.21}$$

Hallemos ahora la solución general del problema homogéneo

$$\Phi^+(t) = G[\omega_k(t))]\, \Phi^-(t), \quad t \in L_k \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{51.22}$$

que satisface la condición $\Phi(\infty) = 0$.

Al introducir en la condición de contorno la expresión para $G[\omega_k(t)]$ de la igualdad

$$X^+(t) = G[\omega_k(t)]\, X^-(t),$$

obtendremos

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}, \quad t \in L_k \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Las últimas igualdades señalan que la función $\frac{\Phi(z)}{X(z)}$ es analítica en todo el plano, a excepción del punto infinitamente alejado y los puntos equivalentes, donde ella puede tener polos de orden $\varkappa - 1$. Además, de (51.17) y (51.21) se sigue que esta función queda invariante respecto de todas las sustituciones $\omega_k(z)$ del grupo. Por consiguiente, es una función automorfa racional, que en el dominio fundamental posee un polo de orden $\varkappa - 1$[1]), y tal función tiene el

[1]) En este razonamiento se revela la diferencia entre el problema qu se resuelve y un problema de contorno de Riemann corriente. Al resolver el último problema sin tomar en consideración la igualdad (51.13) y la (51.17), que fluye de (51.13), entonces, aplicando, como siempre, el teorema generalizado de Liouville, obtendríamos que la razón $\frac{\Phi(z)}{X(z)}$ es un polinomio de grado $n(\varkappa - 1)$.

siguiente aspecto (véase la fórmula (51.11))

$$\frac{\Phi(z)}{X(z)} = \frac{P_{\varkappa-1}(F)}{[F(z)-F(z_\infty)]^{\varkappa-1}},$$

donde $F(z)$ es una función básica del grupo (51.9), $P_{\varkappa-1}$ es un polinomio arbitrario de grado no superior que $\varkappa - 1$, y z_∞ implica un punto infinitamente alejado o uno de los puntos equivalentes.

De este modo, en el caso de índice positivo $\varkappa > 0$ el problema homogéneo (51.22) tiene $\varkappa$ soluciones linealmente independientes que se determinan mediante la fórmula

$$\Phi(z) = X(z)\,\frac{P_{\varkappa-1}(F)}{[F(z)-F(z_\infty)]^{\varkappa-1}}. \qquad (51.23)$$

Cuando $\varkappa \leqslant 0$, el problema homogéneo no tiene soluciones.

Si es posible tomar en calidad de una función automorfa básica la función (51.10), la solución adquiere una forma más simple:

$$\Phi(z) = X(z)\,P_{\varkappa-1}(F). \qquad (51.24)$$

Pasemos ahora a la resolución del problema no homogéneo (51.15). Mediante un procedimiento habitual ya empleado antes más de una vez reducimos la condición de contorno a la forma

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} = \frac{g[\omega_k(t)]}{X^+(t)}, \qquad t \in L_k$$
$$(k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Esto es un problema en que una función analítica (en el caso dado, además, automorfa) se determina por su salto. Recurriendo a las fórmulas (51.14), por una comprobación inmediata nos convencemos con facilidad de que la función analítica a trozos

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{L_0}\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\,\frac{d\tau}{\tau-\omega_k(z)} \qquad (51.25)$$

queda invariante con relación a todas las transformaciones del grupo y satisface la última condición de contorno. Por consiguiente, la función

$$X(z)\,\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{L_0}\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\,\frac{d\tau}{\tau-\omega_k(z)}$$

es una solución particular del problema no homogéneo (51.15). Al sumar la solución general del problema homogéneo, obtenemos la solución general del problema no homogéneo (51.15):

$$\Phi(z) = X(z)\left\{\Psi(z) + \frac{P_{\varkappa-1}(F)}{[F(z)-F(z_\infty)]^{\varkappa-1}}\right\}, \qquad (51.26)$$

donde $X(z)$ es una solución canónica, determinada mediante la fórmula (51.20), y $\Psi(z)$ se expresa por la fórmula (51.25).

Cuando $\varkappa < 0$, hay que poner $P_{\varkappa-1} \equiv 0$, y, además, exigir que $\Psi(z)$ se reduzca en el infinito a cero de orden $(-\varkappa + 1)$. El desarrollo de la última en el entorno de un punto infinitamente alejado tendrá por expresión

$$\Psi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \int_{L_0} \frac{\omega_k'(\tau)\, \omega_k^{j-1}(\tau)\, g(\tau)}{X^+(\tau)}\, d\tau \right] z^{-j}.$$

Al igualar a cero los coeficientes de z^{-j} $(j = 1, 2, \ldots, -\varkappa)$, obtendremos las condiciones de resolubilidad del problema

$$\int_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k'(\tau)\, \omega_k^{j-1}(\tau)\, d\tau = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, -\varkappa). \qquad (51.27)$$

De este modo, al igual que en el caso del problema de Riemann corriente, tenemos los siguientes resultados:

El problema de contorno homogéneo (51.22) *tiene, cuando* $\varkappa > 0$, $\varkappa$ *soluciones linealmente independientes que desaparecen en el infinito; para* $\varkappa \leqslant 0$ *el problema es insoluble.*

El problema de contorno no homogéneo (51.15) *es incondicionalmente resoluble para* $\varkappa \geqslant 0$. *Cuando* $\varkappa < 0$ *es resoluble sólo cuando se cumplen* $-\varkappa$ *condiciones* (51.27).

51.4. Solución de la ecuación integral. De la solución (51.26) del problema de contorno (51.15) podemos hallar la solución de la ecuación integral de partida (51.12), aprovechando para ello la fórmula de Cjotski

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t). \qquad (51.28)$$

Razonando sumamente igual que en los pp. 21.2 y 47.2, llegamos a la igualdad

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{G(t)}\right] g(t) + X^+(t)\left[1 - \frac{1}{G(t)}\right]\left\{\Psi(t) - \frac{1}{2}\,\frac{P_{\varkappa-1}(F)}{[F(t) - F(z_\infty)]^{\varkappa-1}}\right\}.$$

Sustituyendo aquí los valores de $X(t)$, $\Psi(t)$ de las fórmulas (51.20), (51.25), como también $G(t)$, $g(t)$ de las fórmulas (51.16) y tomando en consideración la condición impuesta $a^2(t) - b^2(t) = 1$, obtendremos

$$\varphi(t) = a(t) f(t) - b(t) Z(t) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\pi i} \int_{L_0} \frac{f(\tau)}{Z(\tau)}\, \frac{d\tau}{\tau - \omega_k(t)} + b(t) Z(t)\, \frac{P_{\varkappa-1}(F)}{[F(t) - F(z_\infty)]^{\varkappa-1}}, \qquad (51.29)$$

donde

$$Z(t) = [a(t) + b(t)]\, X^+(t) = [a(t) - b(t)]\, X^-(t) =$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1} [\omega_k(t) - t_0]^{-\varkappa} e^{\sum_{k=0}^{n-1} \Gamma_0[\omega_k(t)]}, \qquad (51.30)$$

$$\Gamma_0(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\ln G(\tau)}{\tau - t}\, d\tau, \quad G(t) = \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}.$$

Si $\varkappa \leqslant 0$, se debe poner $P_{\varkappa-1} \equiv 0$, teniendo en cuenta que cuando $\varkappa < 0$, para la resolubilidad de la ecuación han de cumplirse las condiciones

$$\int_{L_0} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k'(\tau)\, \omega_k^{j-1}(\tau) \right] \frac{f(\tau)}{Z(\tau)}\, d\tau = 0$$

$$(j = 1, 2, \ldots, -\varkappa). \qquad (51.31)$$

Así pues, en el caso de una ecuación integral llegamos a los resultados análogos a los que se han obtenido en el punto antecedente dara el problema de contorno correspondiente.

51.5. Ejemplo. Resolvamos la ecuación integral singular

$$\frac{1}{2}(t^p + t^{-p})\, \varphi(t) + \frac{t^{-p} - t^p}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \left(\frac{1}{\tau - t} + \frac{1}{\tau - \alpha + t} \right) \varphi(\tau)\, d\tau = t^{-p} f(t)$$

$$(0 < \alpha < 2,\ p \text{ es entero}).$$

Introducimos una función analítica a trozos, automorfa con relación al grupo $\omega_0(z) \equiv z$, $\omega_1(z) \equiv \alpha - z$

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \left(\frac{1}{\tau - z} + \frac{1}{\tau + z - \alpha} \right) \varphi(\tau)\, d\tau.$$

Esta tiene dos líneas de discontinuidad: la circunferencia unitaria L_0 y la circunferencia L_1: $|\tau - \alpha| = 1$, que se obtiene de L_0 por medio de la transformación $\omega_1(z) = \alpha - z$.

Las condiciones de contorno en $L = L_0 + L_1$ serán

$$\Phi^+(t) = t^{2p}\Phi^-(t) + f(t) \text{ en } L_0,$$

$$\Phi^+(t) = (\alpha - t)^{2p}\Phi^-(t) + f(\alpha - t) \text{ en } L_1.$$

Las funciones canónicas para los simples contornos componentes se determinan por las expresiones

$$X_0^+(z) = 1, \quad X_0^-(z) = z^{-2p}, \quad X_0^+(z) = 1,$$

$$X_0^-(z) = (\alpha - z)^{-2p}.$$

Los razonamientos ulteriores ilustran no sólo el método expuesto en el presente párrafo, sino, en general, la resolución de los problemas de contorno en caso de los contornos que se intersecan. Estos problemas presentan dificultades

peculiares, porque los dominios, limitados por los contornos componentes simples, se cubren; por esta causa expondremos la resolución más detalladamente que de costumbre.

Cada una de las curvas L_k divide el plano en dos dominios complementarios D_k^+, D_k^- ($k = 0, 1$). Todo el contorno L divide el plano en cuatro dominios conexos, los cuales es cómodo denotarlos como productos de aquellos dominios simples que al intersecarse dan dichos dominios conexos (fig. 18).

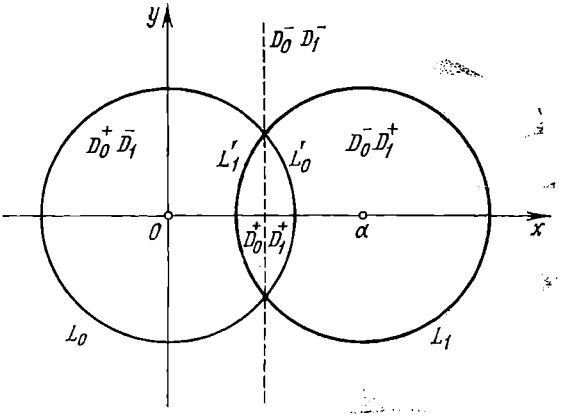


Fig. 18

En cada uno de estos dominios la función canónica se definirá, en virtud de la fórmula $X(z) = \prod_{k=0}^{1} X_k(z)$, mediante las siguientes expresiones

$$X(z) = \begin{cases} X_0^+ X_1^+ = 1 & \text{en } D_0^+ D_1^+, \\ X_0^+ X_1^- = (\alpha - z)^{-2p} & \text{en } D_0^+ D_1^-, \\ X_0^- X_1^+ = z^{-2p} & \text{en } D_0^- D_1^+, \\ X_0^- X_1^- = z^{-2p}(\alpha - z)^{-2p} & \text{en } D_0^- D_1^-. \end{cases}$$

El orden de $\Phi(z)$ en el punto infinitamente alejado es 2, el de $X(z)$ es $4p$. La razón $\frac{\Phi(z)}{X(z)}$ tiene el orden $(4p - 2)$. Al tomar en consideración que el punto infinitamente alejado es un punto fijo del grupo y pertenece, consecuentemente, a los dos dominios fundamentales (los últimos son semiplanos limitados por una recta que pasa a través del punto $z = \alpha/2$), este orden tiene que ser dividido entre dos.

Por función automorfa básica del grupo tomaremos la siguiente

$$F(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{\alpha - z} = \frac{\alpha}{z(\alpha - z)},$$

que posee un polo simple en el origen de coordenadas[1]).

[1]) La función elemental $z + \omega(z)$ no puede aplicarse, puesto que se reduce a una constante.

La solución general del problema homogéneo para $p > 0$ tendrá por expresión

$$\frac{P_{2p-1}(F)}{[F(z)-F(\infty)]^{2p-1}} = c_0 + \frac{c_1}{F(z)} + \ldots + \frac{c_{2p-1}}{F^{2p-1}(z)}.$$

La solución general del problema de contorno se escribirá así:

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{f(\tau)}{X^+(\tau)} \left[\frac{1}{\tau - z} + \frac{1}{\tau - \alpha + z}\right] d\tau + c_0 + c_1 z(\alpha - z) + \ldots + c_{2p-1} z^{2p-1} (\alpha - z)^{2p-1}$$

(aquí las constantes $c_k \alpha^k$ están sustituidas por c_k).

Al calcular la integral se debe recordar que para $X^+(\tau)$ en diferentes trozos de la curva L se toman las expresiones diferentes (1 en L_0' y $(\alpha - \tau)^{-2p}$ en L_0'')[1].

Si $p \leqslant 0$, la solución será

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{f(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{2\tau - \alpha}{\tau^2 - z^2 - \alpha(\tau - z)} d\tau,$$

con la particularidad de que, cuando $p < 0$, deben cumplirse, de acuerdo con la teoría general, $-2p$ condiciones de resolubilidad. Las últimas se pueden obtener por el desarrollo de $\Phi(z)$ en una serie de potencias de $F(z) = \frac{\alpha}{z(\alpha - z)}$.

Podemos comprobar con facilidad la validez de las igualdades

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{f(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{F(z)}{F(\tau)} \frac{F'(\tau)\, d\tau}{F(\tau) - F(z)} = \sum_{j=1}^{\infty} c_j F^j(z),$$

$$c_j = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{f(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{F'(\tau)}{F^{j+1}(\tau)} d\tau.$$

Para que el problema sea resoluble es necesario y suficiente que se verifique

$$\int_{L_0} \frac{f(\tau)}{X^+(\tau)} (2\tau - \alpha)[\tau(\alpha - \tau)]^{j-1} d\tau = 0$$

$$(j = 1, 2, \ldots, -2p).$$

Hagamos uso de la solución del problema de contorno para resolver la ecuación integral de partida

$$Z(t) = [a(t) + b(t)] X^+(t) = t^{-p} X^+(t).$$

---

[1]) Puede parecer que aquí se tiene una integral de densidad discontinua. En realidad no es así. Si introducimos $X(z)$ bajo el signo de la integral y examinamos la densidad $\frac{X(z)}{X^+(\tau)} f(\tau)$, entonces, como es fácil ver, ella se portará, al pasar por los extremos de los trozos L_0', L_0'', como una función continua.

La solución general de la ecuación integral podemos representar en la forma

$$\varphi(t)=\frac{1}{2}(t^{-2p}+1)f(t)-\frac{(t^{-2p}-1)X^+(t)}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{f(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{2\tau-\alpha}{\tau^2-t^2-\alpha(\tau-t)}\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}(t^{-2p}-1)X^+(t)[c_0+c_1t(\alpha-t)+\ldots+c_{2p-1}t^{2p-1}(\alpha-t)^{2p-1}].$$

Cuando $p<0$, para la resolubilidad de la ecuación deben cumplirse $-2p$ condiciones

$$\int\limits_{|\tau|=1}\frac{f(\tau)}{X^+(\tau)}(2\tau-\alpha)[\tau(\alpha-\tau)]^{j-1}\,d\tau=0 \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ -2p).$$

51.6. Caso en que la función analítica auxiliar no se reduce a cero en el infinito[1]. En los núcleos de las ecuaciones integrales examinadas los términos adicionales figuraban en la forma $\frac{1}{\tau-\omega_k(\infty)}$. Debido a esta circunstancia las funciones auxiliares $\Phi(z)$, que se introducían, tenían, al igual que las integrales de tipo de Cauchy, la propiedad $\Phi(\infty)=0$. Esto hacía posible a base del teorema generalizado de Liouville, escribir la solución general en la cual todos los sumandos del polinomio $P_{\varkappa-1}(F)$ eran las soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea. Si dichos términos adicionales se excluyen del núcleo, surgen unas complicaciones relacionadas con la separación de soluciones en realidad linealmente independientes. Examinemos brevemente este caso.

Así pues, sea dada una ecuación integral

$$a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int\limits_L\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\tau-\omega_k(t)}\varphi(\tau)\,d\tau=f(t). \qquad (51.12')$$

La función analítica auxiliar correspondiente se escribirá en la forma

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\tau-\omega_k(z)}\varphi(\tau)\,d\tau. \qquad (51.13')$$

Aquí debemos distinguir dos casos esencialmente diferentes.

1°. LAS SUSTITUCIONES DEL GRUPO SON ENTERAS. En este caso, según proviene de las propiedades de funciones automorfas, la función $\Phi(z)$ tiene en el punto infinitamente alejado un cero simple en cada uno de los dominios fundamentales. De aquí se obtiene con facilidad[2] que la fórmula (51.23) da en el caso dado una solución general que contiene $\varkappa$ soluciones linealmente independientes.

[1] La investigación de este punto se ha expuesto según la obra de I. A. Paradóksova 3)*.

[2] Hay que tener en cuenta que el punto infinitamente alejado es un punto fijo del grupo (véanse los razonamientos al resolverse el ejemplo 51.5).

2°. LAS SUSTITUCIONES DEL GRUPO SON FRACCIONALES. En este caso $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(z) \neq \text{const}$ y $F(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(z)$ se la puede tomar por función básica del grupo.

Al desarrollar $\Phi(z)$ en serie en el entorno de un punto infinitamente alejado, el término independiente de este desarrollo será dado de manera siguiente:

$$\Phi(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} \int_L \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau - \omega_k(\infty)}. \tag{51.32}$$

Si la última integral, al sustituirse en ella la solución general de la ecuación integral, se reduce idénticamente a cero para valores arbitrarios de los parámetros que la integran, entonces el caso en consideración no se diferenciará en nada del caso examinado más arriba y la solución general también se definirá mediante la fórmula (51.23).

Supongamos, ahora, que la integtal (51.32) no se reduce idénticamente a cero. Entonces $\Phi(\infty) \neq 0$ y en la solución del problema de contorno y de la ecuación integral el polinomio $P_{\varkappa-1}$ debe sustituirse por $P_\varkappa$. De este modo, en la solución general figurarán $\varkappa + 1$ parámetros. No obstante, no todos serán independientes. Resulta que entre ellos existe una correlación lineal. Procedamos a deducir esta correlación.

Ateniéndose a las designaciones anteriores, escribamos para el caso en consideración las soluciones del problema de contorno y de la ecuación integral singular

$$\Phi(z) = X(z)\,[\Psi(z) + P_\varkappa(F)], \tag{51.33}$$

$$\varphi(t) = a(t)\, f(t) - b(t)\, Z(t) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - \omega_k(t)} + b(t)\, Z(t)\, P_\varkappa(F). \tag{51.34}$$

Con el objeto de obtener la correlación lineal buscada calculemos el valor de $\Phi(\infty)$ mediante dos procedimientos. Una vez a base de la solución (51.33) del problema de contorno y la otra, a base de la propia definición de $\Phi(z)$ (fórmula (51.32)), sustituyendo en la última $\varphi(t)$ tomada de la solución (51.34) de la ecuación singular.

Al tomar en consideración que la función canónica tiene en el infinito un cero de orden $\varkappa$, $F^\varkappa = [z + \sum_{k=1}^{n-1} \omega_k(z)]^\varkappa$, el polo del mismo orden, y al designar con $c_\varkappa$ los coeficientes del polinomio $P_\varkappa$, de (51.33) encontramos

$$\Phi(\infty) = \lim_{z \to \infty} [X(z)\, c_\varkappa F^\varkappa(z)] = \alpha c_\varkappa, \tag{51.35}$$

donde

$$\alpha = \lim_{z \to \infty} [z^{\varkappa} X(z)].$$

Comparando (51.32) y (51.35), obtenemos la igualdad

$$c_{\varkappa}\left[\alpha - \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\int_L \frac{b(\tau)\,Z(\tau)\,F^{\varkappa}(\tau)}{\tau-\omega_k(\infty)}\,d\tau\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\int_L \frac{d\tau}{\tau-\omega_k(\infty)}\left[a(\tau)\,f(\tau) - \right.$$

$$\left. - \frac{b(\tau)\,Z(\tau)}{\pi i}\sum_{j=0}^{n-1}\int_L \frac{f(\tau_1)}{Z(\tau_1)}\,\frac{d\tau}{[\tau_1-\omega_j(\tau)} + b(\tau)\,Z(\tau)\,P_{\varkappa-1}(F)\right]. \quad (51.36)$$

Si el coeficiente de $c_{\varkappa}$ no se reduce a cero, la última correlación permite expresar el parámetro $c_{\varkappa}$ en términos de los demás. Introduciendo el valor encontrado de $c_{\varkappa}$ en la fórmula (51.34), obtendremos la solución general que contiene $\varkappa$ parámetros linealmente independientes.

Supongamos ahora que el coeficiente de $c_{\varkappa}$ es nulo. Demostremos que la correlación (51.36) no puede ser satisfecha idénticamente y que, por lo tanto, uno de los parámetros $c_0, c_1, \ldots, c_{\varkappa-1}$ puede ser expresado en términos de los restantes. Efectivamente, para la suposición mencionada la igualdad (51.36) puede escribirse en la forma

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-\omega_k(\infty)}\,d\tau = 0.$$

Si se admite que la última igualdad se satisface idénticamente, esto significará que $\Phi(\infty) = 0$, lo que contradice a la suposición inicial. De este modo, la solución general siempre contiene $\varkappa$ parámetros linealmente independientes.

51.7. Observaciones adicionales. Hemos considerado aquí solamente el tipo elemental de la ecuación integral singular completa que se resuelve en la forma cerrada. F. D. Gájov y L. I. Chíbrikova en su obra 1) ofrecen la resolución de una serie de otros tipos de ecuaciones que pueden ser resueltas por métodos análogos. Estas ecuaciones pueden dividirse en dos grupos: en el primer grupo las ecuaciones se resuelven igual que en el p. 51.4 (véase el problema 6 al final del capítulo), con la ayuda de funciones automorfas; el segundo grupo está representado por las ecuaciones cuya resolución se realiza por medio de unas funciones más complejas, a saber, aquellas que durante la transformación del grupo adquieren ciertos factores. A este último grupo pertenecen las conocidas ecuaciones empleadas por Trikomi [26] y A. B. Bitsadze 1) en la resolución de los problemas de contorno para ecuaciones de tipo mixto (véanse los problemas 8 y 9).

Al lector que tiene ganas de familiarizarse con la cuestión más detalladamente le recomendamos dirigirse a la obra citada arriba de F. D. Gájov y L. I. Chíbrikova. Sin embargo, prevenimos que en dicha obra hay una inexactitud esencial. Los núcleos de ecuaciones integrales se toman allá sin términos $\frac{1}{\tau - \omega_k(\infty)}$, y, por esta razón, las funciones automorfas correspondientes, en general, no se reducen en el infinito a cero. La investigación de correlación existente entre $\varkappa + 1$ parámetros, que integran la solución general, llevada a cabo en el punto anterior, en el artículo recomendado está ausente, a consecuencia de lo cual el número de soluciones linealmente independientes indicado en el artículo es una unidad mayor que su cantidad real.

Hagamos dos observaciones más.

1°. Si L_0 es una curva abierta, entonces todas las curvas equivalentes L_k también serán abiertas. Surgen cuestiones habituales acerca de las clases de soluciones. Si los extremos de las curvas L_k no coinciden uno con otro, la cuestión acerca de las clases admisibles se resuelve sumamente igual que en el caso de una ecuación característica dada en un contorno compuesto (p. 44.3). Si, en cambio, los extremos coinciden, las singularidades pueden superponerse una sobre otra y la solución, construida para cada curva componente simple en la clase de funciones integrales, puede resultar no integrable. Por ello, en este caso se necesita una investigación complementaria (véase el p. 44.4).

2°. Con el fin de no complicar el asunto, considerábamos que el contorno L_0, en el cual está dada la ecuación, era simple. No habrán complicaciones en el caso cuando L_0 sea un conjunto de curvas cerradas y abiertas que tienen un número finito de puntos de intersección.

De las generalizaciones para el caso de grupos infinitos trataremos en el párrafo que viene.

§ 52. Ecuaciones con núcleos automórfos de grupo infinito [1]

Parece natural hacer una tentativa de generalizar el planteamiento del problema para el caso de un grupo infinito. Según muestran las investigaciones, sería difícil realizar esta generalización a partir de las fórmulas anteriores, pasando al límite. Para un grupo infinito resulta más fácil enunciar el problema independientemente, de un modo tal que el caso examinado antes figure como caso particular Empecemos por el planteamiento del problema de contorno. Para simpleza, limitémonos a un caso de contorno cerrado.

52.1. Problema de contorno de Riemann. Sea D uno de los dominions compuesto totalmente por los puntos ordinarios de cierto grupo funcional de las transformaciones lineales fraccionales

$$\omega_0(z) \equiv z, \quad \omega_1(z), \quad \omega_2(z), \ldots,$$

y sea L_0 cierta curva cerrada suave, dispuesta íntegramente en el dominio D. Designaremos con L_k ($k = 1, 2, \ldots$) las curvas, equivalentes a L_0, es decir, aquellas en que pasa la curva L_0, siendo transformado el grupo. Convengamos en que las curvas L_k no se superponen, aunque pueden intersecarse.

[1]) El contenido de este párrafo se ha tomado de la obra de L. I. Chíbrikova 2)*.

La función $\Phi(z)$, definida en D, se llamará *automorfa analítica a trozos*, si posee las siguientes propiedades:

1. Es automorfa con relación a las sustituciones del grupo:

$$\Phi[\omega_k(z)] = \Phi(z).$$

2. Es analítica en todos los puntos del dominio a excepción de los puntos del contorno $L = L_0 + L_1 + \ldots$

3. Es continuamente prolongable en todo punto del contorno L, a excepción de los puntos múltiples, cerca de los cuales es acotada.

El problema de Riemann consiste ahora en encontrar una función automorfa $\Phi(z)$, analítica a trozos, que en la curva L_0 satisfaga la condición de contorno

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t), \tag{52.1}$$

donde $G(t)$, $g(t)$ son funciones dadas en L_0 que satisfacen la condición de Hölder, siendo $G(t) \neq 0$.

Las curvas L_k para la función $\Phi(z)$ serán también líneas de discontinuidad. Por analogía con lo hecho en el § 51 sería fácil formar para ellas las condiciones de contorno. No obstante, no hay necesidad de hacerlo, puesto que la solución, que obtendremos a continuación al tomar en consideración la condición de contorno (52.1) y el automorfismo de la función buscada, satisfará automáticamente las condiciones de contorno en todo el contorno L.

Procedamos a resolver el problema enunciado. Al igual que en el caso ordinario (§ 14), la base de la resolución está constituida por un problema de salto

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t). \tag{52.2}$$

Una integral ordinaria de tipo de Cauchy no proporciona su solución, dado que no será cumplida la exigencia de automorfismo. Construyamos un análogo de la integral de tipo de Cauchy para funciones automorfas.

Sean $F(z)$ una función automorfa básica del grupo que en el dominio fundamental R dispone de un polo (simple) z_0, y $g(t)$ una función, definida en el contorno L_0, que satisface la condición de Hölder. Construyamos una integral

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} g(\tau)\frac{F'(\tau)}{F(\tau)-F(z)}\,d\tau. \tag{52.3}$$

Esta define una función automorfa analítica a trozos que tiene la línea de discontinuidad L_0 y se reduce a cero en el punto z_0 (y también en todos los puntos equivalentes). El núcleo de la integral puede ser representado en la forma

$$\frac{F'(\tau)}{F(\tau)-F(z)} = \frac{1}{\tau - z} + \Omega(\tau, z),$$

donde Ω es una función continua en L_0. De aquí se deduce con facilidad que para los valores límites de $\Phi(z)$ en L_0 serán válidas las fórmulas análogas a las de Sojotski (4.9), (4.10):

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t),$$

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{L_0} g(\tau) \frac{F'(\tau)}{F(\tau) - F(\tau)}\, d\tau. \qquad (52.4)$$

Por consiguiente, la integral (52.3) ofrece la solución del problema de salto (52.2) en la clase de funciones automorfas analíticas a trozos que en el punto z_0 se reducen a cero. La solución del problema de salto nulo y con cero en el punto z_0 será un cero idéntico en virtud del teorema sobre la prolongación analítica y las propiedades de funciones automorfas. De aquí proviene que la solución (52.3) es, en el caso que se considera, la única.

Se llamará *función canónica* $X(z)$ del problema (52.1) la función automorfa que satisface la condición de contorno homogénea

$$X^+(t) = G(t)\, X^-(t)$$

que tiene en todos los puntos del dominio fundamental R el orden nulo, salvo el punto z_0, donde posee el orden más alto posible $\varkappa$, igual al índice $G(t)$. Es fácil mostrar que la función canónica se define, con la precisión hasta un factor constante, por la fórmula

$$X(z) = [F(z) - F(t_0)]^{-\varkappa} e^{\Gamma(z)}, \qquad (52.5)$$

donde $F(z)$ es una función automorfa básica, introducida más arriba, con un polo simple en z_0,

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \ln G(\tau) \frac{F'(\tau)}{F(\tau) - F(z)}\, d\tau; \qquad (52.6)$$

t_0 es un punto inicial de integración en la última integral (compárese con el p. 44.2).

Recurriendo a unos razonamientos habituales, obtendremos la solución general del problema (52.1) en la forma

$$\Phi(z) = X(z)\,[\Psi(z) + P_\varkappa(F)], \qquad (52.7)$$

donde

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{F'(\tau)}{F(\tau) - F(z)}\, d\tau, \qquad (52.8)$$

$X(z)$ se determina mediante la fórmula (52.5), y $P_\varkappa$ es un polinomio arbitrario de grado $\varkappa$.

Al imponer sobre la solución buscada la condición $\Phi(z_0) = 0$ (lo que ocurre en la resolución de una ecuación singular), entonces $P_\varkappa$ debe sustituirse por $P_{\varkappa-1}$.

Si en el último caso $\varkappa \leqslant 0$, hay que poner $P_{\varkappa-1} \equiv 0$, y, para $\varkappa < 0$, han de cumplirse las condiciones de resolubilidad

$$\int_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} [F(\tau)]^{j-1} F'(\tau)\, d\tau = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, -\varkappa). \tag{52.9}$$

Lo último se obtiene por desarrollo de la integral (52.8) en una serie de potencias de $F(z)$ y anulación de los primeros $-\varkappa$ coeficientes de este desarrollo.

La enunciación y resolución del problema para el caso de contornos abiertos no representan dificultades algunas.

52.2. Ecuación integral singular. Examinemos una ecuación integral singular

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_{L_0} \frac{F'(\tau)}{F(\tau) - F(t)} \varphi(\tau)\, d\tau = f(t), \tag{52.10}$$

en la cual, como siempre, las funciones prefijadas $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ satisfacen la condición de Hölder, y L_0, $F(t)$ implican lo mismo que en el p. 52.1.

Al introducir una función automorfa analítica a trozos

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{F'(\tau)}{F(\tau) - F(z)} \varphi(\tau)\, d\tau \tag{52.11}$$

y emplear las fórmulas (52.4), llegaremos al problema de contorno de Riemann

$$\Phi^+(t) = G(t)\, \Phi^-(t) + g(t), \tag{52.12}$$

$$G(t) = \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}, \quad g(t) = \frac{f(t)}{a(t) + b(t)}, \tag{52.13}$$

examinado en el punto anterior. Además, en virtud de la propiedad de la función automorfa básica $F(z)$ (un polo simple en z_0), la función $\Phi(z)$ debe satisfacer la condición complementaria $\Phi(z_0) = 0$.

Al hacer uso de la solución del problema de contorno (52.12), obtenida en el p. 52.1, según la fórmula de Sojotski

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t)$$

obtendremos la solución de la ecuación integral (52.10):

$$\varphi(t) = a(t) f(t) - \frac{b(t) Z(t)}{\pi i} \int_{L_0} \frac{f(\tau)}{Z(\tau)} \frac{F'(\tau)}{F(\tau) - F(t)} \times$$

$$\times d\tau + b(t) Z(t) P_{\varkappa-1}(F), \tag{52.14}$$

donde

$$Z(t) = [a(t) + b(t)]\, X^+(t) = [a(t) - b(t)]\, X^-(t) =$$

$$= [F(t) - F(t_0)]^{-\varkappa} e^{\Gamma(t)}. \tag{52.15}$$

Si $\varkappa \leqslant 0$, se debe poner $P_{\varkappa-1} \equiv 0$. Cuando $\varkappa < 0$, han de cumplirse las condiciones de resolubilidad

$$\int_{L_0} \frac{f(\tau)}{Z(\tau)} [F(\tau)]^{j-1} F'(\tau)\, d\tau = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, -\varkappa). \tag{52.16}$$

Los razonamientos indispensables para la deducción de las últimas fórmulas son sumamente análogos a los empleados en el p. 51.4.

Para concluir, hemos de notar que si el grupo resulta ser finito, la ecuación investigada (52.10) se convertirá en la (51.12), estudiada en el párrafo anterior.

52.3. Algunas aplicaciones. A primera vista puede parecer que las funciones automorfas constituyen una clase especial que se encuentra solamente en los casos excepcionales. Esta impresión es errónea. Las funciones automorfas son funciones periódicas corrientes y también funciones biperiódicas. Por consiguiente, las funciones exponenciales, trigonométricas e hiperbólicas, que son de amplio uso en el análisis y las aplicaciones de éste, pertenecen a esta misma clase. A ella pertenecen también las funciones elípticas, las más usadas de funciones trascendentes superiores. A las funciones de esta índole conducen diferentes procesos periódicos y biperiódicos que tienen lugar en la naturaleza. De aquí vienen aplicaciones abundantes que tiene la teoría expuesta. Señalemos unas cuantas de estas aplicaciones, en primer lugar, las matemáticas.

1°. PROBLEMA DE RIEMANN PARA LAS FUNCIONES PERIÓDICAS. Hállese una función $\Phi(z)$, analítica a trozos y periódica de período 2π, cuyos valores límites en el contorno cerrado suave L, dispuesto por entero en la franja del período, satisfagan la condición de contorno

$$\Phi^+(t) = G(t)\, \Phi^-(t) + g(t), \tag{52.17}$$

donde $G(t)$, $g(t)$, igual que en lo anterior, satisfacen la condición de Hölder y $G(t) \neq 0$.

El grupo de transformaciones es engendrada aquí por una sustitución $\omega_1(z) = z + 2\pi$. El dominio fundamental lo representa una franja vertical 2π de ancho, por ejemplo, la franja $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 2\pi$. La función automorfa básica aquí es $e^{iz} = e^{-y} e^{ix}$. En el extremo superior de la franja ella se reduce a cero, y en el extremo inferior tiene polo simple[1]). (El extremo inferior de la franja desempeña el papel del punto z_0.)

[1]) El punto infinitamente alejado es para la función entera e^{iz} esencialmente singular y, cuando $y \to \infty$, tiene un polo de orden infinitamente grande. Mas un punto infinitamente alejado pertenece a todos los dominios fundamentales. Por esto, el orden del polo ha de ser distribuido entre todos ellos. De la propiedad general de una función automorfa básica consistente en lo que ella forma cada uno de sus valores una sola vez, proviene que en el extremo inferior de toda franja de los períodos el orden del polo debe considerarse igual a la unidad. Lo mismo es lícito también para el orden del cero en el extremo superior de la franja.

Conforme a la fórmula (52.3), la solución del problema de salto

$$\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t) = g(t)$$

se da por la función

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi}\int_L g(\tau)\frac{e^{i\tau}\,d\tau}{e^{i\tau}-e^{iz}} = \frac{1}{4\pi i}\int_L g(\tau)\left[\operatorname{ctg}\frac{\tau-z}{2}+i\right]d\tau, \quad (52.18)$$

la cual tiene en el extremo inferior de la franja de los períodos un cero de primer orden. La función canónica, de acuerdo con (52.5) y (52.6), se determinará por la expresión

$$X(z) = (e^{iz}-e^{it_0})\,e^{\Gamma(z)},$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{4\pi}\int_L \ln G(\tau)\operatorname{ctg}\frac{\tau-z}{2}\,d\tau. \quad (52.19)$$

La solución general del problema, de conformidad con (52.7), (52.8), obtenemos en la forma

$$\Phi(z) = X(z)\left\{\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\left[\operatorname{ctg}\frac{\tau-z}{2}+i\right]d\tau + P_\varkappa(e^{iz})\right\}. \quad (52.20)$$

Si se busca una solución que en el extremo inferior de la franja se reduce a cero, $P_\varkappa$ debe sustituirse por $P_{\varkappa-1}$. En este caso, para $\varkappa \leqslant 0$, hay que poner $P_{\varkappa-1} \equiv 0$, con la particularidad de que, cuando $\varkappa < 0$, han de cumplirse las condiciones

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}e^{i\tau(k-1)}\,d\tau = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, -\varkappa). \quad (52.21)$$

2°. PROBLEMA DE HILBERT EN FUNCIONES PERIÓDICAS PARA UN SEMIPLANO. Hállese la función $F(z) = u + iv$, que es analítica en el semiplano y tiene período de 2π, según la condición de contorno

$$a(x)\,u(x) + b(x)\,v(x) = c(x), \quad (52.22)$$

donde $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ son funciones de período 2π.

Empleando el método del p. 30.2, reducimos la última condición a la del problema de Riemann:

$$\Phi^+(x) = -\frac{a(x)+ib(x)}{a(x)-ib(x)}\Phi^-(x) + \frac{c(x)}{a(x)-ib(x)}. \quad (52.23)$$

Respecto de la función analítica a trozos $\Phi^+(z) = F(z)$, $\Phi^-(z) = \overline{F}(z)$, que satisface, en virtud de las últimas correlaciones, la condición

$$\Phi^-(z) = \overline{\Phi^+(z)}, \quad (52.24)$$

la condición de contorno (52.23) puede considerarse definida en el segmento $[0, 2\pi]$. Aplicamos las fórmulas (52.19). Al denotar

$$\arg(a+ib) = \operatorname{arc\,tg}\frac{b(t)}{a(t)} = \theta(t),$$

tendremos

$$\Gamma(z) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left[-\frac{a+ib}{a-ib}\right] \operatorname{ctg}\frac{\tau - z}{2}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} [2\theta(\tau) + \pi] \operatorname{ctg}\frac{\tau - z}{2}\, d\tau.$$

El punto inicial de integración aquí es $t_0 = 0$. Introduciendo en la función canónica (52.19) un factor constante C y eligiendo este último de conformidad con la condición $\overline{X(z)} = X(z)$, tendremos

$$X(z) = \left(\operatorname{sen}\frac{z}{2}\right)^{-2\varkappa} e^{\Gamma(z)}.$$

Teniendo presente (52.24), la solución del problema obtendremos en la forma

$$F(z) = X(z)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{c(\tau)}{X^+(\tau)[a(\tau) - ib(\tau)]} \operatorname{ctg}\frac{\tau - z}{2}\, d\tau + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{\varkappa} (\alpha_k \cos kz + \beta_k \operatorname{sen} kz)\right]. \qquad (52.25)$$

Cuando $\varkappa < 0$, la última suma en la solución debe prescindirse. Además, han de estar satisfechas las condiciones

$$\int_0^{2\pi} \frac{c(\tau)\cos k\tau}{X^+(\tau)[a(\tau) - ib(\tau)]}\, d\tau = \int_0^{2\pi} \frac{c(\tau)\operatorname{sen} k\tau}{X^+(\tau)[a(\tau) - ib(\tau)]}\, d\tau = 0$$

$$(k = 0, 1, \ldots, -\varkappa - 1).$$

3°. PROBLEMA DE CONTORNO MIXTO DE FUNCIONES ANALÍTICAS EN FUNCIONES PERIÓDICAS PARA UN SEMIPLANO. Examinemos el problema mixto resuelto en el p. 46.3. Hállese la función analítica en el semiplano superior $F(z) = u + iv$, según la condición de contorno

$$\begin{aligned} u &= f(t) \quad \text{en} \quad L' = \sum_{k=1}^{m} a_k b_k, \\ v &= h(t) \quad \text{en} \quad L'' = \sum_{k=1}^{m} b_k a_{k+1} \\ &\qquad (a_{m+1} = a_1) \end{aligned} \qquad (52.26)$$

a la condición de que los intervalos prefijados $a_k b_k$, $b_k a_{k+1}$ ($k = 1, 2, \ldots, m$) se ubican en el segmento $[0, \pi]$ y que la función buscada es periódicamente prolongada con el período π.

Al proceder sumamente igual que en el p. 46.3, llegaremos al problema de contorno de Riemann

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t),$$

donde

$$G(t) = -1, \quad g(t) = 2f(t) \quad \text{en } L',$$
$$G(t) = 1, \quad g(t) = 2h(t) \quad \text{en } L'',$$

para la función $\Phi(z)$ que sea analítica a trozos y periódica de período π, satisfaciendo la condición $\overline{\Phi(z)} = \Phi(z)$.

Para el caso en consideración la función básica es e^{2iz}. Tendremos

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\pi} \ln G(\tau)\operatorname{ctg}(\tau - z)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{m}\int_{a_k}^{b_k} \pi i \operatorname{ctg}(\tau - z)\,d\tau = \frac{1}{2}\ln\prod_{k=1}^{m}\frac{\operatorname{sen}(z-b_k)}{\operatorname{sen}(z-a_k)}.$$

En la clase de funciones, acotadas en b_k e integrables en a_k, la función canónica se escribirá así:

$$X(z) = e^{\Gamma(z)} = \sqrt{\prod_{k=1}^{m}\frac{\operatorname{sen}(z-b_k)}{\operatorname{sen}(z-a_k)}}.$$

La solución del problema en la clase indicada se da por la fórmula

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\prod_{k=1}^{m}\frac{\operatorname{sen}(z-b_k)}{\operatorname{sen}(z-a_k)}}\times$$

$$\times\left[\sum_{k=1}^{m}\int_{a_k}^{b_k}\sqrt{\prod_{k=1}^{m}\frac{\operatorname{sen}(\tau-a_k)}{\operatorname{sen}(\tau-b_k)}}\,f(\tau)\operatorname{ctg}(\tau-z)\,d\tau + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{m}\int_{b_k}^{a_{k+1}}\sqrt{\prod_{k=1}^{m}\frac{\operatorname{sen}(\tau-a_k)}{\operatorname{sen}(\tau-b_k)}}\,h(\tau)\operatorname{ctg}(\tau-z)\,d\tau + a_0\right], \qquad (52.27)$$

donde a_0 es una constante real arbitraria.

De un modo análogo se puede obtener la solución en otras clases.

4°. BÚSQUEDA DE UN FLUJO QUE CONTORNEA EL RETICULO PERIÓDICO. Demos a conocer una aplicación mecánica de la teoría considerada. Supongamos que en el plano z está dado un retículo de perfiles contorneado por le flujo potencial de líquido incompresible. Este retículo está formado por p filas de segmentos para los cuales $y = m\pi$, $a_k < x < b_k$ ($k = 1, 2, \ldots, p$; $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) y q filas de segmentos para los cuales

$$y = \frac{2n+1}{2}\pi, \quad c_j < x < d_j \quad (j = 1, 2, \ldots, q;\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

La determinación de las funciones de velocidades del flujo se reduce[1]) a la búsqueda de la función $\Phi(z) = u - iv$, que satisfaga las siguientes condiciones:

a) $\Phi(z)$ es una función analítica a trozos y periódica de período πi cuya línea de saltos es

$$L = \sum_{k=1}^{p} (a_k, b_k) + \sum_{j=1}^{q} \left(c_j + \frac{\pi i}{2}, \quad d_j + \frac{\pi i}{2}\right);$$

b) $\Phi(+\infty) = 0$, $\Phi(-\infty)$ es finita;

c) en los puntos, a_k, $c_j + \frac{\pi i}{2}$ la función $F(z)$ es finita; en los puntos b_k, $d_j + \frac{\pi i}{2}$ ella es integrable;

d) en L la parte imaginaria de $\Phi(z)$ debe adquirir, al aproximarse hacia L desde arriba y de abajo, unos valores prefijados

$$v^+ = f^+(t), \quad v^- = f^-(t) \quad \text{en } L, \tag{52.28}$$

con la particularidad de que en el extremo los valores de $f^+(t)$ y $f^-(t)$ coinciden.

El problema enunciado es, de hecho, un problema de Dirichlet, considerado en el p. 46.4, para un plano con aberturas y condición complementaria de periodicidad, diferenciándose inconsiderablemente en lo que en lugar de la parte real u se prefija la parte imaginaria v.

Al introducir, por analogía con el p. 46.4, las funciones

$$\Psi(z) = \frac{1}{2}[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \quad \Omega(z) = \frac{1}{2}[\Phi(z) - \overline{\Phi(z)}],$$

llegaremos para Ψ al problema mixto considerado anteriormente, y para Ω, al problema de búsqueda de una función analítica (periódica) según la parte imaginaria $\operatorname{Im} \Omega(t) = f^+(t) - f^-(t)$, prefijada en L.

[1]) Véase, por ejemplo, la obra de L. I. Sedov «Problemas planos de hidrodinámica y aerodinámica» (Л. И. Седов, «Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики», Гостехиздат, М., 1950).

La función básica será e^{2z}. La función Ω se determina mediante la fórmula

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{2ie^{2\tau}[f^-(\tau) - f^+(\tau)]\,d\tau}{e^{2\tau} - e^{2z}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_L [f^-(\tau) - f^+(\tau)][\operatorname{cth}(\tau - z) + 1]\,d\tau. \quad (52.29)$$

Para la función $\Psi(z)$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \ln(-1) \operatorname{cth}(\tau - z)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left[\prod_{k=1}^{p} \frac{\operatorname{sh}(z - b_k)}{\operatorname{sh}(z - a_k)} \prod_{j=1}^{q} \frac{\operatorname{ch}(z - d_j)}{\operatorname{ch}(z - c_j)}\right].$$

De aquí, la función canónica en la clase requerida de funciones tendrá por expresión

$$X(z) = \sqrt{\prod_{k=1}^{p} \frac{\operatorname{sh}(z - a_k)}{\operatorname{sh}(z - b_k)} \prod_{j=1}^{q} \frac{\operatorname{ch}(z - c_j)}{\operatorname{ch}(z - d_j)}}.$$

La solución del problema mixto se determinará por la fórmula

$$\Psi(z) = \frac{-X(z)}{2\pi} \int_L \frac{f^+(\tau) + f^-(\tau)}{X^+(\tau)} [\operatorname{cth}(\tau - z) + 1]\,d\tau. \quad (52.30)$$

La solución del problema planteado se da por suma de funciones obtenidas

$$\Phi(z) = \Psi(z) + \Omega(z). \quad (52.31)$$

Consideraremos un ejemplo más en el que se emplean funciones elípticas.

5°. PROBLEMA DE RIEMANN PARA UNA FUNCIÓN ELÍPTICA PAR. Para una función biperiódica de períodos ω_1, ω_2 uno de los dominios fundamentales lo constituye un paralelogramo cuyos vértices son 0, ω_1, $\omega_1 + \omega_2$, ω_2. La función automorfa básica será la de Weierstrass $\wp(z)$. En los vértices del paralelogramo de períodos ella tiene polos de segundo orden. Uno de los vértices equivalentes entre sí, por ejemplo, $z = 0$, lo tomaremos por z_0. Convengamos en que L es un contorno simple suave y cerrado, dispuesto en lo interior del paralelogramo de períodos. La resolución del problema de Riemann se efectúa en suma concordancia con el esquema del p. 52.1.

La solución del problema de salto se determinará mediante la fórmula

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L g(\tau)\,\frac{\wp'(\tau)\,d\tau}{\wp(\tau)-\wp(z)}.$$

La función canónica se da mediante la expresión

$$X(z)=[\wp(z)-\wp(t_0)]^{-\varkappa}e^{\Gamma(z)},$$

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \ln G(\tau)\,\frac{\wp'(\tau)\,d\tau}{\wp(\tau)-\wp(z)},$$

y la solución general para $\varkappa \geqslant 0$ se escribirá en la forma

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\left\{\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\,\frac{\wp'(\tau)\,d\tau}{\wp(\tau)-\wp(z)}+P_\varkappa[\wp(z)]\right\}. \qquad (52.32)$$

Cuando $\varkappa < 0$, hay que poner $P_\varkappa \equiv 0$; para $\varkappa < -1$ deben cumplirse las siguientes condiciones de resolubilidad:

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\,\wp^{k-1}(\tau)\,\wp'(\tau)\,d\tau=0 \quad (k=1, 2, \ldots, -\varkappa-1).$$

En caso de una función biperiódica tiene unas peculiaridades en comparación con los casos de funciones automorfas, considerados anteriormente; precisamente aquí está ausente la función automorfa básica, que en el dominio fundamental posee un polo simple. Por esta razón una función biperiódica arbitraria se expresa racionalmente en términos no de una sino de dos funciones biperiódicas ($\wp$ y $\wp'$). Debido a esta circunstancia las soluciones del problema de Riemann para los casos de función par o impar y función biperiódica arbitraria difieren una de la otra de una manera considerable.

Nos limitemos aquí al caso considerado de una función par. La resolución para los dos demás casos, como también la resolución de una serie de otros problemas, donde se epmlean funciones periódicas y biperiódicas, el lector puede encontrar en la obra de Chíbrikova 2)* (véanse los problemas **10**, **11** al final del capítulo). En el párrafo que viene, donde plantearemos en una forma general el problema de contorno en superficies de Riemann, equivalente al problema de contorno en la clase de funciones automorfas, nos hará claro la razón por la cual surgen dificultades en la resolución de problemas de contorno en la clase de funciones elípticas: antes tratábamos de las funciones automorfas de orden nulo y aquí nos hemos encontrado por primera vez con las funciones de primer orden.

52.4. Ecuación integral con función automorfa no básica. Consideraremos una ecuación integral

$$a(t)\,\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_{L_0}\frac{H'(\tau)}{H(\tau)-H(t)}\,\varphi(\tau)\,d\tau=f(t), \qquad (52.33)$$

donde, a diferencia de la ecuación (52.10), la función automorfa $H(z)$, que figura en el núcleo, toma en el dominio fundamental R cada uno de sus valores no una, sino ν veces.

Introduzcamos una función automorfa a trozos.

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{H'(\tau)}{H(\tau) - H(z)} \varphi(\tau)\, d\tau. \tag{52.34}$$

Esta se reducirá a cero en ν puntos $z_1, \ldots, z_\nu$ (cero múltiplo se repite tantas veces cuál es su multiplicidad), donde $H(z)$ tiene polos. El denominador del núcleo $H(\tau) - H(z)$ para todo punto $\tau \in L_0$ se reducirá a cero ν veces.

Por esto $\Phi(z)$ tendrá en el dominio fundamental ν líneas de discontinuidad, a saber, L_0 y $\nu - 1$ curvas $L_0^{(1)}, \ldots, L_0^{(\nu-1)}$, cuyas ecuaciones se determinan en la forma implícita por la solución de la ecuación

$$H(z) = H(\tau) \quad (\tau \in L_0). \tag{52.35}$$

Si $\Psi(z)$ implica una función inversa a $H(z)$, entonces las ecuaciones de los contornos $L_k^{(j)}$ ($j = 0, 1, \ldots, \nu - 1$; $k = 0, 1, 2, \ldots$) vienen definidas por las ramas $\Psi_k^{(j)}$ de una función multiforme Ψ:

$$z = \Psi_k^{(j)}\,[H(\tau)] \quad (\tau \in L_0; \quad j = 0, 1, \ldots, \nu - 1; \quad k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{52.36}$$

Supongamos al principio que los puntos de ramificación de las funciones $\Psi_k^{(j)}(z)$ no están dispuestos dentro del contorno L_0. En este caso todos los contornos $L_0^{(j)}$ también serán cerrados.

De la propia definición de $\Psi_k^{(j)}$ ($H\,[\Psi_k^{(j)}(t)] \equiv t$) fluye

$$H(z) = H\{\Psi_k^{(j)}\,[H(z)]\} = H(z).$$

Por consiguiente, la función $H(z)$ será automorfa no sólo respecto al grupo dado $\omega_k(z)$ de transformaciones lineales, sino también respecto al grupo[1]) de transformaciones (no lineales) $\Psi_k^{(j)}\,[H(z)]$.

En el contorno L_0, para los valores límites de $\Phi(z)$ serán válidas las fórmulas análogas a (52.4)

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t),$$

[1]) El hecho de que las transformaciones ψ_j componen un grupo entero sigue de lo que ellas abarcan todas las líneas singulares $L_0^{(j)}$ dispuestas en el dominio fundamental.

$$\Phi^+(t)+\Phi^-(t)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{H'(\tau)}{H(\tau)-H(t)}\varphi(\tau)\,d\tau. \qquad (52.37)$$

Al emplearlas, llegaremos en L_0 de modo habitual al problema de contorno de Riemann

$$\Phi^+(t)=G(t)\,\Phi^-(t)+g(t), \qquad (52.38)$$

$$G=\frac{a-b}{a+b}, \quad g=\frac{f}{a+b}. \qquad (52.39)$$

No se necesita componer aquí las condiciones de contorno para las restantes líneas de discontinuidad $L_0^{(j)}$ dispuestas en R (al igual que para las líneas equivalentes dispuestas en otros dominios fundamentales), puesto que la solución del problema de contorno (52.38) satisfará automáticamente a las condiciones de contorno en todas las líneas de discontinuidad, tomado en consideración el automorfismo de la solución con relación a todas las transformaciones del grupo.

La diferencia esencial del probblema en resolución de los problemas correspondientes resueltos antes consiste en lo que la función buscada $\Phi(z)$ debe ser, en virtud de la representación (52.34), una función de $H(z)$.

Al expresar la solución del problema de salto (solución particular del problema no homogéneo) por la integral de tipo (52.3), satisfacemos a esta condición automáticamente. Si, además, la solución general del problema homogéneo en el caso de índice positivo, la tomamos en forma de un polinomio de la función $H(z)$, entonces serán satisfechas todas las condiciones. Tomando en consideración estas circunstancias y procediendo por analogía con lo que se hacía anteriormente, obtendremos la solución del problema de contorno, y a continuación, mediante la fórmula (52.37), la solución de la ecuación de partida (52.33). Escribamos la última, considerando, como siempre, $a^2-b^2=1$:

$$\varphi(t)=a(t)f(t)-b(t)\,Z(t)\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{f(\tau)}{Z(\tau)}\times$$

$$\times\frac{H'(\tau)}{H(\tau)-H(z)}\,d\tau+b(t)\,Z(t)\,P_{\varkappa-1}(H), \qquad (52.40)$$

donde

$$Z(t)=X^+(t)\,[a(t)+b(t)]=X^-(t)\,[a(t)-b(t)],$$

$$X(z)=[H(z)-H(t_0)]^{-\varkappa}e^{\Gamma(z)}, \qquad (52.41)$$

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\ln G(\tau)\,\frac{H'(\tau)}{H(\tau)-H(z)}\,d\tau,$$

t_0 es el punto inicial de integración del contorno L_0.

Si el contorno L_0 parte los puntos de ramificación de las funciones $\Psi_k^{(j)}$ de un modo tal que una parte de ellos está contenida dentro

del contorno y la otra parte, fuera de éste, entonces las curvas $L_0^{(j)}$ serán abiertas. No obstante, esto no introduce en la resolución complicaciones algunas. La peculiaridad de solución de los problemas de contorno y de ecuaciones integrales para un contorno abierto (como lo sabemos del capítulo VI) consiste en que aquí resultan posibles soluciones de diferentes clases, a saber, acotadas y no acotadas en el contorno, pero, en el caso dado, los contornos abiertos $L_0^{(j)}$ son equivalentes al contorno cerrado L_0, en el cual la solución es continua, y, por lo tanto, acotada. De aquí, en virtud de equivalencia, en los contornos $L_0^{(j)}$ es posible solamente una clase de soluciones acotadas. Tambien en este caso la solución se expresa mediante las fórmulas (52.40), (52.41). En cuanto al caso en que el contorno L_0 sea una línea abierta (o, siquiera, un conjunto de líneas abiertas), podemos decir lo mismo que en la observación 1° del p. 51.7.

52.5. **Ejemplo.** Examinemos una ecuación integral

$$\frac{1}{2}[(2t-1)^{\varkappa}+(t^2-4t+2)^{\varkappa}]\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}[(2t-1)^{\varkappa}-(t^2-4t+2)^{\varkappa}]\times$$
$$\times\int_{L_0}\frac{2F(\tau)F'(\tau)}{F^2(\tau)-F^2(t)}\varphi(\tau)\,d\tau=f(t),$$

donde L_0 es una circunferencia $|2z-1|=1$; $F(z)=\dfrac{2z^2}{2z-1}$ es función automorfa básica del grupo $\omega_0(z)=z$, $\omega_1(z)=\dfrac{z}{2z-1}$.

Los dominios fundamentales del grupo son el exterior y el interior de la circunferencia $|2z-1|=1$. El exterior, donde está dispuesto el contorno L_0, se designará R_0, y el interior, R_1. En el dominio R_0 la función automorfa del núcleo $H(z)=F^2(z)$ tiene polos de segundo orden en un punto infinitamente alejado, y en el dominio R_1, en el punto $z=1/2$.

La función auxiliar automorfa a trozos

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{H'(\tau)}{H(\tau)-H(z)}\varphi(\tau)\,d\tau$$

tiene en R_0 un cero de segundo orden en el punto infinitamente alejado. En cada uno de los dominios fundamentales $\Phi(z)$ tiene dos líneas singulares; sus ecuaciones son las siguientes:

en R_0: $z=\tau$, (L_0)

$$z=\Psi_0^{(1)}(\tau)=\frac{-\tau^2-\tau\sqrt{\tau^2+2\tau-1}}{2\tau-1}\quad(\tau\in L_0),\quad(L_0^{(1)})$$

en R_1: $z=\dfrac{\tau}{2\tau-1}$ $\quad(\tau\in L_0),\quad(L_1)$

$$z=\Psi_1^{(1)}(\tau)=\frac{-\tau^2+\tau\sqrt{\tau^2+2\tau-1}}{2\tau-1}\quad(\tau\in L_0).\quad(L_1^{(1)})$$

Las transformaciones $\Psi_0^{(1)}$, $\Psi_1^{(1)}$ son ramas de la función multiforme $[\Psi(2z-2)+z^2]^2-z^2(z^2+2z-1)=0$, cuyos puntos de ramificación son $z=-1\pm$

$\pm \sqrt{2}$. Estos últimos se ubican fuera de L_0, a causa de lo cual todos los contornos aquí son cerrados.

La condición de contorno en L_0 tiene por expresión

$$\Phi^+(t)=\left(\frac{t^2-4t+2}{2t-1}\right)^{\varkappa}\Phi^-(t)+\frac{f(t)}{(2t-1)^{\varkappa}}, \qquad t\in L_0.$$

En tres contornos restantes las condiciones de contorno pueden obtenerse por cambio de variables.

Puesto que el número de líneas de discontinuidad de $\Phi(z)$ es finito, la función canónica puede hallarse como un producto de funciones canónicas para cada uno de los contornos simples. Para L_0 la función canónica puede ser encontrada por el procedimiento del p. 14.6. Tendremos

$$X^+(z)=\frac{p_-(z)}{q_-(z)}=\left[\frac{z-(2-\sqrt{2})}{2z-1}\right]^{\varkappa},$$

$$X^-(z)=\frac{q_+(z)}{p_+(z)}=\frac{1}{z-(2+\sqrt{2})}.$$

Para los demás contornos las funciones canónicas pueden hallarse por cambio de variables, partiendo de la propiedad de automorfismo. (Con mayor facilidad ellas pueden hallarse por el mismo procedimiento del p. 14.6.) Los contornos L_0, $L_0^{(1)}$, L_1, $L_1^{(1)}$ dividen el plano en cinco dominios: D_0^+, $D_0^{(1)+}$, D_1^+, $D_1^{(1)+}$, $D^- = D_0^- \cdot D_0^{(1)-} \cdot D_1^- \cdot D_1^{(1)-}$. Para todo el conjunto de dominios la función canónica se obtendrá en la forma

$$X(z)=\begin{cases}\left[\dfrac{1-2z}{z^2+4z-2}\right]^{\varkappa}, & z\in D_0^+,\ D_1^+,\\ \left[\dfrac{2z-1}{z^2-4z+2}\right]^{\varkappa}, & z\in D_0^{(1)+},\ D_1^{(1)+}\\ \left[\dfrac{2z-1}{(z^2+4z-2)\,(z^2-4z+2)}\right]^{\varkappa} & z\in D^-.\end{cases}$$

Cuando $\varkappa > 0$, la función canónica tiene ceros de orden $2\varkappa$ en los puntos $z = 1/2, \infty$. En el dominio fundamental R_0 la función $\dfrac{\Phi(z)}{X(z)}$ tiene, para $\varkappa > 0$, un polo de orden $2\varkappa - 2$ en el punto $z = \infty$. Partiendo de esto, obtendremos la solución del problema de contorno

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{f(\tau)}{X^+(\tau)\,(2\tau-1)^2}\,\frac{2F(\tau)\,F'(\tau)}{F^2(\tau)-F^2(t)}\,d\tau+X(z)\,P_{\varkappa-1}[F^2(z)].$$

La solución de la ecuación de partida tendrá la forma

$$\varphi(t)=\left[1+\left(\frac{2t-1}{t^2-4t+2}\right)^{\varkappa}\right]\frac{f(t)}{2\,(2t-1)^{\varkappa}}+$$

$$+\left(\frac{1-2t}{t^2+4t-2}\right)^{\varkappa}\left[1-\left(\frac{2t-1}{t^2-4t-2}\right)^2\right]\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{f(\tau)}{X^+(\tau)\,(2\tau-1)^{\varkappa}}\,\frac{2F(\tau)\,F'(\tau)\,d\tau}{F^2(\tau)-F^2(t)}+$$

$$+\left(\frac{1-2t}{t^2+4t-2}\right)^{\varkappa}\left[1-\left(\frac{2t-1}{t^2-4t+2}\right)^{\varkappa}\right]P_{\varkappa-1}[F^2(t)].$$

Cuando $\varkappa < 0$, se debe poner $P_{\varkappa-1} \equiv 0$. La solución existe, siempre que se cumplen las condiciones

$$\int_{L_0} \frac{f(\tau)}{X^+(\tau)(2\tau-1)} \varkappa [F(\tau)]^{2k-1} F'(\tau)\, d\tau = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, -\varkappa).$$

§ 53. Problemas de contorno en las superficies de Riemann

Los problemas de contorno en la clase de funciones automorfas considerados en el párrafo anterior están estrechamente relacionados con problemas de contorno para dominios dispuestos en las superficies de Riemann. Hablando con mayor exactitud, en el caso de las superficies de Riemann de funciones algebraicas (o sea, de las superficies compactas) ambas clases de problemas de contorno son equivalentes.

Antes de pasar directamente a los problemas de contorno demos a conocer de una manera esquemática las propiedades más importantes para nuestros objetivos de las superficies de Riemann.

53.1. Algunas nociones sobre las superficies de Riemann. Una función algebraica n-forme $w = w(z)$, definida mediante la ecuación irreducible

$$a_0(z)\, w^n + \ldots + a_{n-1}(z)\, w + a_n(z) = 0,$$

cuyos coeficientes son polinomios de z, puede considerarse como uniforme, si convenimos en que z varía en una cierta variedad geométrica, llamada *superficie de Riemann* de esta función. La definición exacta de las superficies de Riemann y su teoría se apoyan en el aparato matemático muy complejo: topología, teoría de funciones algebraicas e integrales abelianas, de funciones automorfas, etc. No suponemos que el lector tenga los conocimientos de estas ramas de las matemáticas y apoyaremos en lo sucesivo solamente en las representaciones evidentes y la analogía con teoría de funciones analíticas uniformes.

La superficie de Riemann se expresa por dos métodos equivalentes:

1) Mediante n hojas de un plano ordinario sujetadas a lo largo de los cortes que unen los puntos de ramificación (superficie de superposición). De esto ya hablamos en el p. 3.3.

2) Mediante una superficie espacial. Son usados dos tipos de tales superficies: a) una esfera con mangos sujetados a ella, b) una superficie en forma de 8 con cierto número de agujeros.

Todos los métodos indicados para definir las superficies de Riemann son topológicamente equivalentes. La forma espacial de la superficie de Riemann es cómoda, porque en ella se expresa con evidencia su invariante más importante, esto es, *el genéro* de la superficie de Riemann h. En el caso a) esto es el número de mangos de la esfera, y en el caso b), el número de agujeros en la superficie en forma

de 8[1]). En el caso más simple de género cero la superficie de Riemann es topológicamente equivalente a una esfera corriente. Su particularidad característica consiste en lo que todo contorno cerrado divide dicha superficie en partes separadas. Las superficies de Riemann de género unidad tendrán por expresión espacial en el caso a) una esfera con el único mango (pesa), y en el caso b), un toro. En este caso podemos hacer un par de secciones cerradas que no dividen la superficie en partes separadas, sino las convierten en los dominios simplemente conexos. Por ejemplo, un toro puede ser convertido en un rectángulo de lados opuestos identificados mediante secciones por círculos meridional y paralelo y una deformación continua.

En el caso general la superficie de género h puede ser convertida, mediante h pares de las así llamadas *secciones canónicas*, en un $4h$-ágono con lados identificados dos a dos[2]).

En la teoría de uniformización se demuestra una tesis aun más profunda, a saber, toda superficie de Riemann compacta de género h, cortada por $2h$ secciones canónicas, puede ser aplicada conformemente con ayuda de funciones automorfas, sobre el $4h$-ágono fundamental de la función automorfa. En particular, la superficie de Riemann de género cero se aplica mediante las funciones racionales sobre un plano complejo ordinario. De aquí proviene la equivalencia de los problemas de contorno en la superficie de Riemann y en la clase de funciones automorfas, la cual fue ya objeto de nuestra consideración al principio del párrafo.

El cálculo del número de soluciones linealmente independientes del problema de Riemann en un plano ordinario (§ 14) se apoyaba en el cálculo del número de funciones racionales linealmente independientes, las cuales tenían en el plano el número prefijado $\varkappa$ de polos, separados o coincidentes. El número de tales funciones es $\varkappa + 1$. (En el § 14 se ha tratado sólo de un caso particular, cuando en el infinito se prefijaba un polo de multiplicidad $\varkappa$). Con este mismo problema nos enfrentamos también al resolver los problemas de contorno en la superficie de Riemann. No obstante, en este último caso la resolución del problema es mucho más compleja. Debido a la exigencia de uniformidad de la función buscada (la reducción a cero de las así llamadas *constantes cíclicas*), las constantes arbitrarias que la integran deben satisfacer cierto sistema de ecuaciones lineales. Por ello, el número de funciones racionales linealmente inde-

[1]) En el caso de una superficie de superposición el género de la superficie de Riemann se expresa en términos del número de hojas y puntos de ramificación. Si n es el número de hojas, y v, el número de puntos de ramificación que se cuentan tantas veces cual es su multiplicidad, entonces el género se expresa por medio de la fórmula $h = \frac{v}{2} + 1 - n$.

[2]) En el caso general se puede determinar *el género* de la superficie de Riemann como número de pares de secciones canónicas, que deben efectuarse para convertir la superficie de Riemann en el dominio simplemente conexo.

pendientes se expresan mediante la fórmula

$$r = \varkappa + 1 - \xi, \tag{53.1}$$

donde ξ es el rango del sistema indicado. Una de las más importantes proposiciones de la teoría de funciones algebraicas (teorema de Riemann-Roch) ofrece la expresión para el rango ξ : $\xi = h - i$, donde i es el número de así llamadas *diferenciales abelianas analíticas en todo punto* (de primera especie) provistas de ceros en aquellos puntos, donde la función racional buscada tiene polos. Se demuestra que este número se ubica dentro de los límites $0 \leqslant i \leqslant h$. De aquí

$$r = \varkappa + 1 - h + i. \tag{53.1'}$$

A pesar de que la última fórmula parece ser bien definida, en realidad los resultados exactos se tienen sólo para $\varkappa = 0$, donde $i = h$, y $\varkappa > 2h - 2$, donde $i = 0$. El algoritmo del cálculo del número i es tan complejo que en la práctica el número i debe considerarse desconocido y, por lo tanto, r es un número indefinido. Por esto precisamente se da el grado de determinación del número de soluciones linealmente independientes del problema de Riemann (véase el punto siguiente).

Todo lo dicho más arriba se refiere a una superficie de Riemann cerrada. Sea dada una superficie de Riemann con aberturas limitadas por curvas simples que no se intersecan recíprocamente; la superficie dada se denomina en este caso *superficie de Riemann con margen*. De ésta puede formarse nueva superficie de Riemann cerrada, el así llamado *duplicado* de la superficie de Riemann dada.

Con este fin se debe a la superficie de Riemann dada sujetar, por los contornos de aberturas, otro ejemplar de superficie de Riemann, idéntico al primero. A base de los razonamientos demostrativos se puede calcular el género del duplicado de la superficie de Riemann de género h con m aberturas. Dos ejemplares de la superficie de Riemann tendrán $2h$ mangos. De m medios de sujeción uno se utiliza para formar una única superficie de dos ejemplares separados de la superficie de Riemann. Los demás m-1 medios de sujeción pueden deformarse en mangos. De esta manera, el duplicado tiene el género $2h + m - 1$.

Las superficies de Riemann examinadas se caracterizan por el hecho de que en cada una de las curvas cerradas en estas superficies puede prefijarse un sentido positivo, único para dicha curva (por ejemplo, contra las agujas del reloj). Tales superficies se denominan *orientables* o *bilaterales*. Además de éstas existen también superficies no orientables o unilaterales. La así llamada *cinta de Möbius* puede representarse de una manera más ilustrativa y por eso resulta más popular entre las superficies no orientables. Por modelo de una superficie general no orientable puede tomarse una esfera con h

mangos y $c + m$ aberturas, de las cuales c están pegadas con cintas de Möbius.

La teoría completa de superficies de Riemann se expone en el libro [25]. Su primer capítulo contiene una exposición sumamente popular e ilustrativa de la idea de las superficies de Riemann. Una exposición aun más ilustrativa y popular (profunda, al mismo tiempo) se ofrece en el capítulo VI del libro de D. Hilbert und S. Cohn-Vossen, «Anschauliche Geometrie», Berlin, Verlag von J. Springer, 1932.

53.2. Problema de contorno de Riemann. Este problema en las superficies de Riemann se plantea absolutamente igual que en un plano ordinario. En el caso general el contorno puede constar de un número finito de curvas cerradas o abiertas, que son separadas o se intersecan. El caso en que entre las curvas del contorno se tienen cerradas que no dividen la superficie en dominios separados no hace la exclusión. El asunto es del todo igual que en el p. 44.1: se construye una función, analítica en todos los puntos, salvo los puntos del contorno, para la cual $\Phi^{\pm}(t)$ son valores límites en el contorno a la izquierda y a la derecha (a veces, en los puntos aislados del dominio pueden admitirse los polos). El procedimiento de la resolución es también análogo al expuesto antes para un dominio plano. Supongamos, como antes, que $\varkappa = \operatorname{Ind} G(t)$.

1. Se resuelve el problema de salto con ayuda de un análogo del núcleo de Cauchy especialmente construido. (El método de construcción del último está basado en las teorías complejas y no puede exponerse de modo popular.)

2. Se construye la función canónica. Con ayuda de esta última el problema de contorno general se reduce a un problema de salto en la clase de funciones con $\varkappa$ polos admisibles para $\varkappa > 0$ y con $-\varkappa$ ceros requeridos para $\varkappa < 0$.

3. Con ayuda del teorema de Rieman-Roch se calcula el número de soluciones linealmente independientes para $\varkappa > 0$ o condiciones de resolubilidad, cuando $\varkappa < 0$. Se escribe la solución explícita del problema en términos de los análogos de la integral de tipo de Cauchy.

La dificultad principal que ha de ser superada consiste en que, para una superficie de género $h > 0$ no se puede construir el análogo del núcleo de Cauchy que tenga una única singularidad polar. Junto al polo «útil» con parte principal $1/(z - \tau)$, el tiene, además, h polos simples «parásitos» los cuales a continuación deben eliminarse. Los polos «parásitos» del análogo del núcleo de Cauchy para la función canónica son puntos esencialmente singulares. Su presencia ha sido un obstáculo principal para resolver el problema de contorno. Fue suprimido por el empleo de la solución del así llamado «*problema de inversión de Jacobi*» (véase [25], cap. VII).

Enunciaremos los resultados acerca del número l de soluciones linealmente independientes del problema homogéneo.

Si $\varkappa < 0$, entonces $l = 0$; cuando $\varkappa > 2h - 2$, se tiene $l = \varkappa + 1 - h$.

Los casos de índice $0 \leqslant \varkappa \leqslant 2h - 2$ se denominan *singulares*. Aquí,

$$l = \varkappa + 1 - \xi, \tag{53.2}$$

donde ξ es el rango de cierta matriz el cual, de acuerdo con el teorema de Riemann—Roch, se expresa mediante la fórmula $\xi = h - i$. Puede escribirse también la acotación exacta para l:

$$\max\{0, \varkappa - h + 1\} \leqslant l \leqslant \left[\frac{\varkappa}{2}\right] + 1. \tag{53.3}$$

Los resultados para el problema no homogéneo se enuncian de una manera mucho más compleja. Las condiciones de resolubilidad se expresan, en este caso, en términos de la solución del problema de contorno conjugado el cual se anuncia como problema para diferenciales analíticas. (Las formulaciones exactas aquí se omiten.)

Para concluir, hemos de notar que la expresión «*la solución se escribe en una forma explícita*», empleada más arriba, se la debe entender de modo convencional. El algoritmo para construir un análogo del núcleo de Cauchy es tan complejo que resulta más conveniente hablar sobre los teoremas de existencia que de la solución efectiva. Existen solamente unos casos particulares en que se logra construir una expresión explícita del análogo del núcleo de Cauchy. Este caso, ante todo, es $h = 1$, cuando dicho análogo se expresa en términos de funciones elípticas (véase el apartado 5° del p. 52.3). Se ha investigado también el llamado caso *hiperelíptico*. Mas, en el último caso las dificultades aumentan de manera muy rápida al crecer h.

Con ayuda del problema de contorno se puede resolver una clase determinada de las ecuaciones integrales singulares que pueden denominarse *características cuyo núcleo*, en la superficie de Riemann dada, *es el análogo del núcleo de Cauchy*. Pero, a diferencia de las ecuaciones ampliamente usadas en las aplicaciones, la clase mencionada tiene hoy día sólo interés teórico.

No nos detenemos aquí en esta clase de ecuaciones.

53.3. Problema de contorno de Hilbert. El problema de contorno de Hilbert se plantea en la superficie de Riemann con margen. Supongamos que la dada superficie de Riemann con margen tiene $m + 1$ aberturas cuya frontera está representada por las simples curvas cerradas suaves $L_0, L_1, \ldots, L_m$. Se busca una función $\Phi(z) = u + iv$, analítica en la superficie de Riemann, que satisfaga en el contorno $L = L_0 + L_1 + \ldots + L_m$ la condición de contorno

$$au + bv = c. \tag{53.4}$$

Se construye el duplicado de la superficie de Riemann y en éste el problema se resuelve mediante definición adicional por simetría en

el segundo ejemplar de la superficie. En el duplicado surge un problema de contorno de Riemann. En vista de identidad total de ambos ejemplares de la superficie, el método es aplicable aquí no sólo para los contornos elementales, como en el p. 30.2 (una recta o una circunferencia), sino en el caso más general de un contorno, compuesto por cualquier número finito de curvas suaves arbitrarias.

El cálculo del número de soluciones linealmente independientes o condiciones de resolubilidad se efectúa a base de la solución del problema de Riemann, tomando en consideración la necesidad de simetría. En particular, para $h = 0$ (el género del duplicado es $m - 1$), puede obtenerse la investigación de las cuestiones de resolubilidad del problema de contorno de Hilbert para un dominio plano múltiplemente conexo. Durante la investigación detallada y multilateral pueden obtenerse, en términos algo diferentes, todos los resultados que en el § 36 han sido encontrados por el método de un factor de regularización y ecuaciones integrales. L. I. Chíbrikova supo relacionar la cuestión acerca del número de soluciones en los casos excepcionales de índice $0 \leqslant \varkappa \leqslant m - 1$ con *el problema de «blancos»* que es clásica en la teoría de funciones algebraicas, es decir, de respuestas negativas en el problema sobre la construcción de una función algebraica (racional en la superficie de Riemann) con polos y ceros prefijados.

53.4. Diversos problemas generalizados. Para los dominios en la superficie de Riemann se han estudiado casi todos los problemas de contorno, considerados en el presente libro. Hemos hablado ya de dos problemas fundamentales. El primer planteamiento de estos problemas en la superficie de Riemann de cualquier género finito fue realizado por Yu. L. Rodin 1), 2)* y Koppelman W. 1), 2)**. Ellos obtuvieron también los resultados principales sobre la teoría de resolubilidad. L. I. Chíbrikova, empleando la teoría de uniformización, examinó en una serie de obras los mismos problemas en la clase de funciones automorfas en su dominio fundamental, o sea, en el modelo plano de una superficie de Riemann cortada por secciones canónicas. Acerca de las obras de L. I. Chíbrikova, referentes a la resolución de problemas de contorno en la clase de funciones automorfas, equivalentes a los problemas de contorno en la superficie de Riemann de género nulo y primero, ya hablábamos detalladamente en el parrafo anterior. Sus obras principales en la teoría general son: 6), donde está introducido el «problema de inversión de Jacobi», y 7), que ha ligado la solución del problema de contorno de Hilbert con un problema clásico de la teoría de funciones algebraicas sobre los blancos. E. I. Zverόvich en el artículo [9] y otros dio el planteamiento más general de problemas de contorno en las superficies de Riemann abstractas, indicó la acotación (53.3) y ofreció en 4) un algoritmo, prácticamente realizable, de solución en el caso de superficies de Riemann hiperelípticas. En [9] está dada la amplia bibliografía. R. N. Abdulláev 1)—3)* señaló el número de soluciones en términos de θ-función de Riemann para los casos excepcionales de índice $0 \leqslant \varkappa \leqslant 2h - 2$.

Los problemas de contorno con traslación fueron considerados por V. I. Pokaséev 1)*; los problemas con conjugación, por L. I. Chíbrikova y L. G. Salejov 1)*. El problema de Hilbert para una función analítica a trozos fue investigado (véase el § 45) por L. I. Chíbrikova 10)*. A. I. Serbin 1), 2)* estudió un problema más general aún, cuando en la condición de contorno de los problemas de Riemann y de Hilbert figuran derivadas. Los problemas de contorno pa-

ra funciones analíticas generalizadas los resolvieron Yu. L. Rodin 3), 4)*, A. I. Serbin 3)*, V. I. Pokaséev 2), 3)* y otros. L. I. Chíbrikova 9)* y L. I. Chíbrikova y G. V. Markov 1)* han estudiado el planteamiento de los problemas de contorno en las superficies de Riemann no orientables.

Hay también muchas otras obras que merecen la atención, pero por falta de lugar nos limitamos a lo comunicado. A continuación expondremos de un modo esquemático algunas aplicaciones de la teoría de problemas de contorno en las superficies de Riemann a la teoría de problemas de contorno para dominios planos.

53.5. Principio de pegamiento local conforme [1]). Al final del § 18 se ha indicado que en el caso de un dominio múltiplemente conexo el problema de contorno de Carleman

$$\Phi[\alpha(t)] = G(t)\,\Phi(t) + g(t),\quad \alpha[\alpha(t)] \equiv t, \tag{53.5}$$

puede resolverse por el método de pegamiento conforme, siempre que la función de traslación $\alpha(t)$ pasa cada curva del contorno en sí misma. Examinemos, ahora, el caso general. Supongamos que el contorno consta de $m+1$ curvas, de las cuales $2h$ curvas se aplican, mediante la función $\alpha(t)$, una en otra dos a dos, y las demás $m+1-2h$ curvas pasan en sí mismas. Transformemos las condiciones de contorno en el último grupo de curvas, por analogía con lo hecho en el p. 18.3, en las condiciones de contorno, prefijadas en un contorno abierto. Identifiquemos (peguemos) dos a dos las primeras $2h$ curvas, poniendo en correspondencia los puntos t y $\alpha(t)$. Entonces, el plano se convertirá en una superficie de Riemann de género h (con h mangos). La condición de contorno de (53.5) pasará en la condición de contorno del problema de Riemann. Por consiguiente, el problema de contorno de Carleman (53.5) se convierte en el problema de contorno de Riemann en la superficie de Riemann de género h, definida en h curvas cerradas y $m+1-2h$ curvas abiertas. De aquí puede obtenerse el número de soluciones linealmente independientes o condiciones de resolubilidad del problema.

He aquí un ejemplo para ilustrar. Supongamos que en el contorno de un anillo circular $1 < |z| < R$ está dada la condición de contorno del problema de Carleman

$$\Phi[\alpha(t)] = G(t)\,\Phi(t) + g(t),\quad |t| = R, \tag{53.6}$$

donde la función de traslación $\alpha(t)$ pone en correspondencia los puntos de circunferencia de frontera, dispuestos en un mismo radio, y $G(t)$ y $g(t)$ satisfacen las condiciones (18.21). La condición de contorno se da en una de las circunferencias; en la otra se definirá automáticamente, en virtud de que $\alpha[\alpha(t)] \equiv t$. Peguemos las circunferencias de fronfera, identificando los puntos t y $\alpha(t)$. Enton-

[1]) Nos limitamos a los razonamientos generales, sin ofrecer las demostraciones, las cuales son bastante comlejas. Estas últimas están dadas en las obras de E. I. Zverovich 2)*, [9] y en la obra 1) de E. I. Zverovich y V. A. Chernetski, sobre las cuales se basa el contenido de este punto.

ces, en la superficie de Riemann que surge y que es equivalente a un toro, la condición de contorno de (53.6) se transformará en la condición de contorno del problema de contorno de Riemann

$$\Phi^+(t_1) = G(t_1)\,\Phi^-(t_1) + g(t_1). \tag{53.7}$$

De aquí podemos obtener la investigación completa de las cuestiones de resolubilidad del problema de Carleman planteado.

Ha de observarse en conclusión que a la par con los problemas con traslación, el método de pegamiento local conforme puede emplearse también para solucionar problemas de contorno con conjugación.

53.6. Simetría respecto de la curva algebraica. Sea L una curva algebraica definida por la ecuación $f(x, y) = 0$, donde f es un polinomio irreducible. A todo punto $z = x + iy$ de un plano complejo la ecuación

$$f^*\left(\frac{z^*+\bar{z}}{2},\quad \frac{z^*-\bar{z}}{2i}\right) = 0$$

(véase el p. 12.1) le pone en correspondencia los puntos z^* simétricos con relación a L. Si el grado de esta ecuación respecto a z^* es n, entonces a todo punto z, no dispuesto en L, corresponderán n puntos simétricos

$$z^* = \Phi_j(\bar{z}) \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{53.8}$$

Entre estos puntos hay sólo uno (designémoslo z') que posee la propiedad de que, cuando $z \to L$, entonces z' también tiende a L. Los puntos z y z' hacen un par de puntos, simétricos con relación a la curva L. Si se construyen, con ayuda de las funciones $\Phi_k(z)$, nuevos puntos simétricos, se obtiene una sucesión (finita o infinita) de pares de los puntos simétricos z_k, z'_k. (Un par de simetría conduce al punto de partida solamente en el caso de una recta o circunferencia.)

L. A. Axentiev 3), 4), 5)*, al continuar las investigaciones de D. A. Grave, señaló que

1. El número finito de pares de simetría tendrá lugar, cuando, y sólo cuando, la ecuación de la curva algebraica tiene la forma

$$|(z - a_1) \ldots (z - a_m)| = r\,|(z - b_1) \ldots (z - b_m)|.$$

2. El producto finito o infinito (en el último caso, a la condición de su convergencia uniforme)

$$F(\zeta, z) = \prod_{k=1}^{m} \frac{\zeta - z_k}{\zeta - z'_k}\,\frac{t_0 - z'_k}{t_0 - z_k} \quad (t_0 \in L) \tag{53.9}$$

tomado según todos los pares de puntos simétricos, proporciona una función que realiza la aplicación conforme del dominio simplemente

conexo, limitado por el contorno L, sobre un círculo unitario. De aquí se obtiene de modo directo (véase el p. 27.2) el operador de Schwarz.

3. Se han obtenido las condiciones simples, suficientes para la convergencia del producto infinito.

El segundo ciclo de las obras relacionadas con el empleo del método de simetría para resolver problemas de contorno está ligado con la traslación del dominio considerado en una superficie de Riemann. La ecuación de partida de la curva algebraica determina, para x, y complejos, la superficie de Riemann R, en la cual los pares de (x, y) reales definen la curva L. Esta superficie de Riemann se denomina *superficie de simetría* de la curva L, y la curva *es la línea de simetría* o *eje de simetría de* R. Las funciones (53.8), que determinan puntos simétricos, se consideran como ramas de una única función algebraica, unívoca en R. En este caso, el problema de contorno dado originalmente en el dominio plano, limitado por la curva algebraica L, se convierte en un problema de contorno en la superficie de Riemann de simetría. La teoría de problemas de contorno en la superficie de Riemann permite efectuar la investigación de las cuestiones de resolubilidad.

L. I. Chíbrikova 11)* resolvió, de este modo, el problema de contorno de Hilbert y ofreció la investigación de ciertos problemas de la teoría de elasticidad. L. I. Chíbrikova y L. G. Salejov 1), 2)* han propuesto la resolución del problema de contorno con conjugación. No nos detendremos en los detalles.

§ 54. Ecuaciones integrales con núcleo potencial

La singularidad de todas las ecuaciones integrales consideradas hasta ahora consiste en la presencia de un término que se reduce al infinito de primer orden, si los argumentos coinciden. En lo que sigue se investigan las ecuaciones con núcleo que, siendo coincidentes los argumentos, se reduce al infinito de orden potencial inferior a la unidad. Según el carácter del infinito, se trata de un núcleo de tipo fredholmiano. Sin embargo, las ecuaciones serán de primer género y resulta que esto las hace singulares. El método empleado de resolución—la reducción a una ecuación singular con núcleo de Cauchy—las hace parecidas a las ecuaciones que hemos estudiado antes.

Al principio serán consideradas ecuaciones integrales con núcleo potencial que desempeñan el mismo papel que la ecuación característica y ecuación transpuesta correspondiente en la teoría de ecuación con núcleo de Cauchy. A continuación será investigado el caso general de una ecuación completa con núcleo potencial.

54.1. Ecuación integral de Abel. Del curso del análisis matemático se conoce que la ecuación clásica de Abel

$$\int_{\alpha}^{x} \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{\mu}}\,dt = g(x), \quad 0<\mu<1, \tag{54.1}$$

tiene la única solución determinada mediante la fórmula

$$\varphi(x) = \frac{\operatorname{sen}\mu\pi}{\pi}\frac{d}{dx}\int_{\alpha}^{x}\frac{g(t)\,dt}{(x-t)^{1-\mu}}. \tag{54.2}$$

Para las funciones derivables $g(x)$ la solución se escribirá en forma de la igualdad

$$\varphi(x) = \frac{\operatorname{sen}\mu\pi}{\pi}\left[\frac{g(\alpha)}{(x-\alpha)^{1-\mu}} + \int_{\alpha}^{x}\frac{g'(t)\,dt}{(x-t)^{1-\mu}}\right]. \tag{54.3}$$

La fórmula (54.2) puede, además, representarse en la forma

$$\varphi(x) = \frac{\operatorname{sen}\mu\pi}{\pi}\left[\frac{g(x)}{(x-\alpha)^{1-\mu}} + (1-\mu)\int_{\alpha}^{x}\frac{g(x)-g(t)}{(x-t)^{2-\mu}}\,dt\right]. \tag{54.4}$$

En efecto,

$$\frac{d}{dx}\int_{\alpha}^{x-\varepsilon}\frac{g(t)\,dt}{(x-t)^{1-\mu}} = \frac{g(x-\varepsilon)}{\varepsilon^{1-\mu}} - (1-\mu)\int_{\alpha}^{x-\varepsilon}\frac{g(t)\,dt}{(x-t)^{2-\mu}} =$$

$$= \frac{g(x-\varepsilon)-g(x)}{\varepsilon^{1-\mu}} + \frac{g(x)}{(x-\alpha)^{1-\mu}} + (1-\mu)\int_{\alpha}^{x-\varepsilon}\frac{g(x)-g(t)}{(x-t)^{2-\mu}}\,dt. \tag{54.5}$$

Haciendo tender ε a cero, vemos que si $g(x)$ es una función de Hölder con exponente $\lambda > 1-\mu$, entonces el primer sumando desaparece.

La fórmula (54.4) lleva ventaja ante la (54.3) en el sentido de exigir que $g(x)$ sólo sea una función de Hölder con exponente $\lambda > 1-\mu$.

A veces haremos uso de las designaciones de las siguientes integrales:

$$I_{\alpha}^{\mu}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_{\alpha}^{x}\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\mu}}, \qquad I_{\beta}^{\mu}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_{x}^{\beta}\frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{1-\mu}}, \tag{54.6}$$

relacionadas con la ecuación de Abel y conocidas en la teoría de transformaciones integrales como *integrales de orden fraccional.*

54.2. Relación entre una integral singular con núcleo de Cauchy y las integrales con núcleo potencial [1]. Según lo mostrado en el p. 22.1, la composición de un operador singular con un operador dotado de núcleo regular también tiene núcleo regular. En la aplicación a un núcleo regular de tipo potencial esta circunstancia puede ser precisada. Demostremos que la composición de un operador singular y cierto operador con núcleo potencial es un operador con núcleo potencial. A saber, obtendremos las siguientes dos fórmulas:

$$\frac{1}{\pi}\int_\alpha^\beta \left(\frac{\beta-x}{\beta-t}\right)^{1-\mu}\frac{dt}{t-x}\int_\alpha^t \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^\mu} = \\ = \operatorname{ctg}\mu\pi\int_\alpha^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^\mu} + \operatorname{cosec}\mu\pi\int_x^\beta \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^\mu}, \qquad (54.7)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_\alpha^x \frac{dt}{(x-t)^\mu}\int_\alpha^\beta \left(\frac{\tau-\alpha}{t-\alpha}\right)^{1-\mu}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-t} = \\ = \operatorname{ctg}\mu\pi\int_\alpha^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^\mu} + \operatorname{cosec}\mu\pi\int_x^\beta \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^\mu}. \qquad (54.8)$$

Demostremos sólo (54.7), ya que la demostración de (54.8) es la misma. Al cambiar en el miembro izquierdo el orden de integración de acuerdo con la fórmula de Dirichlet, reduzcamos a la forma $\int_\alpha^\beta K(x,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau$, donde

$$K(x,\tau) = \frac{(\beta-x)^{1-\mu}}{\pi}\int_\tau^\beta \frac{dt}{(\beta-t)^{1-\mu}(t-\tau)^\mu(t-x)}, \qquad (54.9)$$

Si $x > \tau$, esta integral será singular. La hemos calculado más arriba (véase la fórmula (47.28)):

$$K(x,\tau) = \operatorname{ctg}\mu\pi\,(x-\tau)^{-\mu}.$$

Cuando $x < \tau$, entonces, al hacer $t = x + \frac{(\tau-x)(\beta-x)}{\beta-x-(\beta-\tau)t_1}$, obtendremos

$$K(x,\tau) = \frac{(\tau-x)^{-\mu}}{\pi}\int_0^1 \frac{dt_1}{t_1^\mu(1-t_1)^{1-\mu}} = \frac{(\tau-x)^{-\mu}}{\operatorname{sen}\mu\pi}. \qquad (54.10)$$

---

[1]) La exposición de los pp. 54.2—54.7 se da de acuerdo con las obras de S. G. Samko 3), 6), 7), 9*.

Así pues,

$$K(x, \tau) = \begin{cases} \operatorname{ctg} \mu\pi\, (x-\tau)^{-\mu}, & \tau < x, \\ \operatorname{cosec} \mu\pi\, (\tau - x)^{-\mu}, & \tau > x, \end{cases}$$

lo que demuestra (54.7).

Las identidades (54.7), (54.8) nos permitirán elaborar un método simple para reducir las ecuaciones con núcleo potencial que siguen abajo a una ecuación singular con núcleo de Cauchy. Observemos, además, que de la identidad (54.8) puede obtenerse la siguiente expresión para la integral singular:

$$\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau - x} = \operatorname{ctg} \mu\pi \varphi(x) + \\ + \frac{(x-\alpha)^{1-\mu}}{\pi} \frac{d}{dx} \int_{\alpha}^{x} \frac{dt}{(x-t)^{1-\mu}} \int_{t}^{\beta} \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{(\tau-\alpha)^{1-\mu} (\tau-t)^{\mu}}; \qquad (54.11)$$

con este fin se debe resolver (54.8) como ecuación de Abel respecto de la función

$$\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\tau-\alpha}{t-\alpha} \right)^{1-\mu} \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau - t} - \operatorname{ctg} \mu\pi \varphi(x)$$

(la fórmula (54.11) es aplicable para μ cualquiera, $0 < \mu < 1$).

54.3. Ecuación de Abel generalizada con coeficientes exteriores. Examinemos una ecuación integral

$$a(x) \int_{\alpha}^{x} \frac{\varphi(t)\, dt}{(x-t)^{\mu}} + b(x) \int_{x}^{\beta} \frac{\varphi(t)\, dt}{(t-x)^{\mu}} = f(x), \quad 0 < \mu < 1, \qquad (54.12)$$

Consideremos que las funciones reales $a(x)$, $b(x)$, dadas en el segmento $[\alpha, \beta]$, no se reducen a cero simultáneamente y satisfacen la condición de Hölder con exponente $\lambda > 1 - \mu$. Las soluciones se buscarán en la clase de funciones $\varphi(x)$ de tipo

$$\varphi(x) = \frac{\varphi^*(x)}{(x-\alpha)^{1-\varepsilon} (\beta - x)^{1-\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0, \qquad (54.13)$$

donde $\varphi^*(x)$ es la función de Hölder en $[\alpha, \beta]$. En cuanto al miembro derecho, se supone que tiene la forma siguiente:

$$f(x) = \frac{f^*(x)}{(x-\alpha)^{\mu-\varepsilon} (\beta - x)^{\mu-\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0, \qquad (54.14)$$

donde $f^*(x)$ satisface la condición de Hölder con exponente $\lambda > 1 - \mu$.

Reduzcamos, sirviéndonos de la identidad (54.7), la ecuación de Abel generalizada (54.12) a una ecuación singular con núcleo de Cauchy. Denotemos

$$\Phi(x) = \frac{1}{(\beta - x)^{1-\mu}} \int_{\alpha}^{x} \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{\mu}}. \tag{54.15}$$

De la identidad (54.7) encontramos que

$$\int_{x}^{\beta} \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{\mu}} = (\beta - x)^{1-\mu} \left[\frac{\operatorname{sen} \mu\pi}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\Phi(t)\,dt}{t-x} - \cos \mu\pi \Phi(x) \right].$$

Al sustituir en la ecuación (54.12), reduzcámosla a la forma

$$a_1(x)\,\Phi(x) + \frac{b_1(x)}{\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\Phi(t)}{t-x}\,dt = f_1(x), \tag{54.16}$$

donde está designado

$$a_1(x) = a(x) - b(x) \cos \mu\pi, \quad b_1(x) = i \operatorname{sen} \mu\pi b(x), \tag{54.17}$$

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{(\beta - x)^{1-\mu}}.$$

Hemos llegado pues a una ecuación singular en el contorno abierto, estudiada en el § 47. El coeficiente del problema de Riemann, correspondiente a la ecuación, es

$$G(x) = \frac{a_1(x) - b_1(x)}{a_1(x) + b_1(x)} = \frac{a(x) - b(x)\,e^{\mu\pi i}}{a(x) - b(x)\,e^{-\mu\pi i}}. \tag{54.18}$$

Las ecuaciones (54.12) y (54.16) son equivalentes en el siguiente sentido. A toda solución $\varphi(x)$ de la ecuación (54.12) le corresponde, de acuerdo con la fórmula (54.15), la solución $\Phi(x)$ de la ecuación (54.16). Viceversa, de toda solución $\Phi(x)$ de la ecuación (54.16) podemos obtener, según la fórmula (54.4), la solución

$$\varphi(x) = \frac{\operatorname{sen} \mu\pi}{\pi} \left[\left(\frac{\beta - x}{x - \alpha} \right)^{1-\mu} \Phi(x) + \right.$$

$$\left. + (1-\mu) \int_{\alpha}^{x} \frac{\Phi(x)(\beta - x)^{1-\mu} - \Phi(t)(\beta - t)^{1-\mu}}{(x-t)^{2-\mu}}\,dt \right]. \tag{54.19}$$

de la ecuación (54.12). Indiquemos esquemáticamente, sin entrar en los detalles, de qué modo la clase de funciones $\Phi(x)$ está ligada con la de funciones $\varphi(x)$. Si $\varphi(x)$ tiene la forma (54.13), entonces $\Phi(x)$ satisface en el interior del intervalo (α, β) la condición de Hölder con exponente $\lambda > 1 - \mu$, mientras que en los extremos $x = \alpha$, $x = \beta$, tiene singularidades cuyos órdenes son inferiores a μ

y 1, respectivamente. Viceversa, si $\Phi(x)$ satisface en el interior de (α, β) la condición de Hölder con exponente $\lambda > 1 - \mu$, y para $x = \alpha$, $x = \beta$ tiene singularidades cuyos órdenes son inferiores a μ y 1, respectivamente, entonces la función $\varphi(x)$ satisface la condición de Hölder en el interior de (α, β) y tiene en los extremos singularidades de órdenes inferiores a 1. Esto se comprueba por la aplicación directa de las fórmulas (54.15), (54.19), requeriéndose una serie de operaciones matemáticas no complejas lo que está al cargo del mismo lector (véase el problema 18 al final del capítulo).

Así pues, para hallar todas las soluciones $\varphi(x)$ de la ecuación (54.12) de tipo (54.13), se debe resolver la ecuación (54.16) en la clase de funciones no acotadas en ambos extremos $x = \alpha$, $x = \beta$, y, a continuación, elegir de estas soluciones aquellas que tienen, para $x = \alpha$, singularidades de orden inferior a μ. De acuerdo con las fórmulas (47.12), (47.17), (43.3), la solución $\Phi(x)$, que se busca en la clase de funciones no acotadas para $x = \alpha$, tiene en este punto una singularidad de orden

$$\text{máx}\left(\frac{\theta}{2\pi};\ \mu - \varepsilon\right),$$

donde $\mu - \varepsilon$ es el orden de la singularidad del segundo miembro $f_1(x)$, y $\theta = \arg G(\alpha)$ está elegido en el intervalo $[0, 2\pi]$. Por consiguiente, para $\theta < 2\pi\mu$ pueden tomarse todas las soluciones no acotadas de la ecuación (54.16). En el caso de que sea $\theta \geqslant 2\pi\mu$, entonces conviene buscar las soluciones de la ecuación (54.16), acotadas para $x = \alpha$.

54.4. Ecuación de Abel generalizada con coeficientes interiores. Examinemos la ecuación

$$\int_\alpha^x \frac{a(t)\,\varphi(t)}{(x-t)^\mu}\,dt + \int_x^\beta \frac{b(t)\,\varphi(t)}{(t-x)^\mu}\,dt = g(x), \qquad (54.20)$$

suponiendo que $\varphi(t)$ y $g(t)$ tienen, al igual que antes, la forma (54.13), (54.14), respectivamente. Como antes, $a(t)$ y $b(t)$ no se reducen a cero en $[\alpha, \beta]$ al mismo tiempo. Aquí podemos debilitar un poco las suposiciones respecto de $a(t)$ y $b(t)$, considerándo los arbitrarios hölderianos (no hace falta que tengan el exponente $\lambda > 1 - \mu$).

Eliminando, con ayuda de la identidad (54.8), la segunda integral en (54.20), obtendremos

$$\int_\alpha^x \frac{dt}{(x-t)^\mu}\left[a(t)\,\varphi(t) - \cos\mu\pi\, b(t)\,\varphi(t) + \right.$$

$$\left. + \frac{\operatorname{sen}\mu\pi}{\pi}\int_\alpha^\beta \left(\frac{\tau-\alpha}{t-\alpha}\right)^{1-\mu}\frac{b(\tau)\,\varphi(\tau)}{\tau-t}\,a\tau\right] = g(x). \qquad (54.21)$$

De aquí, de acuerdo con la fórmula (54.2) y conforme a las designaciones (54.17), tendremos

$$a_1(x)\varphi(x)+\frac{1}{\pi i}\int_\alpha^\beta\left(\frac{\tau-\alpha}{x-\alpha}\right)^{1-\mu}\frac{b_1(\tau)\varphi(\tau)}{\tau-x}\,d\tau=\frac{\operatorname{sen}\mu\pi}{\pi}\frac{d}{dx}\int_\alpha^x\frac{g(\tau)\,d\tau}{(x-\tau)^{1-\mu}}.$$

Al introducir las funciones nuevas

$$\varphi_1(x)=(x-\alpha)^{1-\mu}\varphi(x),$$

$$g_1(x)=\frac{\operatorname{sen}\mu\pi}{\pi}(x-\alpha)^{1-\mu}\frac{d}{dx}\int_\alpha^x\frac{g(\tau)\,d\tau}{(x-\tau)^{1-\mu}},$$

obtenemos una ecuación singular

$$a_1(x)\varphi_1(x)+\frac{1}{\pi i}\int_\alpha^\beta\frac{b_1(\tau)\varphi_1(\tau)}{\tau-x}\,d\tau=g_1(x). \tag{54.22}$$

Las soluciones $\varphi_1(x)$ de esta ecuación conviene buscarlas en la clase de funciones que tienen en los extremos singularidades de orden inferior a μ para $x=\alpha$, e inferior a 1, para $x=\beta$. El orden de singularidades de las soluciones de la ecuación (54.22) se determina por el número $\theta=\arg G(\alpha)$; supongamos que θ está elegido en el intervalo $[0, 2\pi]$, entonces, para $\theta<2\pi\mu$ todas las soluciones $\varphi_1(x)$ de la ecuación (54.22) tienen, cuando $x=\alpha$, una singularidad de orden inferior a μ; si, en cambio, $\theta>2\pi\mu$, entonces, la solución no acotada para $x=\alpha$ tiene singularidad de orden mayor que μ, y, por ello, cuando $\theta\geqslant 2\pi\mu$, la ecuación (54.22) debe resolverse en la clase de funciones, acotadas para $x=\alpha$.

54.5. Caso de coeficientes constantes. Examinemos un caso de mayor importancia en que los coeficientes de la ecuaciones (54.12), (54.20) son constantes:

$$a\int_\alpha^x\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^\mu}+b\int_x^\beta\frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^\mu}=f(x). \tag{54.23}$$

La ecuación (54.23) puede escribirse también en la forma

$$\int_\alpha^\beta\frac{c_1+c_2\operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^\mu}\varphi(t)\,dt=f(x),$$

$$c_1=\frac{a+b}{2},\qquad c_2=\frac{a-b}{2}.$$

Las ecuaciones de tal tipo son de amplio uso en las aplicaciones al resolver, por ejemplo, los problemas de contacto de la teoría de elasticidad, plasticidad, escurrimiento de los materiales, ciertos problemas de la teoría de juegos y otros.

Supongamos que

$$\theta = \arg G(\alpha) = 2\arg(a - be^{\mu\pi i}) = (\mu\pi + 2\arg\left[c_2 \cos\frac{\mu\pi}{2} - ic_1 \operatorname{sen}\frac{\mu\pi}{2}\right]$$

está elegido dentro de los límites $0 < \theta < 2\pi$ (es evidente que $\theta = 0$ sólo cuando $b = 0$). Resolviendo la ecuación (54.16), correspondiente a (54.23), después de realizar algunas transformaciones simples, obtendremos

$$\int_\alpha^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^\mu} = \frac{a - b\cos\mu\pi}{A} f(x) + \frac{c}{(x-\alpha)^{\frac{\theta}{2\pi}} (\beta - x)^{\mu - \frac{\theta}{2\pi}}} -$$

$$- \frac{b \operatorname{sen}\mu\pi}{A\pi (x-\alpha)^{\frac{\theta}{2\pi}} (\beta - x)^{\mu - \frac{\theta}{2\pi}}} \int_\alpha^\beta \frac{(\beta - t)^{\mu - \frac{\theta}{2\pi}} (t-\alpha)^{\frac{\theta}{2\pi}}}{t - x} f(t)\,dt$$

para $\theta < 2\pi\mu$ (c es una constante arbitraria) y

$$\int_\alpha^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^\mu} = \frac{a - b\cos\mu\pi}{A} f(x) -$$

$$- \frac{b \operatorname{sen}\mu\pi}{A\pi} (x-\alpha)^{1-\frac{\theta}{2\pi}} (\beta - x)^{\frac{\theta}{2\pi} - \mu} \int_\alpha^\beta \frac{f(t)\,dt}{(t-\alpha)^{1-\frac{\theta}{2\pi}} (\beta - t)^{\frac{\theta}{2\pi} - \mu} (t - x)}$$

para $\theta \geqslant 2\pi\mu$. Aquí se ha denotado

$$A = a^2 - 2ab\cos\mu\pi + b^2 = 4\left(c_1^2 \cos^2\frac{\mu\pi}{2} + c_2^2 \operatorname{sen}^2\frac{\mu\pi}{2}\right).$$

Para hallar la función $\varphi(t)$ nos queda resolver una ecuación de Abel corriente. De este modo, *la ecuación* (54.23) *tiene en la clase de funciones de Hölder con singularidades integrables en los extremos una única solución, si, y sólo si*

$$\arg(a - be^{\mu\pi i}) \geqslant \mu\pi.$$

Haciendo caso omiso de las operaciones matemáticas, demos a conocer la forma definitiva de la solución para el caso en que $\theta \geqslant 2\pi\mu$:

$$\varphi(x) = \frac{a}{A} \frac{\operatorname{sen}\mu\pi}{\pi} \frac{d}{dx} \int_\alpha^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\mu}} -$$

$$- \frac{b}{A} \left(\frac{\operatorname{sen}\mu\pi}{\pi}\right)^2 \frac{d}{dx} \int_\alpha^x \frac{Z(t)}{(x-t)^{1-\mu}} \frac{\partial}{\partial t} \times$$

$$\times \left(\int_\alpha^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^\mu} \int_\tau^\beta \frac{f(s)\,ds}{Z(s)(s-\tau)^{1-\mu}} \right) dt, \quad (54.24)$$

donde

$$Z(t)=(t-\alpha)^{1-\left(\frac{\theta}{2\pi}-\mu\right)}(\beta-t)^{\frac{\theta}{2\pi}-\mu}.$$

Al deducir esta fórmula la integral singular se debe transformar conforme a la fórmula (54.11), cambiando en ella previamente μ por $1-\mu$.

(Damos al lector la posibilidad de obtener una fórmula semejante para el caso en que $\theta < 2\pi\mu$).

Ha de ser notado un caso particular que ha atraído la atención de varios autores:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\varphi(t)}{|x-t|^{\mu}}\,dt=f(x). \tag{54.23'}$$

Para esta ecuación $\theta=(1+\mu)\pi>2\mu\pi$, de suerte que su única solución, cualquiera que sea el segundo miembro de tipo (54.14), se da mediante la fórmula (54.24), en la cual

$$a=b=1,\ A=4\operatorname{sen}^2\frac{\mu\pi}{2},\qquad Z(t)=(t-\alpha)^{\frac{1+\mu}{2}}(\beta-t)^{\frac{1-\mu}{2}}.$$

54.6. Ecuaciones completas con núcleo potencial. Consideraremos una ecuación de forma general

$$M\varphi\equiv\int_{\alpha}^{\beta}\frac{c(x,t)}{|x-t|^{\mu}}\varphi(t)\,dt=f(x), \tag{54.25}$$

suponiendo que la función $c(x,\ t)$ puede tener discontinuidad de primera especie para $x=t$, es decir, $c(x,\ t)=a(x,\ t)$ para $t<x$, $c(x,\ t)=b(x,\ t)$ para $t>x$, de modo que

$$M\varphi\equiv\int_{\alpha}^{x}\frac{a(x,t)}{(x-t)^{\mu}}\varphi(t)\,dt+\int_{x}^{\beta}\frac{b(x,t)}{(t-x)^{\mu}}\varphi(t)\,dt=f(x). \tag{54.26}$$

Convengamos en considerar las funciones $a(x,\ t)$, $b(x,\ t)$ hölderianas por totalidad de variables x y t con exponente $\lambda>1-\mu$. Las soluciones $\varphi(x)$ y el segundo miembro $f(x)$ pertenecerán a las clases de funciones de tipo (54.13) y (54.14), respectivamente. Probemos que la ecuación de tipo en consideración se reduce a una ecuación singular completa con núcleo de Cauchy. Al designar

$$K(x,t)=|x-t|^{-\mu}\begin{cases}a(x,t)-a(t,t), & t<x,\\ b(x,t)-b(t,t), & t>x,\end{cases}$$

podemos escribir la ecuación (54.26) en la forma

$$\int_{\alpha}^{x} \frac{a(t,t)}{(x-t)^{\mu}} \varphi(t)\,dt + \int_{x}^{\beta} \frac{b(t,t)}{(t-x)^{\mu}} \varphi(t)\,dt = f(x) - \int_{\alpha}^{\beta} K(x,t)\,\varphi(t)\,dt. \quad (54.26')$$

Considerando esta ecuación como ecuación de Abel generalizada con coeficientes interiores (estudiada en el p. 53.4), la escribamos, en virtud de (54.21), en la forma

$$\int_{\alpha}^{x} \frac{dt}{(x-t)^{\mu}} \left\{ [a(t,t) - \cos \mu\pi\, b(t,t)]\,\varphi(t) + \frac{\operatorname{sen} \mu\pi}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\tau-\alpha}{t-\alpha}\right)^{1-\mu} \frac{b(\tau,\tau)\,\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau \right\} = f(x) - \int_{\alpha}^{\beta} K(x,t)\,\varphi(t)\,dt. \quad (54.26'')$$

De aquí, resolviendo la ecuación de Abel ordinaria, obtenemos

$$K\varphi_1 \equiv a_1(x)\,\varphi_1(x) + \frac{1}{\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{b_1(\tau)\,\varphi_1(\tau)}{\tau-x}\,d\tau + \int_{\alpha}^{\beta} k(x,\tau)\,\varphi_1(\tau)\,d\tau = f_1(x), \quad (54.27)$$

donde

$$a_1(x) = a(x,x) - \cos \mu\pi\, b(x,x), \quad b_1(x) = i \operatorname{sen} \mu\pi\, b(x,x),$$

$$\varphi_1(x) = (x-\alpha)^{1-\mu}\,\varphi(x), \quad f_1(x) = \frac{\operatorname{sen} \mu\pi}{\pi} (x-\alpha)^{1-\mu} \frac{d}{dx} \int_{\alpha}^{x} \frac{f(\tau)\,d\tau}{(x-\tau)^{1-\mu}},$$

$$k(x,\tau) = \frac{\operatorname{sen} \mu\pi}{\pi} \left(\frac{x-\alpha}{\tau-\alpha}\right)^{1-\mu} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\alpha}^{x} \frac{K(t,\tau)}{(x-t)^{1-\mu}}\,dt.$$

Al emplear la fórmula (54.4), se puede mostrar que el núcleo $k(x,\tau)$ es regular: admite la acotación

$$|k(x,\tau)| \leqslant \frac{c}{|x-\tau|^{1-\lambda}}.$$

donde λ es el exponente que caracteriza el carácter hölderiano de las funciones $a(x, t)$, $b(x, t)$.

De este modo, la resolución de la ecuación en consideración (54.25) se ha reducido a la resolución de una ecuación singular equivalente con núcleo de Cauchy. La última puede ser reducida por procedimientos conocidos a una ecuación de Fredholm. Hemos de notar que la ecuación de Fredholm puede obtenerse directamente, aplicando un método análogo al de Carleman—Vekua, siempre que la ecuación (54.26') se resuelve como característica por un método practicado en el p. 54.4.

La relación establecida entre la ecuación (54.25) y la ecuación singular con núcleo de Cauchy presta la posibilidad de obtener los teoremas de Noether para esta ecuación. No obstante, para que dichos teoremas sean válidos, las clases transpuestas para la ecuación (54.25) han de introducirse por un método distinto del aceptado en el § 47 para las ecuaciones con núcleo de Cauchy. La propia ecuación transpuesta se introduce aquí de un modo habitual:

$$M'\psi \equiv \int_{\alpha}^{\beta} \frac{c(t, x)}{|x-t|^{\mu}} \psi(t)\, dt = g(x). \tag{54.28}$$

Las ecuaciones (54.12), (54.20) con coeficientes exteriores e interiores, consideradas más arriba, resultan ser transpuestas una a la otra. Designemos, para brevedad, $r = (t-\alpha)^{1-\mu}$. Al comparar el operador M en la forma (54.26'), (54.26") con el operador K de (54.27), advertimos que

$$M\varphi \equiv \Gamma(1-\mu)\, I_{\alpha}^{1-\mu} \frac{1}{r} \mathrm{K} r\varphi = f \tag{54.29}$$

donde se ha usado la denotación (54.6). Para el operador transpuesto M' tendremos en este caso

$$M'\psi \equiv \Gamma(1-\mu)\, r\mathrm{K}' \frac{1}{r} I_{\beta}^{1-\mu}\psi = g, \tag{54.30}$$

donde K' es un operador singular con núcleo de Cauchy, transpuesto al operador K. Cotejando (54.29) y (54.30), concluimos que las clases transpuestas para las funciones $\varphi(x)$, $\psi(x)$ deben elegirse de una manera tal que las funciones

$$r\varphi = (x-\alpha)^{1-\mu}\varphi(x) \quad \text{y} \quad \frac{\Gamma(1-\mu)}{r} I_{\beta}^{1-\mu}\psi = \frac{1}{(x-\alpha)^{1-\mu}} \int_{x}^{\beta} \frac{\varphi(t)\, dt}{(t-x)^{1-\mu}}$$

pertenezcan a las clases transpuestas en el sentido de la definición dada en el § 47. Entonces, para la ecuación de partida (54.25) y la transpuesta a ella, en las clases para $\varphi(x)$ y $\psi(x)$, serán válidos todos los tres teoremas de Noether.

54.7. Ecuaciones con núcleo potencial en una recta infinita. Examinemos, ahora, una ecuación de tipo

$$a(x)\int_{-\infty}^{x}\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{\mu}}+b(x)\int_{x}^{\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{(t-x)^{\mu}}=f(x), \tag{54.31}$$

suponiendo que $a(x)$, $b(x)$ satisfacen la condición de Hölder con exponente $\lambda > 1-\mu$ en toda la recta, incluso el punto infinitamente alejado. Las soluciones $\varphi(t)$ se buscarán en la clase de funciones hölderianas que en el infinito se reducen a cero de orden $\nu > 1-\mu$, lo cual asegura la convergencia de las integrales en el primer miembro de la ecuación. El segundo miembro $f(x)$ lo consideraremos hölderiano con exponente $\lambda > 1-\mu$, reducible en el infinito a cero de orden arbitrario.

La solución de la ecuación

$$\int_{-\infty}^{x}\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{\mu}}=f(x),$$

análoga a la ecuación de Abel (54.1) solamente para las funciones decrecientes suficientemente rápido en el infinito $f(x)$: $|f(x)|\leqslant c\,|x|^{-\mu-\varepsilon}$ con $x\to\infty$, se da mediante la fórmula conocida

$$\varphi(x)=\frac{\operatorname{sen}\mu\pi}{\pi}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x}\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\mu}}.$$

Si $f(x)$ tiene en el infinito un cero de orden arbitrario, haremos uso de la fórmula análoga a (54.4):

$$\varphi(x)=\frac{(1-\mu)\operatorname{sen}\mu\pi}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{2-\mu}}\,dt=$$

$$=\frac{(1-\mu)\operatorname{sen}\mu\pi}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{f(x)-f(x-t)}{t^{2-\mu}}\,dt. \tag{54.32}$$

Tienen lugar las identidades de tipo (54.7), (54.8):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t-x}\int_{-\infty}^{t}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\mu}}=\operatorname{ctg}\mu\pi\int_{-\infty}^{x}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(x-\tau)^{\mu}}+\operatorname{cosec}\mu\pi\int_{x}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-x)^{\mu}},$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{dt}{(x-t)^{\mu}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-t}=\operatorname{ctg}\mu\pi\int_{-\infty}^{x}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(x-\tau)^{\mu}}+\operatorname{cosec}\mu\pi\int_{x}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-x)^{\mu}}.$$

Con ayuda de la primera de estas identidades la ecuación (54.31) puede reducirse (razonando igual que en el p. 54.3) a una ecuación con núcleo de Cauchy:

$$a_1(x)\,\Phi(x)+b_1(x)\,\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi(t)}{t-x}\,dt=f(x), \tag{54.33}$$

donde $a_1(x)$, $b_1(x)$ son los mismos que en el p. (54.17), y

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{\mu}}.$$

Al haber resuelto la ecuación (54.33), encontraremos la función $\varphi(x)$, expresándola en términos de $\Phi(x)$ según la fórmula (54.32).

De una manera igual puede ser considerada en una recta infinita la ecuación de tipo (54.31) con coeficientes interiores. Y, por último, siguiendo el esquema del p. 54.6, podemos considerar en la recta infinita también unas ecuaciones completas. (Sin detenernos en esto, recomendamos que el lector lea las obras de S. G. Samko 9)—13)*.)

En conclusión, para la ecuación con coeficientes constantes

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c_1+c_2\operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{\mu}}\,\varphi(t)\,dt=f(x),\qquad c_1=\frac{a+b}{2},\qquad c_2=\frac{a-b}{2}$$

daremos una fórmula que ofrece su única solución:

$$\varphi(x)=\frac{(1-\mu)\operatorname{sen}\mu\pi}{A\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c_1+c_2\operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^{2-\mu}}\,[f(x)-f(t)]\,dt,$$

donde A es el mismo que en el p. 54.5. Si $f(x)$ va decreciendo en el infinito lo suficientemente rápido, $|f(x)|\leqslant c\,|x|^{-\mu-\varepsilon}$, entonces esta fórmula puede ser reducida a la forma

$$\varphi(x)=\frac{\operatorname{sen}\mu\pi}{A\pi}\,\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c_2+c_1\operatorname{sign}(x-t)}{|x-1|^{1-\mu}}\,f(t)\,dt.$$

54.8. Algunos otros resultados. La ecuación (54.12) con núcleo potencial, considerada más arriba, puede ser resuelta también mediante otro procedimiento, esto es, realizando una prolongación analítica en un plano complejo con ayuda de la función

$$\Phi(z)=[(z-\alpha)(\beta-z)]^{\frac{\mu-1}{2}}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\varphi(t)\,dt}{(t-z)^{\mu}}.$$

Para los valores límites $\Phi^{\pm}(x)$ se deducen las fórmulas análogas a las fórmulas de Sojotski (4.8). Con su ayuda la ecuación (54.12) se reduce a un problema de Riemann. Precisamente así K. D. Sakaliuk 1)* logró resolver por primera vez la ecuación (54.12) y también la (54.20) «con coeficientes interiores».

Daremos a conocer otros resultados referentes a las ecuaciones con núcleo potencial.

1°. La ecuación que generaliza la ecuación (54.12),

$$a(x)\int_{\alpha}^{x}\frac{P(x-t)}{(x-t)^{\mu}}\varphi(t)\,dt+b(x)\int_{x}^{\beta}\frac{P(x-t)}{(t-x)^{\mu}}\varphi(t)\,dt=f(x), \qquad (54.34)$$

donde $P(x)$ es un polinomio, fue resuelta por K. D. Sakaliuk 2)* que, además, examinó algunas otras clases de ecuaciones integrales con núcleo potencial (K. D. Sakaliuk 3)*).

2°. La ecuación de Abel generalizada (54.12) se resuelve en forma cerrada también en el caso en que ésta se define en un arco suave arbitrario. Tal investigación fue efectuada por K. D. Sakaliuk 6)* y luego por Peters 1)**. Este último examinó, además, la ecuación de tipo (54.34) con coeficientes interiores en el caso de un arco suave.

3°. La solución de la ecuación análoga a la (54.12), en el caso de unos cuantos segmentos que no se intersecan, fue dada por F. V. Chumakov 2)*.

§ 55. Ecuaciones integrales con núcleo logarítmico

Investigaremos en este párrafo las ecuaciones integrales que contienen en el núcleo una singularidad logarítmica. La ecuación más simple de esta índole

$$\int_{0}^{1}\ln|t-x|\,\varphi(t)\,dt=f(x) \qquad (55.1)$$

fue resuelta en forma cerrada por Carleman 1)** en 1922. Examinemos algunas clases generales de ecuaciones integrales con núcleo logarítmico.

55.1. Ecuación característica con núcleo logarítmico [1]. Empezaremos la investigación por la resolución de la ecuación

$$a(x)\int_{\alpha}^{x}\varphi(t)\,dt+\frac{b(x)}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta}\ln\frac{|x-t|}{\beta-x}\varphi(t)\,dt=f(x), \qquad (55.2)$$

[1]) La exposición de los pp. 55.1—55.3 sigue las obras de S. G. Samko.

la cual se llamará característica. Según veremos abajo, su teoría es enteramente análoga a la de la ecuación característica singular con núcleo de Cauchy.

Convengamos en considerar que los coeficientes reales $a(x)$, $b(x)$ tienen derivadas que en $[\alpha, \beta]$ satisfacen la condición de Hölder y no se reducen a cero simultáneamente: $a^2(x) + b^2(x) \neq 0$. Las soluciones $\varphi(x)$ vamos a buscarlas en la clase de funciones de tipo

$$\varphi(x) = \frac{\varphi^*(x)}{(x-\alpha)^{1-\varepsilon}(\beta-x)^{1-\varepsilon}} \tag{55.3}$$

donde $\varphi^*(x)$ satisface la condición de Hölder. En lo que se refiere al segundo miembro de la ecuación, supondremos que es derivable y su derivada tiene por expresión

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x-\alpha)^{1-\varepsilon}(\beta-x)^{1-\varepsilon}}, \tag{55.4}$$

donde $g(x)$ satisface la condición de Hölder.

Procediendo de acuerdo con el esquema del § 54. establezcamos la relación que existe entre una integral con núcleo logarítmico y una integral con núcleo de Cauchy. Esta relación es análoga a las correlaciones (54.7), (54.8) y tiene por expresión

$$\frac{1}{\pi}\int_\alpha^\beta \frac{dt}{t-x}\int_\alpha^t \varphi(\tau)\,d\tau = -\frac{1}{\pi}\int_\alpha^\beta \ln\frac{|\tau-x|}{\beta-x}\varphi(\tau)\,d\tau, \tag{55.5}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_\alpha^x dt\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-t} = -\frac{1}{\pi}\int_\alpha^\beta \ln\frac{|\tau-x|}{\tau-\alpha}\varphi(\tau)\,d\tau. \tag{55.6}$$

Al invertir en el primer miembro de las igualdades (55.5)—(55.6) el orden de integración y al calcular las integrales que se obtienen, obtendremos la demostración de dichas igualdades.

Sustituyendo en la ecuación (55.2) el sumando con núcleo logarítmico por su expresión en términos de la integral singular de acuerdo con la fórmula (55.5), obtendremos una ecuación singular con núcleo de Cauchy:

$$a(x)\Phi(x) - \frac{b(x)}{\pi}\int_\alpha^\beta \frac{\Phi(t)}{t-x}\,dt = f(x), \tag{55.7}$$

donde

$$\Phi(x) = \int_\alpha^x \varphi(t)\,dt. \tag{55.8}$$

En este momento conviene subrayar que en vista de (55.8) deben buscarse no cualesquiera soluciones de la ecuación (55.7), sino sólo derivables (y, por tanto, acotadas en ambos extremos) que satisfacen la condición

$$\Phi(\alpha) = 0. \tag{55.9}$$

Al resolver la ecuación (55.7) en la clase de funciones acotadas en ambos extremos, de acuerdo con la fórmula (47.12) obtenemos (suponiendo que $a^2(x) + b^2(x) = 1$)

$$\Phi(x) = a(x) f(x) + \frac{b(t)}{\pi} Z(x) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(t)}{Z(t)} \frac{dt}{t-x} + \\ + b(x) Z(x) P_{\varkappa-1}(x), \tag{55.10}$$

donde $\varkappa$ es el índice de la ecuación (55.7) en la clase de funciones acotadas en ambos extremos, y la función $Z(x) = [a(x) - ib(x)] \times \times X^+(x)$ tiene (véase (47.17)) por expresión

$$Z(x) = (x-\alpha)^{\gamma_1} (\beta - x)^{\gamma_2} \omega_0(x). \tag{55.11}$$

Aquí, la función $\omega_0(x)$ satisface la condición de Hölder y es distinta de cero en todos los puntos. Los exponentes γ_1, γ_2, determinados según la fórmula (42.7), resultan ser reales, puesto que

$$|G(x)| = \left| \frac{a(x) + ib(x)}{a(x) - ib(x)} \right| = 1; \tag{55.12}$$

siendo, en virtud de que las soluciones están acotadas, $0 \leqslant \gamma_1 < 1$, $0 \leqslant \gamma_2 < 1$.

Se puede mostrar que si el segundo miembro $f(x)$ satisface la condición (55.4) y los coeficientes $a(x)$, $b(x)$ tienen derivadas que satisfacen la condición de Hölder, entonces todas las soluciones acotadas $\Phi(x)$ de la ecuación (55.7), determinadas por la fórmula (55.10), son derivables en todos los puntos, a excepción, quizás, de los extremos $x = \alpha$, $x = \beta$, y sus derivadas

$$\varphi(x) = \frac{d\Phi}{dx}$$

tienen por expresión (55.3). Omitimos aquí la demostración de esta afirmación.

Investiguemos el cumplimiento de la condición (55.9). Si $b(\alpha) = 0$, entonces $\gamma_1 = 0$ y la integral en (55.10) tiene, para $x = \alpha$, una singularidad logarítmica. Mas $b(x)$ es derivable, de suerte que $|b(x)| = |b(x) - b(\alpha)| \leqslant c|x - \alpha|$ y, consecuentemente, de (55.10) tenemos $\Phi(\alpha) = a(\alpha) f(\alpha)$. Puesto que $b(\alpha) = 0$, entonces $a(\alpha) \neq 0$; por consiguiente, para que la ecuación (55.2) sea resoluble, es necesario que sea $f(\alpha) = 0$. Si, en cambio, $b(\alpha) \neq 0$, entonces, en virtud de (55.12), el punto $x = \alpha$ no puede ser un punto de acota-

ción automática. Por ello, la condición $\Phi(\alpha) = 0$ resulta factible con cualquier miembro segundo de la clase en consideración en virtud de la observación 3 del punto 47.2.

Enunciaremos el resultado definitivo:

1) *Sea* $\varkappa \geqslant 0$. *Si* $b(\alpha) \neq 0$, *entonces la ecuación* (55.2) *es incondicionalmente resoluble en la clase de funciones* $\varphi(x)$ de tipo (55.3) *con cualquier miembro derecho* $f(x)$ que satisface *la condición* (55.4). *Si* $b(\alpha) = 0$, *entonces para la resolubilidad de la ecuación es necesario y suficiente que sea*

$$f(\alpha) = 0. \tag{55.13}$$

La solución de la ecuación en ambos casos se da mediante la fórmula

$$\varphi(x) = \frac{d}{dx}\left[a(x) f(x) + \frac{b(x)}{\pi} Z(x) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(t)}{Z(t)} \frac{dt}{t-x} + \right.$$

$$\left. + b(x) Z(x) P_{\varkappa-1}(x)\right]. \tag{55.14}$$

2) *Sea* $\varkappa < 0$. *Para la resolubilidad de la ecuación en el caso de* $b(\alpha) \neq 0$, *es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(t)}{Z(t)} t^{j-1}\, dt = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, -\varkappa). \tag{55.15}$$

Cuando $b(\alpha) = 0$, *a las condiciones* (55.15) *debe añadirse el requisito* (55.13). *Siendo cumplidas las condiciones de resolubilidad, la única solución de la ecuación se da mediante la fórmula* (55.14), *en la cual* $P_{\varkappa-1}(x) \equiv 0$.

La ecuación

$$a(x) \int_{x}^{\beta} \varphi(t)\, dt + \frac{b(x)}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \ln \frac{|x-t|}{x-\alpha} \varphi(t)\, dt = f(x) \tag{55.2'}$$

es análoga a la ecuación (55.2). (Recomendamos que el lector mismo realice su investigación, rigiéndose por el esquema expuesto arriba. Indiquemos sólo que para esta ecuación se debe transformar de modo correspondiente la identidad (55.5).)

La ecuación con coeficientes interiores

$$\int_{\alpha}^{x} a(t) \varphi(t)\, dt + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} b(t) \ln \frac{|x-t|}{t-\alpha} \varphi(t)\, dt = f(x) \tag{55.16}$$

se reduce a una ecuación singular por derivación inmediata, siendo presente la condición adicional de equivalencia $f(\alpha) = 0$.

55.2. Ecuación con una singularidad logarítmica en el segundo miembro. Señalemos que la ecuación (55.2) admite, cuando $b(\beta) \neq 0$, una solución en la clase (55.3) también en el caso más general en que el segundo miembro tiene para $x = \beta$ una singularidad logarítmica

$$f(x) = f^*(x) \ln(\beta - x),$$

donde $f^*(x)$ satisface la condición (55.4). Mostremos que la solución $\varphi(x)$, encontrada para tal miembro derecho según la fórmula (55.14), pertenece, como antes, a la clase en consideración. Puesto que la función $[f^*(x) - f^*(\beta)] \ln(\beta - x)$ satisface la condición (55.4), resulta suficiente considerar el caso de $f(x) = \ln(\beta - x)$. Probemos que la solución (55.14), es decir,

$$a'(x) \ln(\beta - x) + \frac{b'(x) Z(x)}{\pi} \int_\alpha^\beta \frac{\ln(\beta - t)\, dt}{Z(t)(t - x)} + \\ + \left[\frac{a(x)}{x - \beta} + \frac{b(x)}{\pi} \frac{d}{dx}\left(Z(x) \int_\alpha^\beta \frac{\ln(\beta - t)\, dt}{Z(t)(t - x)}\right)\right] \quad (55.17)$$

pertenece a la clase (55.3))[1]. Para el primer sumando esto es evidente; haciendo uso de las investigaciones de integrales con singularidades logarítmicas potenciales, realizadas en el p. 8.5, no es difícil demostrar esta afirmación para el segundo sumando. Queda por considerar la expresión encerrada entre corchetes en el entorno del extremo $x = \beta$. Para simpleza nos limitemos a la consideración de la parte principal en $Z(x)$, es decir, convengamos en que $Z(x) = (\beta - x)^{\gamma_2}$. (No es difícil de mostrar que esta suposición no restringe la generalidad de razonamientos.) Entonces, con la ayuda de la sustitución $\beta - t = (\beta - x)\tau$ obtenemos

$$Z(x) \int_\alpha^\beta \frac{\ln(\beta - t)\, dt}{Z(t)(t - x)} = \ln(\beta - x) \int_0^{\frac{\beta - \alpha}{\beta - x}} \frac{d\tau}{\tau^{\gamma_2}(1 - \tau)} + \\ + \int_0^{\frac{\beta - \alpha}{\beta - x}} \frac{\ln \tau\, d\tau}{\tau^{\gamma_2}(1 - \tau)}. \quad (55.18)$$

Realizando, ahora, derivación, después de una serie de transformaciones reduzcamos la expresión entre corchetes en (55.17) a la forma

$$\frac{a(x) - b(x) \operatorname{ctg} \gamma_2 \pi}{x - \beta} + A(x), \quad (55.19)$$

---

[1]) El término $[Z(x) P_{\varkappa - 1}(x)]'$ pertenece, evidentemente, a esta clase.

donde la función $A(x)$ tiene la singularidad integrable. Hemos aprovechado la circunstancia de que según (47.28)

$$\int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^{\gamma_2}(1-\tau)} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\gamma_2}(1-x)^{\gamma_2}\left(x-\frac{1}{2}\right)} = -\pi \operatorname{ctg} \gamma_2\pi. \quad (55.20)$$

Dado que

$$G(\beta) = e^{2\pi i\gamma_2},$$

tenemos

$$\operatorname{ctg} \gamma_2\pi = \frac{a(\beta)}{b(\beta)}.$$

Por consiguiente,

$$a(\beta) - b(\beta) \operatorname{ctg} \gamma_2\pi = 0,$$

por lo cual el primer sumando en (55.19) tiene para $x = \beta$ una singularidad integrable, lo que se trataba de demostrar.

55.3. Ecuación de Carleman generalizada. Examinemos una ecuación integral

$$a_1(x) = \int_\alpha^x \varphi(t)\,dt + a_2 x \int_x^\beta \varphi(t)\,dt + \frac{b(x)}{\pi}\int_\alpha^\beta \ln|t-x|\varphi(t)\,dt = f(x), \quad (55.21)$$

que es una generalización inmediata de la ecuación de Carleman (55.1). Suponemos que $[a_1(x) - a_2(x)]^2 + b^2(x) \neq 0$. Resolvamos la ecuación (55.21) por reducción a (55.2), considerando que la condición (55.4) para el segundo miembro está cumplida. Escribamos la ecuación en forma

$$[a_1(x) - a_2(x)]\int_\alpha^x \varphi(t)\,dt + \frac{b(x)}{\pi}\int_\alpha^\beta \ln\frac{|x-t|}{\beta-x}\varphi(t)\,dt = f(x) - cm(x), \quad (55.22)$$

donde está designado

$$m(x) = \frac{b(x)}{\pi}\ln(\beta-x) + a_2(x), \quad c = \int_\alpha^\beta \varphi(t)\,dt. \quad (55.23)$$

El segundo miembro de la ecuación (55.22) pertenece a la clase (55.4), si $b(\beta) = 0$. Si, en cambio, $b(\beta) \neq 0$, serán aplicables los razonamientos del punto anterior. Por consiguiente, en los dos casos, para resolver la ecuación (55.22) puede emplearse la fórmula (55.14).

Al aplicar esta última, obtendremos (para $\varkappa \geqslant 0$)

$$\varphi(x) = \frac{d}{dx}\left\{b(x)\,Z(x)\,P_{\varkappa-1}(x) - cF(x) + \right.$$

$$\left. + [a_1(x) - a_2(x)]\,f(x) + \frac{b(x)\,Z(x)}{\pi}\int_\alpha^\beta \frac{f(t)\,dt}{Z(t)\,(t-x)}\right\}, \qquad (55.24)$$

donde

$$F(x) = [a_1(x) - a_2(x)]\,m(x) + \frac{b(x)\,Z(x)}{\pi}\int_\alpha^\beta \frac{m(t)\,dt}{Z(t)\,(t-x)}. \qquad (55.25)$$

Si $b(\alpha) = 0$, es necesario, en correspondencia con (55.13), exigir que sea

$$f(\alpha) - ca_2(\alpha) = 0. \qquad (55.26)$$

Para calcular una constante c, por el momento no determinada, sustituyamos la expresión (55.24) en la integral (55.23). Obtendremos

$$c\,[1 + F(\beta) - F(\alpha)] = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha), \qquad (55.27)$$

donde $\Phi(x)$ implica aquella parte del corchete en (55.24) la cual no contiene la constante c. Puede suceder que la igualdad (55.27) se reduce a una identidad. Omitiendo las operaciones matemáticas correspondientes, indiquemos que esto precisamente ocurre, si, por ejemplo, $b(\alpha) \neq 0$, $b(\beta) \neq 0$ o $b(\alpha) = b(\beta) = a_1(\beta) = a_2(\alpha) = 0$. En estos casos $1 + F(\beta) - F(\alpha) = 0$, $\Phi(\beta) = \Phi(\alpha) = 0$ y la constante c queda arbitraria. Por lo tanto, el número de soluciones de la ecuación (o, para $\varkappa < 0$, el número de condiciones de resolubilidad) depende no sólo de $\varkappa$, sino también de si se convierten en cero o no los valores de $b(\alpha)$, $b(\beta)$, $a_1(\beta)$, $a_2(\alpha)$.

Cuando $\varkappa < 0$, al escribir las condiciones (55.15) para el segundo miembro de la ecuación (55.22), llegamos al sistema de ecuaciones

$$\lambda_j = c\mu_j \quad (j = 1, 2, \ldots, -\varkappa), \qquad (55.28)$$

donde las designaciones son las siguientes

$$\lambda_j = \int_\alpha^\beta \frac{f(t)}{Z(t)}\,t^{j-1}\,dt, \quad \mu_j = \int_\alpha^\beta \frac{m(t)}{Z(t)}\,t^{j-1}\,dt. \qquad (55.29)$$

En el caso de que la constante c se determina de (55.27) unívocamente, las igualdades (55.28) ofrecen $-\varkappa$ condiciones de resolubilidad.

Cuando c queda arbitraria y si, a la vez, aunque uno de los números μ_j sea distinto de cero, podemos, a cuenta de la elección de c, satisfacer una de las condiciones (55.28).

Apliquemos, en particular, los resultados obtenidos a la misma ecuación de Carleman

$$\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(t)\ln|t-x|\,dt=f(x). \qquad (55.1')$$

Aquí, $a(x)\equiv 0$, $b(x)\equiv 1$, $\varkappa=-1$, $z(x)=\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}$, y la constante de (55.29)

$$\mu_1=\int_{\alpha}^{\beta}\ln(\beta-t)(t-\alpha)^{-\frac{1}{2}}(\beta-t)^{-\frac{1}{2}}dt$$

es igual a

$$\pi\ln\frac{\beta-\alpha}{4}$$

(omitimos los cálculos correspondientes). En virtud de los razonamientos anteriores llegamos a la siguiente deducción:

1. Si $\beta-\alpha\neq 4$, la ecuación de Carleman (55.1') es incondicionalmente resoluble en la clase (55.3) y tiene una única solución que se determina mediante la siguiente fórmula

$$\varphi(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}\left[\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\sqrt{(t-\alpha)(\beta-t)}\,f'(t)\,dt}{t-x}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\ln\frac{\beta-\alpha}{4}}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{f(t)\,dt}{\sqrt{(t-\alpha)(\beta-t)}}\right]. \qquad (55.24')$$

2. Si es que $\beta-\alpha=4$, entonces para la resolubilidad de la ecuación es necesario y suficiente que sea

$\int_{\alpha}^{\beta}f(t)(t-\alpha)^{-1/2}(\beta-t)^{-1/2}dt=0$, y, en este caso,

$$\varphi(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}\left[\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\sqrt{(t-\alpha)(\beta-t)}\,f'(t)\,dt}{t-x}+C\right], \qquad (55.24'')$$

donde C es una constante.

Las fórmulas (55.24'), (55.24") siguen directamente de la fórmula general (55.24), si se tiene en cuenta la igualdad

$$\frac{d}{dx}\left[\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{f(t)\,dt}{\sqrt{(t-\alpha)(\beta-t)}\,(t-x)}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\sqrt{(t-\alpha)(\beta-t)}\,f'(t)\,dt}{t-x},$$

cuya demostración aquí no se da.

La ecuación análoga (55.21) con coeficientes interiores

$$\int_{\alpha}^{x}a_1(t)\,\varphi(t)\,dt+\int_{x}^{\beta}a_2(t)\,\varphi(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta}b(t)\ln|x-t|\,\varphi(t)\,dt=f(x) \tag{55.30}$$

se reduce a una ecuación singular

$$[a_1(x)-a_2(x)]\,\varphi(x)-\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta}b(t)\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt=f'(x) \tag{55.31}$$

por derivación inmediata. La ecuación (55.30) es equivalente a la ecuación (55.31) con una condición complementaria

$$\int_{\alpha}^{\beta}a_2(t)\,\varphi(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta}b(t)\ln(t-\alpha)\,\varphi(t)\,dt=f(\alpha). \tag{55.32}$$

Al sustituir la solución de la ecuación (55.31) en (55.32), obtenemos una igualdad que entrelaza las constantes arbitrarias que integran la solución para $\varkappa > 0$.

55.4. Algunos otros tipos de las ecuaciones integrales con núcleo logarítmico. Demos a conocer de un modo breve, sin entrar en los detalles, algunos otros resultados referentes a las ecuaciones con núcleo logarítmico.

1°. La ecuación que sigue abajo en la cual figuran al mismo tiempo un núcleo de Cauchy y un núcleo logarítmico

$$a(x)\left[p\varphi(x)-\int_{\alpha}^{x}\varphi(t)\,dt\right]+$$

$$+\frac{b(x)}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta}\left[\frac{p}{t-x}+\ln|t-x|\right]\varphi(t)\,dt=f(x) \tag{55.33}$$

se reduce, de acuerdo con (55.5), a una ecuación singular

$$a(x)\,\Phi(x)+\frac{b(x)}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\Phi(t)}{t-x}\,dt=f(x)-cb(x)\ln(\beta-x), \qquad (55.34)$$

donde

$$\Phi(x)=p\varphi(x)-\int_{\alpha}^{x}\varphi(t)\,dt \quad \text{y} \quad c=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(t)\,dt.$$

Al haber resuelto la ecuación singular, hallemos la solución de partida $\varphi(x)$, partiendo de la ecuación diferencial lineal $p\varphi'(x)-\varphi(x)=\Phi'(x)$ con la condición adicional $\varphi(\alpha)=\frac{1}{p}\Phi(\alpha)$. La ecuación (55.33) fue resuelta en la obra del autor (F. D. Gájov 6*) por otro procedimiento, a saber, por aplicación del método de prolongación analítica inmediatamente a la misma ecuación (55.33).

Puede señalarse una serie de ecuaciones integrales con otras combinaciones de núcleos (los núcleos de Cauchy, potencial y logarítmico), reducibles al problema de contorno de Riemann (o a la ecuación con núcleo de Cauchy). Pero, surgen, como regla, dificultades considerables en la segunda etapa de resolución, cuando nos vemos obligados a determinar la función buscada a base de la solución del problema de contorno que ya fue determinada. Las cuestiones de este género no están todavía suficientemente investigadas.

2°. Consideraremos la ecuación integral

$$a(x)\int_{0}^{x}P(t-x)\,\varphi(t)\,dt+$$

$$+\frac{b(x)}{\pi}\int_{0}^{\infty}[P(t-x)\ln|t-x|+Q(t-x)]\,\varphi(t)\,dt=f(x), \qquad (55.35)$$

cuyos casos particulares se encuentran con frecuencia en las aplicaciones. Aquí, $P(z)$, $Q(z)$ son unas funciones enteras prefijadas. En el caso general, la resolución de tal ecuación tiene dificultades, relacionadas con el comportamiento de las funciones $P(z)$, $Q(z)$ en el infinito. Si se conoce el comportamiento asintótico y concreto de las funciones $P(z)$, $Q(z)$ en el infinito, entonces, con ayuda del método de prolongación analítica, la ecuación puede ser reducida al problema de contorno de Riemann. La teoría general de la ecuación (55.35) es todavía lejos de ser finalizada. Nos limitemos aquí a ofrecer un esquema general, rigiéndose por el cual se pueden resolver las ecuaciones de tal índole, si las funciones $P(z)$, $Q(z)$ están concretamente prefijadas.

Introduzcamos una función

$$\Phi(z) = \psi(z) \int_0^\infty [P(t-z) \ln(t-z) + Q(t-z)] \varphi(t)\, dt,$$

donde la función $\psi(z)$, analítica fuera del semieje $(0, \infty)$, debe ser elegida de una manera tal que $\Phi(z)$ tienda a cero, cuando $z \to \infty$. La elección de la función $\psi(z)$ en cada caso concreto se efectúa a base del estudio de las propiedades asintóticas del núcleo para $z \to \infty$.

Para las funciones $\Phi(z)$ no es difícil obtener[1]) el análogo de las fórmulas de Sojotski

$$\begin{aligned}
\Phi^+(x) &= \psi^+(x) \int_0^\infty [P(t-x) \ln|x-t| + Q(t-x)] \varphi(t)\, dt - \\
&\qquad - \pi i \psi^+(x) \int_0^x P(t-x) \varphi(t)\, dt, \\
\Phi^-(x) &= \psi^-(x) \int_0^\infty [P(t-x) \ln|x-t| + Q(t-x)] \varphi(t)\, dt + \\
&\qquad + \pi i \psi^+(x) \int_0^x P(t-x) \varphi(t)\, dt
\end{aligned} \tag{55.36}$$

Al expresar, con ayuda de estas igualdades, los sumandos integrales en (55.35) en términos de los valores límites $\Phi^{\pm}(x)$, llegamos a la condición de contorno del problema de Riemann

$$\Phi^+(x) = \frac{a(x)+ib(x)}{a(x)-ib(x)} \frac{\psi^+(x)}{\psi^-(x)} \Phi^-(x) - 2\pi i \frac{\psi^+(x) f(x)}{a(x)-ib(x)}, \tag{55.37}$$

prefijada en el semieje real positivo. Supongamos que la solución del problema de contorno está conocida; entonces la solución buscada $\varphi(t)$ se determinará de la ecuación integral

$$2\pi i \int_0^x P(t-x) \varphi(t)\, dt = \frac{\Phi^-(x)}{\psi^-(x)} - \frac{\Phi^+(x)}{\psi^+(x)}. \tag{55.38}$$

La última ecuación de tipo de Volterra con núcleo de diferencias pertenece a la clase de llamadas ecuaciones de tipo de convolución.

[1]) La deducción de las fórmulas (55.36) se da en el artículo de F. G. Gájov 6)*, en el cual el autor ofreció el esquema (que se expone aquí) para resolver la ecuación (55.35).

Aplicada la transformación unilateral de Laplace, esta ecuación se resuelve con facilidad en la forma cerrada.

He aquí un ejemplo que ilustra el método expuesto de resolución de las ecuaciones (55.35).

EJEMPLO. Resolvamos una ecuación integral

$$\int_0^\infty H_0^{(1)}(k|x-t|)\,\varphi(t)\,dt = f(x), \qquad x>0, \tag{55.39}$$

donde k es una constante, $H_0^{(1)}(z)$ es la primera función de Hankel de género nulo. Hagamos uso de la representación conocida

$$H_0^{(1)}(z) = \frac{2i}{\pi} J_0(z) \ln z + Q(z),$$

donde $J_0(z)$ es una función de Bessel de género nulo, $Q(z)$, cierta función entera. De este modo, aquí se tiene $P \equiv J_0$, $a = 0$, $b = \pi$. Para la función de Hankel se sabe la siguiente representación asintótica cuando $z \to \infty$:

$$H_0^{(1)}(z) = A\frac{e^{iz}}{\sqrt{z}} + O\left(\frac{1}{z}\right).$$

Por ello, en el caso dado $\psi(z) = \dfrac{e^{ikz}}{\sqrt{z}}$. El problema (55.37), al cual se reduce a ecuación (55.39), tiene por expresión

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \frac{2e^{ikx}}{\sqrt{x}} f(x).$$

Resolviendo el problema obtenido de salto, llegamos a la ecuación

$$\int_0^x J_0[k(t-x)]\,\varphi(t)\,dt = \sqrt{x}\int_0^\infty \frac{2e^{ik(t-x)}}{t-x} f(t)\,dt.$$

Para hallar la función $\varphi(t)$ resta aplicar la transformación de Laplace.

3°. La solución de la ecuación de Carleman (55.1) para el caso en que el contorno está formado por n segmentos del eje real se da en la obra de J. Thomas 1)**. La ecuación de tipo (55.16) para tal contorno fue investigada por F. V. Chumakov 6)*.

§ 56. Notas históricas

El material del § 51 está escrito de conformidad con la obra de F. D. Gájov y L. I. Chíbrikova 1)*, de la cual ya hemos tratado en el texto.

Entre las obras más tempranas concernientes a la cuestión dada debe mencionarse, ante todo, la de Gellerstedt 1)** (1936) y luego siguen las obras de S. G. Mijlin [15], D. I. Scherman 2)* (1948), A. V. Bitsadze 1)* (1953). En todas

las obras citadas el método de resolución de la ecuación característica es aplicado a la resolución de las ecuaciones completas de tipo particular.

El material del § 52, como ya se ha indicado, está escrito a base de la obra de L. I. Chíbrikova 2)*.

En las obras posteriores L. I. Chíbrikova dio toda una serie de ejemplos nuevos en los cuales las funciones automorfas se emplean para resolver diversos problemas de contorno. Merecen la atención sus obras 3), 4), donde están resueltos unos problemas de contorno para las ecuaciones diferenciales de tipo mixto (elíptico-hiperbólico) y, en particular, la obra 5), en la que se da la solución en forma cerrada en términos de funciones automorfas del problema de contorno de Hilbert para algunos polígonos limitados por arcos de las circunferencias.

Al final de los años cincuenta aparecieron las obras de Yu. L. Rodin y W. Koppelman relativas a la resolución de los problemas de contorno para unos dominios dispuestos en las superficies de Riemann. En este mismo tiempo L. I. Chíbrikova, continuando sus investigaciones en el campo de problemas de contorno en la clase de funciones automorfas ha llegado a los problemas de contorno en un polígono fundamental de la función automorfa de cualquier número p de pares de lados congruentes. En vista de los teoremas conocidos acerca de la uniformización de funciones algebraicas mediante funciones automorfas, los últimos problemas resultan ser enteramente equivalentes a los problemas de contorno en las superficies de Riemann de género p, cortadas por p pares de secciones canónicas. Más tarde ambas ramas de la teoría se han unido, diferenciándose, quizás, sólo en terminología. El planteamiento más general de los problemas de esta índole fue realizado por E. I. Zverovich [9].

Actualmente la teoría de problemas de contorno en las superficies de Riemann se ha formado como una asignatura ampliamente ramificada que en sus rasgos principales lleva un carácter terminado. De las aplicaciones más importantes, basadas en el principio de pegamiento conforme local y en el de simetría con relación a las curvas algebraicas ya hemos tratado suficientemente en el texto. Hacemos caso omiso de las otras aplicaciones.

La idea de resolución de las ecuaciones con núcleo potencial y logarítmico por el método de prolongación analítica fue propuesta por T. Carleman 2)** en 1922. Era, de hecho, la misma idea de prolongación analítica que antes fue utilizada por él para la resolución de una ecuación característica con núcleo de Cauchy. En la obra citada se ha resuelto la ecuación de Abel con límites de integración constantes (54.23′), como también la ecuación más simple con núcleo logarítmico (55.1). Las funciones analíticas auxiliares, utilizadas por Carleman tenían en el infinito un punto de ramificación, lo que causó algunas dificultades en la resolución del problema.

K. D. Sakaluk 1), 4)*, fue primero en resolver la ecuación de Abel generalizada con coeficientes interiores o exteriores, para lo cual él ha empleado el método de Carleman sobre prolongación analítica. Las suposiciones restrictivas para las obras citadas fueron debilitadas por L. V. Wolfersdorf 1) y S. G. Samko 3), 6). El primero hizo uso de la ecuación de Abel generalizada al resolver problemas de contorno para las ecuaciones diferenciales de tipo mixto. S. G. Samko propuso otro procedimiento para resolver las ecuaciones y las examinó también en una recta infinita (véase Samko 8)—13))**. Las ecuaciones completas con núcleo potencial se han considerado en las obras de F. V. Chumakov 1)* y S. G. Samko 7), 10), 11), 13)*. Las correlaciones principales del p. 54.2, que ligan las integrales con núcleos potenciales y las con núcleo de Cauchy, fueron obtenidas en las obras de S. G. Samko 3)—6) y L. v. Wolfersdorf 2)**. Ha de ser mencionada también la obra de L. v. Wolfersdorf 4)** en la cual la ecuación, de Abel generalizada con coeficientes constantes se ha aplicado a ciertos problemas de la teoría de juegos.

Existe una serie de obras primaturas dedicadas a la resolución de diferentes casos particulares de las ecuaciones de Abel generalizadas. Así, por ejemplo, N. I. Ajieser y V. A. Scherbina 1)* han obtenido la solución de la ecuación abe-

liana (54.23′) con límites constantes de integración, como así también la de la ecuación (55.1) con núcleo logarítmico como un caso particular, partiendo de las fórmulas de inversión de ciertas integrales con núcleo hipergeométrico. Es muy próximo a esta obra el artículo de W. E. Williams 1)** quien examinó ecuaciones análogas en relación con las aplicaciones en los problemas de electrostática. M. G. Krein 1)*, en sus investigaciones referentes al problema inverso de Sturm—Liouville, ha llegado a cierto método de resolución de las ecuaciones integrales, de donde, en particular, obtuvo la solución de las ecuaciones (54.23′) y (55.1).

En 1958 A. E. Heins y R. C. Mac Camy 1)** señalaron que el método de prolongación analítica permite reducir la solución de la ecuación integral de tipo

$$\int_0^\infty [P(x-t)\ln|x-t|+Q(x-t)]\,\varphi(t)\,dt=f(x),$$

donde P y Q son funciones pares enteras, a una ecuación elemental de tipo de convolución $\int_0^x P(x-t)\,\varphi(t)\,dt=f(x)$. Con el fin de ilustrar el método ellos dieron la resolución de la ecuación (55.36). Una parte del material del p. 55.4 se ha tomado de la obra del autor 6) y otra parte se publica por primera vez.

Las ecuaciones integrales (55.2), (55.2′), consideradas en el p. 55.1, se han estudiado para el caso de $b(\alpha)=b(\beta)=0$ en las obras de F. V. Chumakov 3)—5). La investigación de ecuaciones con núcleo logarítmico, expuestas en los pp. 55.1—55.3, fue realizada en la forma general por S. G. Samko y antes no se publicaba. Algunos otros tipos de las ecuaciones integrales con núcleo logarítmico fueron considerados por K. D. Sakaluk 3), 5)*.

Conviene indicar que el trabajo dirigido a la revelación de los tipos de ecuaciones integrales singulares que se resuelvan en forma cerrada empezó a realizarse hace poco tiempo y actualmente sigue desarrollando, de suerte que pueden esperarse en esta rama nuevos resultados.

PROBLEMAS AL CAPITULO VII

1. Muéstrese que la ecuación

$$\frac{1}{2}(1+t^\varkappa)\varphi(t)+\frac{1-t^\varkappa}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\left(\frac{1}{\tau-t}+\frac{3t+1}{3\tau t+\tau-t+1}+\frac{3t-1}{3\tau t-\tau+t+1}-\right.$$
$$\left.-\frac{18\tau}{9\tau^2-1}\right)\varphi(\tau)\,d\tau=f(t)$$

pertenece al tipo de las ecuaciones (51.12) y dése su solución.

Respuesta.

$$\varphi(t)=\frac{1}{2}(t^{-\varkappa}+1)f(t)-\frac{t^{-\varkappa}-1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\left(\frac{1}{\tau-t}+\frac{3t+1}{3\tau t+\tau-t+1}+\right.$$
$$\left.+\frac{3t-1}{3\tau t-\tau+t+1}-\frac{18\tau}{9\tau^2-1}\right)f(\tau)\,d\tau+(t^{-\varkappa}-1)\,P_{\varkappa-1}(F),$$
$$F(z)=9z\,\frac{1-z^2}{1-9z^2}\qquad(\varkappa\geqslant 0).$$

2. Al aplicar el mismo procedimiento dése la solución de la siguiente ecuación con contorno abierto:

$$\varphi(t)-\lambda\int_0^1\left(\frac{1}{\tau-t}+\frac{(1+i)\,t-1}{(1+i)\,\tau t-\tau-t+1}-\frac{2}{2\tau-1+i}\right)\varphi(\tau)\,d\tau=f(t),$$

3. Sea dada una ecuación integral singular

$$a(t)\,\varphi(t)+b(t)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{H[\omega_k(t)]}{\pi i}\int_L\left[\frac{1}{\tau-\omega_k(t)}-\frac{1}{\tau-\omega_k(\infty)}\right]\varphi(\tau)\,d\tau=f(t), \tag{1}$$

donde $\omega_0(z)\equiv z$, $\omega_1(z)$, ..., $\omega_{n-1}(z)$ es un grupo de transformaciones lineales fraccionales, $H(z)$ una función racional que en L_0 no tiene polos, $a^2-b^2=1$.

Muéstrese que con ayuda de la función automorfa analítica

$$\Phi(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{H[\omega_k(z)]}{2\pi i}\int_{L_0}\left[\frac{1}{\tau-\omega_k(z)}-\frac{1}{\tau-\omega_k(\infty)}\right]\varphi(\tau)\,d\tau$$

a ecuación se reduce al problema de contorno

$$\Phi^+(t)=\frac{a[\omega_k(t)]-H[\omega_k(t)]\,b[\omega_k(t)]}{a[\omega_k(t)]+H[\omega_k(t)]\,b[\omega_k(t)]}\,\Phi^-(t)+$$

$$+\frac{H[\omega_k(t)]\,f[\omega_k(t)]}{a[\omega_k(t)]+H[\omega_k(t)]\,b[\omega_k(t)]}, \tag{2}$$

$$t\in L_k\quad(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

Obténgase de aquí para $\varkappa\geqslant-\nu+1$ la solución de la ecuación (1) en la forma

$$\varphi(t)=a(t)\,f(t)-b(t)\,Z(t)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{H[\omega_k(t)]}{\pi i}\int_{L_0}\frac{f(\tau)}{Z(\tau)}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\tau-\omega_k(t)}-\frac{1}{\tau-\omega_k(\infty)}\right]d\tau+\frac{b(t)\,Z(t)\,P_{\varkappa+\nu-1}(F)}{[F(t)-F(z_\infty)]^{\varkappa-1}\prod_{j=1}^{\nu}[F(t)-F(z_j)]};$$

$Z(t)=[a(t)+H(t)\,b(t)]\,X^+(t)$, $X(t)$ es una función canónica del problema (2), z_j son los polos de la función $H(z)$. (F. D. Gájov y L. I. Chíbrikova 1)*.)

4. Sea dada una ecuación singular

$$a(t)\,\varphi(t)+b(t)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{p_k(t)}{\pi i}\int_{L_0}\left[\frac{1}{\tau-\omega_k(t)}-\frac{1}{\tau-\omega_k(\infty)}\right]\varphi(\tau)\,d\tau=f(t), \tag{1}$$

donde las funciones $\omega_k(z)$ constituyen un grupo cíclico; $p_k(z)$ son funciones racionales que satisfacen la condición

$$p_k(z)=\prod_{j=0}^{k-1}p_1[\omega_j(z)],\qquad\prod_{j=0}^{n-1}p_1[\omega_j(z)]=1.$$

Muéstrese que con ayuda de la función analítica

$$\Phi(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{p_k(z)}{2\pi i}\int_{L_0}\left[\frac{1}{\tau-\omega_k(z)}-\frac{1}{\tau-\omega_k(\infty)}\right]\varphi(\tau)\,d\tau,$$

que satisface la condición

$$p_j(z)\,\Phi[\omega_j(z)]=\Phi(z),\quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$

la ecuación se reduce al problema de contorno

$$\Phi^+(t)=\frac{a[\omega_k(t)]-b[\omega_k(t)]}{a[\omega_k(t)]+b[\omega_k(t)]}\,\Phi^-(t)+\frac{p_k(t)\,f[\omega_k(t)]}{a[\omega_k(t)]+b[\omega_k(t)}\,,$$
$$t\in L_k\quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

Obténgase de aquí la solución de la ecuación (1) en la forma

$$\varphi(t)=a(t)\,f(t)-b(t)\,Z(t)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{p_k(t)}{\pi i}\int_{L_0}\frac{f(\tau)}{Z(\tau)}\left[\frac{1}{\tau-\omega_k(t)}-\frac{1}{\tau-\omega_k(\infty)}\right]d\tau+$$
$$+b(t)\,Z(t)\,\theta(t),$$

donde

$$\theta(z)=\theta_0(z)\,\frac{P_{\varkappa+\nu-1}(F)}{[F(z)-F(z_\infty)]^{\varkappa-1}\prod_{j=1}^{\nu}[F(z)-F(z_j)]},$$

$$\theta_0(z)=\sum_{k=0}^{n-1}p_k(z);$$

$z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_\nu$ son ceros de la función $\theta_0(z)$. (F. D. Gájov y L. I. Chíbrikova 1)*.)

5. Muéstrese que la ecuación de Tricomi [26]

$$\varphi(t)-\lambda\int_0^1\left[\frac{1}{\tau-t}-\frac{1}{\tau+t-2\tau t}\right]\varphi(t)\,d\tau=f(t)$$

pertenece al tipo de ecuaciones (1) del problema anterior.

6. Redúzcase la solución de la ecuación

$$a(t)\,\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\sum_{k=0}^{2n-1}{}'(-1)^k\int_{L_0}\frac{\varphi(\tau)}{\omega_k(\tau)-t}\,d\tau=f(t),\qquad (1)$$

donde $\omega_k(t)$ constituyen el grupo cíclico, a un problema de contorno

$$\Phi^+(t)=\frac{a[\omega_k(t)]-b[\omega_k(t)]}{a[(\omega_k(t)]+b[\omega_k(t)]}\,\Phi^-(t)+\frac{(-1)^k\,\omega_k'(t)\,f[\omega_k(t)]}{a[\omega_k(t)]+b[\omega_k(t)]}$$

respecto de la función

$$\Phi(z)=\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{\varphi(\tau)}{\omega_k(\tau)-z}\,d\tau.$$

Obténgase de aquí la solución de la ecuación (1) en forma cerrada.

Muéstrese que la ecuación

$$\varphi(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{\tau-t}+\frac{1-2\tau}{\tau+t-2\tau t}\right)\varphi(\tau)\,d\tau,$$

utilizada por A. V. Bitsadze 1)* en la resolución de los problemas de contorno para las ecuaciones de tipo mixto, pertenece al tipo de ecuaciones (1). (F. D. Gajov y L. I. Chíbrikova 1)*.)

7. Muéstrese, con ayuda del desarrollo en fracciones simples, que en el caso de grupos finitos el núcleo $\frac{F'(\tau)}{F(\tau)-F(t)}$ se reduce a

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{\tau-\omega_k(t)}-\frac{1}{\tau-\omega_k(\infty)}\right],$$

8. Resuélvase la ecuación integral

$$\frac{1}{2}\left[1+(t-1)^{\varkappa}(3-t)^{\varkappa}\right]\varphi(t)+$$

$$+\frac{1-(t-1)^{\varkappa}(3-t)^{\varkappa}}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{H'(\tau)}{H(\tau)-H(t)}\varphi(\tau)\,d\tau=f(t),$$

donde L_0 es la circunferencia $|z-1|=1/2$,

$$H=F(z)=\frac{1}{F(z)}=\frac{16-z^2(4-z^2)}{4z(4-z)},$$

$F(z)$ es la función automática básica del grupo Γ:

$$\omega_0(z)\equiv z,\quad \omega_1(z)=4-z,\quad F(z)=\frac{1}{\omega_0(z)}+\frac{1}{\omega_1(z)},\quad \varkappa>0.$$

Respuesta

$$\varphi(t)=\frac{(t-1)^{\varkappa}(3-t)^{\varkappa}+1}{2(t-1)^{\varkappa}(3-t)^{\varkappa}}f(t)-\frac{1-(t-1)^{\varkappa}(3-t)^{\varkappa}}{(t-1)^{\varkappa}(3-t)^{\varkappa}}\times$$

$$\times\left[\frac{(4-t)t}{3t^2-12t-16}\right]^{\varkappa}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}f(\tau)\left[\frac{3\tau^2-12\tau-16}{(4-\tau)\tau}\right]^{\varkappa}\frac{H'(\tau)}{H(\tau)-H(t)}d\tau-$$

$$-\frac{1-(t-1)^{\varkappa}(3-t)^{\varkappa}}{2(t-1)^{\varkappa}(3-t)^{\varkappa}}\left[\frac{(4-t)t}{3t^2-12t-16}\right]^{\varkappa}P_{\varkappa-1}[H(t)].$$

9. Muéstrese que la integral

$$\frac{1}{\pi i}\int_{L_0}\frac{H'(\tau)}{H(\tau)-H(t)}\varphi(\tau)\,d\tau=f(t),$$

donde $H(z)=\dfrac{1}{\cos z}-\cos z$, L_0 es la circunferencia $\left|z-\dfrac{1}{\pi}\right|=\dfrac{1}{2}$, admite la inversión

$$\varphi(t)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{H'(\tau)}{H(\tau)-H(t)}f(\tau)\,d\tau.$$

Indicación. $f(z)=\cos z$ es la función automorfa básica, engendrada por el grupo de sustituciones $\omega_1(z)=z+2\pi$, $\omega_2(z)=-z$.

10. Sea $F(z)$ una función uniperiódica o biperiódica de período ω que tiene un cero de primer orden para $z=0$. Muéstrese que para la integral

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{\omega}\frac{F'(\tau-t)}{F(\tau-t)}\varphi(\tau)\,d\tau=f(t),$$

si se cumple la condición $\int\limits_0^{\omega} f(t)\,dt=0$, se verifica la siguiente fórmula de inversión:

$$\varphi(t)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{\omega}\frac{F'(\tau-t)}{F(\tau-t)}f(\tau)\,d\tau.$$

Generalícese para el caso en que la razón $\dfrac{F'}{F}$ está sustituida por la razón entre dos funciones F_1, F_2, que son periódicas de período ω y satisfacen la condición $F_1(0)=1$, $F'_2(0)=1$, (L. I. Chíbrikova 2)*, pág. 107.)

11. Partiendo de los resultados del problema 10, dedúzcanse las siguientes fórmulas de inversión para las funciones de Jacobi ϑ_1, sn, cn y dn:

1)
$$\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\vartheta_1'\left(\dfrac{\tau-t}{2\pi}\right)}{\vartheta_1\left(\dfrac{\tau-t}{2}\right)}\varphi(\tau)\,d\tau=f(t),$$

$$\varphi(t)=-\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\vartheta_1'\left(\dfrac{\tau-t}{2\pi}\right)}{\vartheta_1\left(\dfrac{\tau-t}{2}\right)}f(\tau)\,d\tau;$$

2)
$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{4k}\frac{\operatorname{cn}(\tau-t)\operatorname{dn}(\tau-t)}{\operatorname{sn}(\tau-t)}\varphi(\tau)\,d\tau=f(t),$$

$$\varphi(t)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{4k}\frac{\operatorname{cn}(\tau-t)\operatorname{dn}(\tau-t)}{\operatorname{sn}(\tau-t)}f(\tau)\,d\tau;$$

3) $$\frac{1}{\pi i}\int_0^{4k}\frac{\operatorname{cn}(\tau-t)}{\operatorname{sn}(\tau-t)}\,\varphi(\tau)\,d\tau=f(t),$$

$$\varphi(t)=\frac{1}{\pi i}\int_0^{4k}\frac{\operatorname{cn}(\tau-t)}{\operatorname{sn}(\tau-t)}\,f(\tau)\,d\tau;$$

4) $$\frac{1}{\pi i}\int_0^{4k}\frac{\varphi(\tau)}{\operatorname{sn}(\tau-t)}\,d\tau=f(t),\quad \varphi(t)=\frac{1}{\pi i}\int_0^{4k}\frac{f(\tau)}{\operatorname{sn}(\tau-t)}\,d\tau;$$

5) $$\frac{1}{\pi i}\int_0^{4k}\frac{\operatorname{dn}(\tau-t)}{\operatorname{sn}(\tau-t)}\,\varphi(\tau)\,d\tau=f(t),$$

$$\varphi(t)=\frac{1}{\pi i}\int_0^{4k}\frac{\operatorname{dn}(\tau-t)}{\operatorname{sn}(\tau-t)}\,f(\tau)\,d\tau;$$

6) $$\frac{1}{\pi i}\int_0^{4k}\frac{\operatorname{cn}(\tau-t)}{\operatorname{sn}(\tau-t)\operatorname{dn}(\tau-t)}\,\varphi(\tau)\,d\tau=f(t),$$

$$\varphi(t)=\frac{1}{\pi i}\int_0^{4k}\frac{\operatorname{cn}(\tau-t)}{\operatorname{sn}(\tau-t)\operatorname{dn}(\tau-t)}\,f(\tau)\,d\tau.$$

12. Obténganse las fórmulas de inversión de Hilbert (6.6), (6.7) a la condición de que $\int_0^{2\pi}u(\sigma)\,d\sigma=\int_0^{2\pi}v(\sigma)\,d\sigma=0$, partiendo de los resultados del problema 10.

13. Resuélvase la ecuación de tipo de Abel

$$\int_\alpha^x(x-t)^\mu\,\varphi(t)\,dt=f(x)\qquad(0<\mu<1).$$

Respuesta.

$$\varphi(t)=\frac{\operatorname{sen}\mu\pi}{\mu\pi}\,\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x\frac{f(t)}{(x-t)^\mu}\,dt,$$

14. Resuélvase la ecuación integral de Schlömilch

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\varphi(x\operatorname{sen}\theta)\,d\theta=f(x).$$

Respuesta.

$$\varphi(x)=f(0)+x\int_0^{\pi/2}f'(x\operatorname{sen}\psi)\,d\psi.$$

(Whittaker E. T. and G. N. Watson, «A course of modern analysis». 4 th edition reprinted, part 1, Cambridge Univ. Press, 1927, § 11.81).

15. Demuéstrese la identidad

$$\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-x} = \sqrt{x-\alpha}\,\frac{d}{dx}\int_\alpha^x \frac{dt}{\sqrt{x-t}}\int_t^\beta \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\sqrt{(\tau-\alpha)(\tau-t)}}$$

$$(\alpha < x < \beta).$$

16. Resuélvase la ecuación

$$\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(t)\,dt}{|x-t|^\mu} = f(x),$$

si a) $f(x)=(x-a)^n$ $(n=0, 1\ldots)$; b) $f(x)=[(x-\alpha)(\beta-x)]^{-\frac{\mu}{2}}$.

Respuesta.

$$\text{a)}\quad \varphi(x)=\frac{\cos\frac{\mu\pi}{2}}{\pi}\,\frac{\Gamma(\mu)\,n!\,(\beta-\alpha)^n}{\Gamma(n+\mu)\,[(x-\alpha)(\beta-x)]^{\frac{1-\mu}{2}}}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{n}\binom{n-\frac{1-\mu}{2}}{n-k}\left(\frac{\beta-x}{\alpha-\beta}\right)^k;$$

$$\text{b)}\qquad \varphi(x)=\frac{(\beta-\alpha)^{1-\mu}}{2B\left(\frac{\mu}{2},\,1-\mu\right)}[(x-\alpha)(\beta-x)]^{\frac{\mu}{2}-1}$$

(S. G. Samko 6).)

17. Demuéstrese que la solución general de la ecuación

$$\int_\alpha^\beta \frac{\operatorname{sign}(x-t)}{|x-t|^\mu}\,\varphi(t)\,dt = f(x)$$

tiene la forma

$$\varphi(x)=\frac{c}{[(x-\alpha)(\beta-x)]^{1-\frac{\mu}{2}}}+\frac{\operatorname{tg}\frac{\mu\pi}{2}}{2\pi}\,\frac{d}{dx}\int_\alpha^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\mu}}+$$

$$+\frac{\operatorname{sen}^2\frac{\mu\pi}{2}}{\pi^2}\,\frac{d}{dx}\int_\alpha^x\left(\frac{t-\alpha}{\beta-t}\right)^{\frac{\mu}{2}}\frac{dt}{(x-t)^{1-\mu}}\,\frac{d}{dt}\int^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^\mu}\times$$

$$\times\int_\tau^\beta\left(\frac{\beta-s}{s-\alpha}\right)^{\frac{\mu}{2}}\frac{f(s)\,ds}{(s-\tau)^{1-\mu}},$$

donde c es una constante arbitraria.

18. Muéstrese que si la función $\varphi(x)$ satisface en $[\alpha, \beta]$ la condición de Hölder con exponente $\lambda < \mu$, entonces la función

$$f(x) = \int_{\alpha}^{x} \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{\mu}} \qquad (0 < \mu < 1),$$

tiene la forma $f(x) = \dfrac{\varphi(\alpha)}{1-\mu}(x-\alpha)^{1-\mu} + \psi(x)$, donde $\psi(x)$ satisface la condición de Hölder de orden $\lambda + 1 - \mu$. (G. H. Hardy, J. E. Littlewood 1)**.)

19. Demuéstrese que para las funciones derivables $g(x)$ las fórmulas (54.2), (54.3), que dan la solución de la ecuación de Abel, pueden ser reducidas a la forma

$$\varphi(x) = \frac{\operatorname{sen} \mu\pi}{\pi(x-\alpha)} \int_{\alpha}^{x} \frac{\mu g(t) + (t-\alpha)\, g'(t)}{(x-t)^{1-\mu}}\, dt.$$

(K. D. Sakaluk 1)*.)

20. Redúzcase a la ecuación de Volterra de segunda especie (S. G. Samko 4)*) la ecuación integral de la teoría del ala delgada de avión (L. I. Sedov, «Problemas planas de hidrodinámica y aerodinámica», Л. И. Седов, «Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики», М., «Наука», 1966)

$$\int_{\alpha}^{x} \varphi(t) \sqrt{\frac{x-t+c}{x-t}}\, dt = f(x), \qquad c > 0.$$

APENDICE I

INDICE COMO INVARIANTE HOMOTOPICO

1. HOMOTOPÍA DE FUNCIONES. Sea L un simple contorno cerrado suave que contiene en su interior el punto $z = 0$. Designemos con M el conjunto de todas las funciones $G(t)$ que son continuas y en L no se reducen a cero.

Las funciones $G_0(t)$ y $G(t_1)$, pertenecientes al conjunto M, se llamarán *homotópicas* ($G_0(t) \sim G_1(t)$), si existe una función $G(t, \lambda)$, continua respecto a la totalidad de variables $t \in L$, $\lambda \in [0, 1]$, tal que

1) $G(t, \lambda) \neq 0$;

2) $G(t, 0) = G_0(t)$, $G(t, 1) = G_1(t)$.

En otras palabras, si $G_0(t) \sim G_1(t)$, entonces las curvas $w = G_0(t)$, $w = G_1(t)$ pueden ser encogidas una a la otra sin pasar en esta operación por el origen de coordenadas.

Mostremos que si $G(t) \in M$ y $\varkappa = \operatorname{Ind} G(t)$, entonces $G(t) \sim t^{\varkappa}$. Efectivamente, en el contorno L existe una rama unívoca de la función $[t^{-\varkappa} G(t)]^{\lambda}$, y la función

$$G(t, \lambda) = t^{\varkappa} [t^{-\varkappa} G(t)]^{\lambda}$$

realiza homotopía entre las funciones $t^{\varkappa}$ y $G(t)$. Luego, si $G(t)$ es homotópica a $t^{\varkappa}$, entonces $G(t)$ no es homotópica a ninguna otra potencia de t. En efecto, si admitimos que $G(t) \sim t^{\varkappa_1} \sim t^{\varkappa_2}$, entonces $t^{\varkappa_1 - \varkappa_2} \sim 1$. Pero, evidentemente, la circunferencia $w = t^{\varkappa_1 - \varkappa_2}$ con centro en el origen de coordenadas no puede ser encogida al punto $w = 1$ sin pasar por el origen.

De este modo, las *funciones $G_0(t)$ y $G_1(t)$ del conjunto M son homotópicas, si, y sólo si, los índices de estas funciones son iguales.*

En toda clase de homotopía (es decir, en la clase de funciones equivalentes) de representante más simple sirve la función $t^{\varkappa}$ y el índice

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi} [\arg G(t)]_L$$

es un invariante homotópico.

La información más detallada acerca de la homotopía de funciones (campos vectoriales) el lector puede encontrar en el libro de M. A. Krasnoselski «Campos vectoriales en el plano» (М. А. Красносельский, «Векторные поля на плоскости», М., Физматгиз, 1963) donde se dan diferentes aplicaciones del concepto de homotopía. A nosotros nos toca este concepto sólo en la teoría de operadores integrales singulares.

2. HOMOTOPÍA DE OPERADORES. Dos operadores de Noether[1]) N_0 y N_1, que actúan en el espacio de Banach, se llamarán *homotópicos* uno al otro, si existe un operador N_λ, dependiente continuamente del parámetro λ, tal que

1) N_λ es el operador de Noether para todo valor de $\lambda \in [0, 1]$;

2) $N_\lambda|_{\lambda=0} = N_0 \quad N_\lambda|_{\lambda=1} = N_1$.

La continuidad del operador N_λ según el parámetro λ se entiende, como siempre, en aquel sentido que $\|N_\lambda - N_{\lambda_0}\| \to 0$, cuando $\lambda \to \lambda_0$.

Aprovechando el teorema *B* del punto 23.4 sobre la estabilidad del índice con relación a las alteraciones pequeñas del operador, no es difícil de demostrar que si los dos operadores son homotópicos, sus índices son iguales.

3. HOMOTOPÍA DE OPERADORES INTEGRALES SINGULARES. Examinemos un conjunto de operadores de tipo

$$N\varphi = a(t)\,\varphi(t) + b(t)\,S\varphi + T\varphi, \tag{1}$$

donde S es un operador singular con núcleo de Cauchy en un contorno cerrado, T es un operador regular, y $a(t)$, $b(t)$ son coeficientes continuos, y, además, se consideran cumplidas las condiciones

$$A(t) = a(t) + b(t) \neq 0, \quad B(t) = a(t) - b(t) \neq 0.$$

Probemos que podemos conseguir la homotopía de operadores de tipo (1) con la ayuda de homotopía de los coeficientes. Resulta lícito el siguiente

LEMA. *Los operadores N_0 y N_1 de tipo* (1) *son homotópicos en el espacio L_p $(p > 1)$, si las funciones correspondientes $A_0(t)$, $B_0(t)$ son homotópicos a las funciones $A_1(t)$, $B_1(t)$.*

En efecto, sea $A_0(t) \sim A_1(t)$, $B_0(t) \sim B_1(t)$, y sean $A(t, \lambda)$, $B(t, \lambda)$ funciones que realizan homotopía. Es fácil mostrar que el operador

$$N_\lambda\varphi = \frac{A(t, \lambda) + B(t, \lambda)}{2}\,\varphi(t) + \frac{A(t, \lambda) - B(t, \lambda)}{2}\,S\varphi + T\varphi$$

es continuo según λ en el espacio L_p y satisface las condiciones 1), 2), y, por lo tanto, realiza homotopía de los operadores N_0 y N_1.

4. CÁLCULO DEL ÍNDICE DE UNA MISMA CLASE DE LOS OPERADORES SINGULARES CON TRASLACIÓN. El método de homotopía permite calcular el índice de los operadores mediante la sustitución del operador dado por otro operador más simple y homotópico al dado. Este método se usa con frecuencia para calcular el índice de diferentes operadores. Examinemos, a título de ejemplo, un operador integral singular con traslación

$$N\varphi = a(t)\,\varphi(t) + b(t)\,\varphi[\alpha(t)] + \frac{c(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - t} + \frac{d(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - \alpha(t)}, \tag{2}$$

donde $\alpha(t)$ es una traslación no de Carleman que mantiene inalterable el sentido del recorrido en L y posee puntos fijos. Supongamos, para simplificar, que $\alpha(t)$ tiene un único punto fijo t_0.

Sea

$$a(t) \pm c(t) \neq 0. \tag{3}$$

En adición vamos a considerar cumplida la condición

$$|a(t_0) \pm c(t_0)| > |b(t_0) \pm d(t_0)| \text{ máx } \{1, |\alpha'(t_0)|\}. \tag{4}$$

[1]) Sobre los operadores de Noether en el espacio de Banach véase el p. 23.4.

Se puede mostrar que al cumplirse las condiciones (3) y (4), el operador (2) es el de Noether. No damos aquí la demostración y recomendamos al lector los artículos de V. G. Krávchenko 1), 2)*, de los cuales fue tomado el ejemplo en consideración.

Introduzcamos el operador

$$N_\lambda \varphi = a(t)\varphi(t) + \lambda b(t)\varphi[\alpha(t)] + \frac{c(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - t} + \lambda \frac{d(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - \alpha(t)},$$

Las condiciones (3), (4) para este operador se cumplen para cualesquiera valores de $\lambda \in [0, 1]$. Por consiguiente, el operador N_λ es de Noether y realiza la homotopía entre el operador investigado con traslación $N_1 = N$ y el operador singular con núcleo de Cauchy

$$N_0\varphi = a(t)\varphi(t) + \frac{c(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)\,dt}{\tau - t}.$$

Por esta razón

$$\operatorname{Ind} N = \operatorname{Ind} N_0 = \operatorname{Ind} \frac{a(t) - c(t)}{a(t) + c(t)}.$$

Un procedimiento análogo fue utilizado por G. S. Litvinchuk 1)*, al calcular el índice de operadores singulares con traslación de Carleman, y por N. L. Vasilevski 1)*, al calcular el índice de ciertas ecuaciones singulares con núcleo logarítmico polar (véase el Apéndice II).

Para la construcción del operador N_λ, que realiza homotopía de dos operadores arbitrarios de Noether N_0 y N_1 la única regla no existe, creándose un vasto espacio para el arte del investigador.

APENDICE II

OPERADOR CON NUCLEO LOGARITMICO POLAR

Supongamos que en el contorno cerrado suave L está definido el operador

$$K_\varepsilon \equiv a(t)I + b(t)M_\varepsilon \quad \left(M\varphi \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - t)^{1-\varepsilon}}\,d\tau\right).$$

Cuando $\varepsilon > 0$, el núcleo del operador M_ε tiene una singularidad de orden integrable y el operador K_ε es de Fredholm. Para $\varepsilon = 0$ el operador M_ε se convierte en un operador singular con núcleo de Cauchy S, y, por lo tanto, K_ε está subordinado a la teoría de Noether. Con el objeto de medir el orden del infinito del núcleo tomemos, en lugar de la escala potencial, otra escala, más fina. Entre las funciones elementales, para dicho objeto va a servir la función logarítmica (con logarítmos reiterados y sus potencias).

Entre los operadores, que tienen el orden intermedio de singularidad (en comparación con el operador M_ε para $\varepsilon > 0$ y $\varepsilon = 0$) el más simple será

$$N\varphi \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau - t)\ln(\tau - t)}. \qquad (2)$$

Preguntamos ¿cómo influye el debilitamiento del orden de singularidad, causado por la introducción del factor $\frac{1}{\ln(\tau-t)}$ en el núcleo del operador S, y a qué teoría (de Fredholm o de Noether) estará subordinado el operador

$$Q = aI + bN?!$$

Expondremos brevemente la resolución de esta pregunta.

Al igual que en el § 22, analizando el operador S, hagamos uso del método de prolongación analítica en un plano complejo. Supongamos que $\varphi(\tau)$ satisface la condición de Hölder. No es difícil de probar que la integral $N\varphi$ existe en el sentido de valor principal. Introduzcamos una función analítica

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-z)\ln(\tau-z)}. \tag{4}$$

Designemos mediante $t_0 = x_0 + iy_0$ un punto del contorno L de ordenada mínima. Unámoslo con el punto infinitamente alejado mediante el rayo Γ, que en t_0 no toque L. La función $\ln(\tau - z)$ de la variable τ, la consideraremos como rama principal del logaritmo, determinada por la condición $\ln(\tau - z) = 0$ para $\tau - z = 1$, y continua en L en todos los puntos, a excepción del punto t_0.

El contorno de integración L y la curva C, definida por la ecuación $w = t(s) - 1$, constituirán las líneas singulares de la función $\Phi(z)$. Con el fin de simplificar la ulterior investigación supondremos que las líneas L y C no se intersecan. Esto se consigue, por ejemplo, al subordinar L a la condición de que una diferencia de cualesquiera dos puntos de ordenadas iguales queda, en su valor absoluto, inferior a la unidad. Mediante los métodos parecidos a los utilizados en el § 4 durante la investigación de la integral de tipo de Cauchy se demuestra

TEOREMA 1. *La integral* (4) *es una función analítica a trozos en un plano con líneas de saltos* L, C, Γ. *Sus valores límites en el contorno* L *se dan mediante las siguientes fórmulas*

$$\Phi^+(t) = \omega(t)\,\varphi(t) + N\varphi, \tag{5}$$

$$\Phi^-(t) = N\varphi, \tag{6}$$

donde

$$\omega(t) = \frac{1}{2\pi i}\ln\left[1 + \frac{2\pi i}{\ln(t_0 - t)}\right]$$

(los análogos de las fórmulas de Sojotski).

La función $\omega(t)$ ya no satisface la condición de Hölder y esto nos conduce a la necesidad de considerar el operador N no en el conjunto de funciones que satisfacen la condición de Hölder, sino en el espacio L_p. El operador N, determinado en las funciones de la clase H mediante la igualdad (2), admite una prolongación hasta un operador acotado en el espacio L_p. En lo sucesivo las propiedades de los operadores que se consideren siempre se deducirán primero en las fuciones de la clase H, y luego, a base de la continuidad, se extienden en las funciones del espacio L_p.

TEOREMA 2. *Si* $a(t)$ *es una función continua en* L, *entonces* $Na - aN$ *es un operador totalmente continuo.*

La investigación prueba que el operador N está íntimamente ligado con el operador S, por lo cual resulta más conveniente estudiar las propiedades no del operador Q, sino del operador más general

$$A = aI + bN + cS + T, \tag{7}$$

donde a, b, c son unas funciones continuas, y T un operador totalmente continuo.

Con ayuda de análogos de las fórmulas de Sojotski (5), (6), se demuestra el

TEOREMA 3. *Son válidas las correlaciones*

$$N(\omega I + N) = 0, \quad N(I + S) = 0, \quad (I - S)(\omega I + N) = 0.$$

De aquí, utilizando el teorema 2, inmediatamente se deduce el

COROLARIO. *Se verifican las igualdades*

$$N^2 = -\omega N + T', \quad NS = -N, \quad SN = \omega I + N - \omega S + T'',$$

donde T', T'' son operadores totalmente continuos.

Las últimas correlaciones permiten obtener fórmulas de composición de los operadores de tipo A, a saber, los coeficientes del operador

$$A = A_1 A_2 = aI + bN + cS + T$$

en designaciones obvias se expresan mediante las fórmulas

$$\begin{aligned} a &= a_1 a_2 + c_1 c_2 + c_1 b_2 \omega, \\ b &= a_1 b_2 + c_1 a_2 - b_1 b_2 \omega + c_1 b_2 - b_1 c_2, \\ c &= a_1 c_2 + c_1 a_2 - c_1 b_2 \omega. \end{aligned}$$

De aquí se desprende con facilidad que el operador

$$\widetilde{A} \equiv (a - b\omega) I - bN - cS$$

será regularizador izquierdo y derecho para A, con la particularidad de que

$$\begin{aligned} \widetilde{A}A &\equiv (a + c)(a - b\omega - c) I + T_1, \\ A\widetilde{A} &\equiv (a + c)(a - b\omega - c) I + T_2. \end{aligned} \tag{8}$$

Por consiguiente, es válido el

TEOREMA 4. *Para que el operador A sea de Noether, es suficiente que en el contorno L se cumpla la condición*

$$(a + c)(a - b\omega - c) \neq 0. \tag{9}$$

El índice del operador A puede ser obtenido por el método de homotopía (véase el apéndice I). El operador

$$A_\lambda \equiv \left(a - \lambda \frac{b\omega}{2}\right) I + (1 - \lambda) bN + \left(c + \lambda \frac{b\omega}{2}\right) S + T, \quad \lambda \in [0, 1],$$

transforma de modo homotópico el operador A en un operador singular con núcleo de Cauchy

$$A_1 \equiv \left(a - \frac{b\omega}{2}\right) I + \left(c + \frac{b\omega}{2}\right) S + T. \tag{10}$$

Por consiguiente, el índice del operador A coincide con el del operador A_1. De aquí se sigue el

TEOREMA 5. *El índice del operador A se calcula por la fórmula*

$$\operatorname{Ind} A = \operatorname{Ind} A_1 = \frac{1}{2\pi} \left[\arg \frac{a - b\omega - c}{a + c} \right]_L. \tag{11}$$

La teoría expuesta ofrece, para $c = 0$, la respuesta a la primera de las preguntas levantadas.

TEOREMA 6. *Si se cumple la condición $a(a - b\omega) \neq 0$, el operador Q es de Noether y su índice se calcula según la fórmula*

$$\operatorname{Ind} Q = \frac{1}{2\pi} \left[\arg \frac{a - b\omega}{a} \right]_L.$$

No obstante, la pertenencia de ambos operadores, $Q \equiv aI + bN$ y $K^\circ \equiv aI + bS$, a la clase común de operadores noetherianos no implica de ninguna manera que todas sus propiedades principales coinciden. Pueden citarse ejemplos en que el operador N resulte afín no para el operador singular S, sino para el operador de singularidad polar débil M_ε ($\varepsilon > 0$). Cuando $a \equiv 0$, la ecuación integral singular de primera especie $(cS + T)\varphi = f$ queda noetheriana como antes y, efectuándose la regularización, se reduce a una ecuación de Fredholm de segunda especie; en lo que se refiere a la ecuación de primera especie $(bN + T)\varphi = f$, la condición (9) de noethereidad se perturba y la correspondiente ecuación regularizada resulta ser fredholmiana de primera especie.

En el caso antes excluido de la consideración cuando los contornos L y C se intersecan, la teoría resulta mucho más compleja que la expuesta. Aquí hemos de incluir en la consideración ciertos operadores especiales de traslación. Pero, en principio, los resultados definitivos son iguales a los enunciados más arriba. En el caso de un operador N de la forma más general

$$N_{(n)}\varphi \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{(\tau - t) \ln(\tau - t) \ln\ln(\tau - t) \ldots \ln^m_{(n)}(\tau - t)},$$

donde

$$0 < m \leqslant 1, \quad \ln_j(\tau - t) = \ln\ln_{(j-1)}(\tau - t),$$

la teoría resulta complicada más aún, pero, en principio, los resultados en este caso también quedan sin cambios.

El problema examinado en el presente apéndice fue planteado por el autor del libro a mediados de los años 50. Los primeros pasos en su resolución los hizo en 1956 I. M. Melnik 1)* quien obtuvo para la integral

$$\Phi(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{(\tau - z) \ln^m(\tau - z)} \qquad (0 < m \leqslant 1),$$

los análogos de las fórmulas de Sojotski. La teoría que acabamos de exponer, como también sus generalizacionas, fue recién elaborada por el jóven matemático soviético N. L. Vasilevski 1)*.

APENDICE III

APLICACION DE LOS PROBLEMAS DE CONTORNO EN LA TEORIA DE APROXIMACION DE FUNCIONES

1. Interpolación de las funciones enteras. El problema general de interpolación de funciones analíticas consiste en la determinación de la función analítica según el conjunto numerable de valores de la propia función o de sus derivadas en cierto sistema de puntos. Aquí se trata sólo de la interpolación de funciones enteras. De los problemas concretos destacaremos los siguientes.

PROBLEMA DE NEWTON. *Hállese una función entera $F(z)$, si se conocen sus valores en los puntos enteros*

$$F(n) = a_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

PROBLEMA DE G. J. LIDSTONE. *Hállese una función entera $F(z)$ según los valores de sus derivadas pares en dos puntos*

$$F^{(2n)}(0) = a_n, \quad F^{(2n)}(1) = b_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

PROBLEMA DE ABEL–GONCHAROV. *Hállese una función entera $F(z)$ según los valores de sus derivadas sucesivas*

$$F^{(n)}(z_n) = a_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

La resolubilidad y la unicidad de solución de los problemas planteados arriba dependen considerablemente del carácter de crecimiento de la función entera.

La función entera $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n$ se llamará *función de comparación*, si 1) $A_n > 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ y 2) A_{n+1}/A_n tiende a cero de manera monótona. Suele decirse que la función entera $F(z)$ *es comparable con* $A(z)$, si existe τ $(0 < \tau < \infty)$ tal que para cualesquiera z

$$|F(z)| \leqslant MA(\tau |z|), \tag{4}$$

donde $M = M(F, \tau) > 0$; la cota inferior exacta de los números τ, para los cuales tiene lugar la correlación (4) se denomina *A-tipo de la función* $F(z)$.

Es válida la afirmación: *para que una función entera* $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *tenga* A*–tipo, igual a* σ, *es necesario y suficiente que* $\lim_{n\to\infty} \sup \left| \frac{a_n}{A_n} \right|^{1/n} = \sigma$.

Para A–comparables funciones $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tiene lugar la representación generalizada de Borel

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} A(zt) \gamma^{-}(t)\, dt, \tag{5}$$

donde $\gamma^{-}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{A_n} \frac{1}{t^{n+1}}$ es una función analítica en el entorno del punto infinitamente alejado. Cuando $A(t) = e^t$, la reprecentación integral (5) se convierte en una transformación corriente de Borel para funciones enteras de tipo exponencial.

Con ayuda de la transformación de Borel (5) los problemas (1), (2), y (3) se reducen a la resolución de cierto problema de momentos en un dominio complejo.

Ultimamente Yu. A. Kasmín aplicó en una serie de obras (véanse 1)—7)* [1]) a la resolución del problema de momentos los métodos de la teoría de problemas de contorno de funciones analíticas. Esto le permitió resolver de manera exhaustiva toda una serie de problemas importantes de la teoría de interpolación en el planteamiento más general.

Ateniéndose, en lo principal, a la obra 3), expondremos esquemáticamente la resolución del problema general de momentos mediante el método de problemas de contorno.

---

[1]) Se trata de las obras que se dan al final de este apéndice.

Sea $w(z)$ una función analítica y univalente en el dominio finito simplemente conexo D_z, y sean dadas las funciones $A_s(z)$ $(s = 0, 1, \ldots, p-1)$, analíticas en D_z^+, como también p sucesiones $\{a_{ns}\}$ y p números enteros l_s, $0 \leqslant l_s \leqslant p-1$ (no es necesario que sean distintos). El problema general de momentos consiste en lo siguiente:

I. *¿Existe una función* $\gamma^-(z)$, *analítica en el dominio cerrado* $\overline{D}^-$, *para la cual se verifiquen las igualdades*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_z} [w(z)]^{np+l_s} A_s(z)\,\gamma^-(z)\,dz = a_{ns} \qquad (6)$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots; \quad s = 0, 1, \ldots p-1),$$

donde Γ_z *es un simple contorno suave cerrado dispuesto en el dominio* D_z^+, *y* $\gamma^-(z)$ *es analíticamente prolongable hasta el contorno* Γ_z?

II. *Si existe siquiera una función* $\gamma^-(z)$, *que satisface el sistema de ecuaciones* (6), *entonces, ¿cómo se puede restablecer todo el conjunto de soluciones* $\{\gamma^-(z)\}$ *del sistema* (6) *a base de los números* a_{ns} (*momentos*) *en los segundos miembros de las igualdades* (6)?

Supongamos que la función $w = w(z)$ aplica el dominio D_z sobre el dominio D_w, y $z = z(w)$ es la función inversa. Las igualdades (6) pueden escribirse en una forma equivalente

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_w} w^{np+l_s} A_s[z(w)]\, z'(w)\,\gamma^-[z(w)]\,dw = a_{ns}. \qquad (7)$$

Convendremos en designar con B_w^+ y B_w^-, respectivamente, los dominios interior y exterior, limitados por el contorno Γ_w. Supongamos que el dominio B_w^+ es invariante con relación a giros el ángulo $2\pi/p$, es decir, $\delta B_w^+ = B_w^+$, $\delta = \exp 2\pi i/p$. De (7) se infiere que las funciones $a_s(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{ns}}{w^{np+l_s+1}}$ $(s = 0, 1, \ldots, p-1)$ deben ser analíticas en el dominio cerrado $\overline{B_w^-}$ (si la solución existe) y (7) es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones de contorno:

$$\sum_{k=0}^{p-1} A_s[z(w\delta^k)]\, z'(w\delta^k)\,\delta^{k(l_s+1)}\gamma[z(w\delta^k)] - pa_s(w) = \Psi_s^+(w), \qquad (8)$$

$$w \in \Gamma_w, \quad (s = 0, 1, \ldots, p-1).$$

En (8) las funciones $\Psi_s^+(w)$ son analíticas en el dominio cerrado $\overline{B_w^+}$. El sistema (8) nos lleva a la consideración del siguiente problema de contorno: hállense la función $\Phi^-(w)$, analítica en el dominio B_w^-, y p funciones $\Phi_s^+(w)$, analíticas en el dominio $\overline{B_w^+}$, si en el contorno Γ_w están cumplidas las condiciones

$$\sum_{k=0}^{p-1} A_s[z(w\delta^k)]\, z'(w\delta^k)\,\delta^{k(l_s+1)}\Phi^-(w\delta^k) + pa_s(w) = \Phi_s^+(w) \qquad (9)$$

$$(s = 0, 1, \ldots, p-1).$$

Si el determinante

$$\Delta(w) = \det \| A_s[z(w\delta^k)]\, z'(w\delta^k)\delta^{k(l_s+1)} \|_{s,\,k=0}^{p-1}$$

es distinto de cero, entonces se puede mostrar que el problema de contorno (9) es resoluble y sus soluciones $\Phi^-(w)$ coinciden con cierto subconjunto de soluciones $\psi^-(w)$ del problema de contorno de Riemann

$$\psi^+(w) = \Delta(w)\,\psi^-(w) + B(w),$$

donde la función $B(w)$ se expresa en términos de las funciones conocidas y es analítica en el dominio anular que contiene el contorno Γ_w. La integral de tipo de Cauchy

$$\gamma^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_w} \frac{\psi^-[w(t)]}{t-z}\,dt,$$

donde $\psi^-(w)$ es la solución general del sistema (9), ofrece la solución completa del problema general de momentos. En particular, en el caso que se considera $\Delta(w) \not\equiv 0$, y suponiendo que el dominio D_w es $\frac{2\pi}{p}$-invariante, la condición necesaria y suficiente de la resolubilidad del problema de momentos consiste en que sean analíticas en el dominio $\overline{B_w^{-1}}$ las funciones $a_s(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{ns}}{w^{np+ls+1}}$. No damos aquí la demostración de esta afirmación.

He aquí otros resultados obtenidos por Yu. A. Kasmín. Suponiendo que $\Delta(w) \not\equiv 0$ se ha dado la solución completa del problema de momentos para los dominios D_z, cuyas imágenes D_w están sumergidas en cierto dominio $\frac{2\pi}{p}$-invariante. Sin embargo, en este caso la resolución de los problemas I y II, relacionados a (6), se hace considerablemente más compleja. No obstante, este nuevo modo de tratar el problema general de momentos (6), que emplea los resultados de la teoría de problemas de contorno, en el caso mencionado también permitió dar la descripción de los conjuntos $\{a_{ns}\}$ para los cuales es resoluble el problema, y hallar en cuadraturas su solución completa. Esto, a su turno, ha permitido obtener la solución para una serie de problemas concretos de interpolación (véase Yu. A. Kasmín 4)).

En la obra de Yu. A. Kasmín 5) se han encontrado las condiciones necesarias y suficientes de unicidad del problema general de momentos para los dominios D_z, que son muy importantes en las aplicaciones, y cuyas imágenes *no son sumergidas* en los dominios $\frac{2\pi}{p}$-invariantes. En particular, esto se aplica para establecer las condiciones necesarias y suficientes de la complitud del sistema fundamental de soluciones de una misma clase de las ecuaciones en diferencias.

Ha de ser notado que el planteamiento del problema (6) admite varias variantes. Esta circunstancia, a la par con las aplicaciones numerosas en la teoría de interpolación, puede ser utilizada en la investigación de algunas cuestiones de la teoría analítica de números. Para ilustrar, demos a conocer un resultado. Diremos que una función entera $F(z)$ pertenece a $[q, \sigma)$, $q > 1$, $0 \leqslant \sigma < +\infty$, si para todo $\tau > \sigma$ se verifica la desigualdad

$$|F(z)| < M(F, \tau)\exp\frac{\ln^2|z\tau|}{2\ln q}.$$

La sucesión de números complejos $c_n = \alpha_n + i\beta_n$ se llamará *final de valores enteros*, si existe tal número N que para $n \geqslant N$ los números reales α_n y β_n sean enteros.

TEOREMA I. *Sea* $F(z) \in [q, 0)$, $q > 1$. *Si la sucesión de números complejos*

$$\left\{\beta^{-\frac{n(n+1)}{2}} F(\beta^n)\right\} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

es final de valores enteros aunque sea para un número complejo β, $1 < |\beta| \leqslant q$, *entonces* $F(z) \equiv 0$.

TEOREMA II. *Por pequeño que sea* $\varepsilon > 0$, *siempre existe* $N = N(\varepsilon) > 0$ *tal que el problema de interpolación*

$$F(\beta^n) = 0 \quad (n = N, N+1, \ldots),$$

donde β *es complejo*, $|\beta| \geqslant |q| > 1$, *tiene en la clase de funciones enteras* $[q, \varepsilon)$ *una solución no trivial* (Yu. A. Kasmín 7)).

Esta tesis continúa las investigaciones de A. O. Guelfond (véanse 1)—3)), relacionadas con el estudio de los valores tomados por funciones enteras en los puntos que forman una progresión geométrica $\{\beta^n\}$. En la demostración del teorema se emplea esencialmente la transformación generalizada de Borel (5) y la reducción posterior a un problema de contorno de Riemann en su planteamiento clásico.

2. Acerca del desarrollo en series según polimonios de Appel y sus generalizaciones. Los polinomios, introduciodos por Appel 1) en 1880, constituyen una clase bastante extensa que contiene muchos sistemas clásicos de polinomios. La sucesión de polinomios de Appel $\{A_n(z)\}$ se determina por la igualdad

$$F(t)\, e^{zt} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z)\, t^n, \tag{10}$$

en la cual $F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ es una serie de potencias con coeficientes complejos a_k, siendo $a_0 \neq 0$. En la forma explícita los polinomios de Appel $A_n(z)$ se expresan en términos de números a_k de la manera siguiente:

$$A_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(n-k)!}\, z^{n-k} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

La condición $a_0 \neq 0$ es equivalente a lo que la potencia del polinomio $A_n(z)$ es exactamente igual a n. La clase $A^{(1)}$ de los polinomios de Appel se determina como conjunto de toda clase de sistemas de polinomios $\{A_n(z)\}$ con funciones generadoras de tipo (10). Muchas sucesiones de polinomios que están bien conocidas son, de hecho, casos particulares de los polinomios de Appel de la clase $A^{(1)}$. A título de ejemplos (con la precisión hasta normación) pueden servir los sistemas de polinomios de Bernoulli, Hermite, Laguerre y muchos otros. Los numerosos ejemplos de los polinomios Appel están reunidos en la guía de G. Beitman y A. Erdei 1).

Se han considerado varias generalizaciones de los polinomios de Appel que asimismo llevan el nombre de sistemas de los polinomios de Appel de la clase $A^{(1)}$. Entre éstos se encuentran los polinomios de Appel con funciones generadoras de tipo

$$F(t)\, e^{zW(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z)\, t^n$$

$$W(t) = \sum_{k=1}^{\infty} W_k t^k, \quad W_1 \neq 0, \tag{11}$$

y, luego, polinomios de Appel con funciones generadoras de carácter más general aun

$$F(t)\,A[zW(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(z)\,t^n. \tag{12}$$

En (12) $A(z)$ es una función de comparación, y $W(t)$ es univalente en cierto entorno del origen.

Meixner J. exploró la cuestión de ortogonalidad con peso en el eje real de la sucesión de polinomio de Appel con funciones generadoras de tipo (11). Ha probado que existe en total cinco sistemas de este género, con la particularidad de que entre los polinomios de Appel con funciones generadoras de tipo (10) sólo un sistema de polinomios de Hermite es ortogonal (de peso $e^{-t^2/2}$) en el eje real. Las cuestiones concernientes al desarrollo en series según polinomios de Appel con funciones generadoras de tipo (10) y (11) — (12), como también las relaciones existentes entre los polinomios de Appel y diferentes ecuaciones funcionales fueron consideradas por varios autores. En los artículos de Yu. A. Kasmín 8), 9) los resultados de la teoría de problemas de contorno por primera vez fueron aplicados a la resolución del problema sobre el desarrollo en series según polinomios de Appel de las funciones analíticas, como también a la investigación de una serie de problemas contiguos. Esto ha permitido iluminar la problemática de la teoría de polinomios de Appel desde nuevo punto de vista y ofrecer las soluciones más simples de una serie de problemas concernientes.

S. N. Bernshtein 1) introdujo en consideración los sistemas de polinomios $\{S_n(z)\}$ y $\{C_n(z)\}$, determinados por los desarrollos

$$\frac{\operatorname{sh} zt + \operatorname{ch} t(1-z)}{\operatorname{ch} t} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(z)\,t^n,$$

$$\frac{\operatorname{ch} zt - \operatorname{sh} t(1-z)}{\operatorname{ch} t} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z)\,t^n.$$

Las indicadas sucesiones de polinomios $\{S_n(z)\}$ y $\{C_n(z)\}$, como también numerosos sistemas aislados de polinomios, cuyo estudio fue realizado por J. M. Whittaker y su escuela, como también por Yu. A. Kasmín 10)—13) llevan a la siguiente generalización de clases de los polinomios de Appel.

Sea p un número entero, $p \geqslant 1$. La clase $A^{(p)}$ de los sistemas de funciones de Appel se determina de modo siguiente. La sucesión de funciones $\{q_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ pertenece a $A^{(p)}$, siempre que

$$\sum_{k=0}^{p-1} A_k(t)\,A(z\delta^k W(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(z)\,t^n.$$

$$\delta = \exp\frac{2\pi i}{p},$$

donde $A(z)$ es la función de comparación, $W(t)$ es analítica y univalente en cierto entorno del origen de coordenadas, y $A_k(t) \in A$ ($|t| < \sigma$), $k = 0, 1, \ldots, p-1$. En las obras de Yu. A. Kasmín 12) 6)* se ha considerado la cuestión sobre representación de A-comparables funciones mediante las series casi potenciales según las funciones $\{q_n(z)\}_{n=0}^{\infty} \in A^{(p)}$. Con ayuda de la teoría de problemas de contorno se ha dado la resolución exhaustiva de este problema.

LITERATURA

Appel P. 1) Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 9 (1880), 118—144.

Bateman Harry, Erdelyi Arthur, Higher Transcendental Functions. In 3 vol. New York Toronto London McGraw-Hill Book Company, Inc. vol. II, 1953, pág. 396, vol. III, 1955, pág. 292.

Бернштейн С. Н. 1) О некоторых свойствах циклически монотонных функций, Соч., т. 2, изд-во АН СССР, 1954, 493—516. (Bernshtein S. N., Acerca de algunas propiedades de las funciones cíclicamente monótonas).

Гельфонд А. О. 1) Исчисление конечных разностей, Физматгиз, 1967 (Gelfond A. O. Cálculo de las diferencias finitas).

2) Sur de development des fonctions entieres d'ordre fini en serie d'interpolation de Newton, Rend. Lincei 11 (1930), 377—381.

3) О функциях, целочисленных в точках геометрической прогрессии, Матем. сб. 40, № 1 (1933), 42—47 (Acerca de las funciones de números enteros en los puntos de la progresión geométrica).

Евграфов М. А. 1) Интерполяционная задача Абеля — Гончарова, Гостехиздат, 1954 (Evgrafov M. A., Problema de interpolación de Abel—Goncharov).

Казьмин Ю. А. 1) Проблема моментов в комплексной области, Вестн. МГУ, сер. матем., механ., № 1 (1967), 3—11 (Kazmin Yu. A., Problema de momentos en el dominio complejo).

2) Об одной общей задаче из теории интерполяции, ДАН СССР 194, № 6 (1970), 1251—1254 (Acerca de un problema general de la teoría de la interpolación.

3) Общая проблема моментов в комплексной области, (Problema general de momentos en el dominio complejo) Proc. of the Conference on the Constructive Theory of Functions, Budapest (1969), 1972, 225—254.

4) К проблеме моментов в комплексной области, ДАН СССР 204, № 6 (1972), 1309—1312 (Acerca del problema de momentos en el dominio complejo).

5) Общая проблема моментов. Теоремы единственности, ДАН СССР 205, № 1, (1972), 19—22 (Problema general de momentos. Teoremas de unicidad).

6) Методы интерполяции аналитических функций и их приложения, Докт. диссерт., МГУ, 1972 (Métodos de la interpolación de las funciones analíticas y sus aplicaciones).

7) Об интерполировании целых функций в точках, образующих геометрическую прогрессию, ДАН БССР XVIII, № 5 (1974), 402—405. (Acerca de la interpolación de las funciones enteras en los puntos que engendran la progresión geométrica).

8) Сингулярные точки и разложения Аппеля (Puntos singulares y aplicaciones de Appel) Mathematica 1, 1970, 75—85.

9) О базисах из последовательных примитивных, Матем. заметки 3, № 3 (1968), 237—246 (Acerca de las bases de las primitivas sucesivas).

10) О степенных разложениях целых функций экспоненциального типа, Вестн. МГУ, № 1 (1968), 43—63 (Acerca de los desarrollos de potencias de las funciones enteras de tipo exponencial).

11) О разложениях в ряды по степеням $(z - cq^n)^n$, Матем. заметки I, №6 (1967), 683—688 (Acerca de los desarrollos en series según potencias $(z - cq^n)^n$).

12) О разложениях в ряды по полиномам Аппеля, Матем. заметки 5, № 5 (1969), 509—520 (Acerca de los desarrollos en series según los polinomios de Appel).

13) О полиномах Аппеля, Матем. заметки 6, № 2 (1969), 161—172 (Acerca de los polinomios de Appel).

APENDICE IV

APLICACION DEL PROBLEMA DE CONTORNO DE RIEMANN EN LA TEORIA DE LAS COLAS

Ya hace tiempo que ciertos problemas de la teoría de las colas se resuelven por reducción a las correlaciones de tipo del problema de contorno de Riemann. Ultimamente los problemas que se resuelven mediante los métodos indicados han penetrado incluso en las páginas de manuales de amplio uso, tales, por ejemplo, como de B. V. Gnedenko [4][1]) y A. A. Borovkov [6]. No obstante, la terminología y las designaciones, empleadas en las obras probabilísticas, difieren de las que están aceptadas en la teoría de problemas de contorno, lo que obstaculiza, sin duda, el enriquecimiento mutuo de estas teorías.

El objeto del presente apéndice es, por una parte, atraer la atención de especialistas en la teoría de probabilidades a la rama de las matemáticas, de la cual ellos pueden sacar los métodos de resolución de sus problemas y, por otra parte, señalar a los especialistas en problemas de contorno un nuevo campo para la aplicación de sus teorías.

Empecemos por la exposición de la cuestión auxiliar—los métodos de resolución de las ecuaciones integrales de tipo convolución. Estas ecuaciones, constituyendo un campo rico para las aplicaciones de problemas de contorno, tienen por sí mismas las más amplias aplicaciones en las ramas clásicas de la física matemática y sus apartados actuales, así como en muchas ramas de la economía matemática.

1. ECUACIONES INTEGRALES DE TIPO DE CONVOLUCION

Transformación de Fourier y algunas de sus propiedades

1. Transformación de Fourier. Las fórmulas

$$Vf \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{ixt}\, dt = F(x) \quad (-\infty < x < \infty),$$
$$V^{-1}F \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, e^{-ixt}\, dt = f(x) \quad (-\infty < x < \infty) \tag{1.1}$$

determinan dos operaciones recíprocamente inversas: *transformaciones de Fourier directa e inversa*[2]). El establecimiento de las condiciones (necesarias o suficientes), cuyo cumplimiento implica que la función puede ser representada por la integral de Fourier, es un problema complicado. No existen condiciones que al mismo tiempo sean necesarias y suficientes, es decir, al igual que en el caso de desarrollo en serie de Fourier, el poder de representar la función por la inte-

[1]) Referencias se dan a la lista de literatura al final de este apéndice.

[2]) Tomamos la transformación de Fourier con coeficientes no simétricos (1, $1/2\pi$), porque en esta forma ella se usa en la resolución de las ecuaciones probabilísticas que se consideran en adelante.

gral de Fourier es una propiedad independiente que no se reduce a las otras (continuidad, derivabilidad, etc.). La teoría más lógica surge en aquel caso en que por base se toma la clase L_2, invariante para la transformación de Fourier. Sin embargo, la integrabilidad, en este caso, hay que entenderla en el sentido de media cuadrática y, además, la teoría del problema de contorno de Riemann también se constituirá en la clase L_2.

Consideraremos que $f(x) \in L_2$, $| xf(x) | \in L$. Entonces $F(x)$ pertenece a L_2, será, además, derivable y, por lo tanto, satisfará con mayor razón a la condición de Hölder, ya que asegura la validez de todas las fórmulas que siguen abajo. Nos limitaremos a esta afirmación y en lo sucesivo no nos detendremos en las cuestiones de esta índole. La transformación de Fourier directa se designará mediante letras mayúsculas y la inversa, por letras minúsculas correspondientes.

2. Convolución. Una integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(x-t)\,\varphi(t)\,pt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-t)\,k(t)\,dt = k * \varphi$$

se denomina *convolución* de las funciones $k(x)$, $\varphi(x)$.

Es válido un par de fórmulas recíprocamente inversas:

$$V(k * \varphi) = VkV\varphi = K(x)\,\Phi(x),$$

$$V^{-1}(KF) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(t)\,F(t)\,e^{-ixt}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-t)\,\varphi(t)\,dt = k * \varphi. \quad (1.2)$$

3. Condición de prolongabilidad analítica. Funciones unilaterales. En el p. 4.3 se ha mostrado que una función dada al azar en el contorno no es, en el caso general, valor límite de la función analítica en D^+ o D^-. En dicho punto, partiendo de las fórmulas de Sojotski para integral de tipo de Cauchy, hemos obtenido las fórmulas (4.11), (4.12) que aseguran la condición de prolongabilidad analítica desde el contorno a los dominios $D^{\pm}$. Daremos, ahora, las mismas condiciones, expresadas en términos de la integral de Fourier.

TEOREMA. *Para que la función $F(x)$ de la clase L_2, prefijada en el eje real, sea valor de contorno de la función $F^{\pm}(z)$, analítica en el semiplano superior (inferior) y tal que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} | F^{\pm}(x+iy) |^2\,dx < M,$$

es necesario y suficiente que se reduzca a cero en el semieje negativo (positivo) la función $f(x)$ que es transformación inversa de Fourier de la función $F(x)$.

Las funciones $f_{\pm}(x)$, determinadas por las igualdades

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0, \\ 0 & x < 0, \end{cases} \qquad f_-(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ -f(x), & x < 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

se llamarán, respectivamente, *función unilateral derecha de $f(x)$* y *función unilateral izquierda de $f(x)$*. Obviamente, se verifica la correlación

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x). \quad (1.4)$$

En vista del teorema enunciado *las transformaciones de Fourier de las funciones unilaterales derecha e izquierda serán valores de contorno de la función, analítica en los semiplanos superior e inferior:*

$$Vf_+ = \int_{-\infty}^{\infty} f_+(t)\, e^{ixt}\, dt = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{ixt}\, dt = F^+(x),$$
$$Vf_- = \int_{-\infty}^{\infty} f_-(t)\, e^{ixt}\, dt = -\int_{-\infty}^{0} f(t)\, e^{ixt}\, dt = F^-(x). \tag{1.5}$$

Reducción de las ecuaciones integrales de tipo de convolución al problema de contorno de Riemann

1. Ecuación de Wiener — Hopf. La ecuación, dada en el semieje positivo

$$L\varphi \equiv \lambda\varphi(x) + \int_0^{\infty} k(x-t)\,\varphi(t)\,dt = f(x), \quad x > 0 \quad (\lambda = \text{const}), \tag{1.6}$$

se denomina *unilateral* o (por motivos históricos) *ecuación de Wiener—Hopf*. Resolvámosla con ayuda de la transformación de Fourier. Añadiremos, previamente, al segundo miembro una función unilateral izquierda arbitraria $\varphi_-(x)$ de modo tal que la ecuación se verifique en todo el eje; convengamos en considerar que las funciones $\varphi(x)$, $f(x)$, definidas sólo para $x > 0$, son unilaterales derechas. Obtendremos

$$\lambda\varphi_+(x) + k * \varphi_+ = f_+(x) + \varphi_-(x);$$

efectuada la transformación de Fourier, tendremos, tomando en consideración (1.2) y (1.5):

$$\lambda\Phi^+(x) + K(x)\,\Phi^+(x) = F^+(x) + \Phi^-(x) \quad (-\infty < x < \infty).$$

Resolviendo respecto de $\Phi^+(x)$, llegaremos al problema de contorno de Riemann en el eje real:

$$\Phi^+(x) = \frac{1}{\lambda + K(x)}\,\Phi^-(x) + \frac{F^+(x)}{\lambda + K(x)}. \tag{1.7}$$

La función buscada se hallará por medio de la transformación inversa de Fourier

$$\varphi(x) = \varphi_+(x) = V^{-1}\Phi^+.$$

2. Ecuación de dos núcleos y ecuaciones pares. Por unos métodos análogos al descrito más arriba se resuelven dos tipos de ecuaciones integrales que generalizan las ecuaciones de Wiener—Hopf.

La ecuación de dos núcleos

$$\lambda_1\varphi_+ - \lambda_2\varphi_- + k_1 * \varphi_+ - k_2 * \varphi_- = f \quad (-\infty < x < \infty)$$

se reduce al problema de contorno de Riemann

$$\Phi^+(x) = \frac{\lambda_2 + K_2(x)}{\lambda_1 + K_1(x)}\,\Phi^-(x) + \frac{F(x)}{\lambda_1 + K_1(x)}. \tag{1.8}$$

Las ecuaciones pares

$$\lambda_1\varphi + k_1 * \varphi = f_+, \quad x \geqslant 0;$$
$$\lambda_2\varphi + k_2 * \varphi = f_-, \quad x < 0,$$

se reduce al problema de contorno de Riemann

$$\Omega^+(x) = \frac{\lambda_2 + K_2(x)}{\lambda_1 + K_1(x)}\,\Omega^-(x) + \frac{K_2(x) - K_1(x) + \lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 + K_1(x)}\,F(x) \qquad (1.9)$$

respecto de una función auxiliar analítica a trazos $\Omega^{\pm}(z)$, según la cual la función de partida $\Phi(x) = V\varphi$ se determina mediante la fórmula

$$\Phi(x) = \frac{F(x) + \Omega^-(x)}{\lambda_1 + K_1(x)}.$$

Las ecuaciones consideradas no se encontrarán en lo sucesivo, por lo cual nos limitemos a lo dicho.

No sería difícil de reducir cada uno de los tres tipos considerados de ecuaciones a una ecuación singular con núcleo de Cauchy (característica o una transpuesta de la última); para mayor información sobre las ecuaciones de tipo convolución véanse las obras de Yu. I. Cherski [1] y de F. D. Gájov y Yu. I. Cherski [2].

Transformación de Laurent. Ecuaciones discretas de tipo de convolución

1. Transformación de Laurent. Sea

$$a = \ldots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots \qquad (1.10)$$

una sucesión infinita (un vector de dimensión infinita), para la cual la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|$ es convergente. Evidentemente, convergen también ambas series $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, $\sum_{n=-1}^{-\infty} |a_n|$.

En este caso la función

$$A(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \qquad (1.11)$$

se denomina *transformación de Laurent* de la sucesión (1.10). La operación de búsqueda, según las fórmulas

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} A(z)\, z^{-n-1}\, dz, \qquad (1.12)$$

de los términos de la sucesión (vectores componentes) (1.10) se denomina *transformación inversa de Laurent*. Simbólicamente: $A(z) = Ma$, $a = M^{-1}A$.

Las sucesiones

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n, & n \geqslant 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad a_n^- = \begin{cases} 0, & n \geqslant 0, \\ -a_n, & n < 0. \end{cases} \qquad (1.13)$$

se llaman *sucesión unilateral derecha* y *sucesión unilateral izquierda*, respectivamente.

Es, evidentemente, válido el siguiente

TEOREMA. *Para que la función* $A(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n t^n$, *definida en una circunferencia unitaria, sea un valor de contorno de la función* $A^{\pm}(z)$, *analítica en un círculo unitario (fuera de la circunferencia unitaria), es necesario y suficiente que la sucesión* a_n *sea derecha (izquierda) unilateral.*

2. Ecuaciones discretas de tipo de convolución (con índices en diferencias). La expresión $a * x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k} x_k$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ se denomina *convolución discreta de dos vectores* a, x. Según la de multiplicación de las series de potencias se deduce fácilmente la igualdad

$$M(a * x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k} x_k z^n =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m z^m \sum_{p=-\infty}^{\infty} x_p z^p = A(z)\, X(z). \qquad (1.14)$$

La transformación discreta de Laurent de una convolución discreta es igual al producto de las transformaciones discretas de Laurent de los vectores contraídos.

Un sistema infinito de ecuaciones de número infinito de incógnitas

$$\lambda x_n + \sum_{k=0}^{\infty} a_{n-k} x^k = f_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (1.15)$$

se denomina *análogo discreto de la ecuación de Wiener—Hopf*. Definamos adicionalmente el sistema para los valores negativos de índices, añadiendo al segundo miembro cierta sucesión unilateral izquierda x_n $(n = -1, -2, \ldots)$ y realicemos en ambos miembros las transformaciones de Laurent: multipliquemos cada una de las ecuaciones por t^n y después sumemos. Obtendremos

$$[\lambda + A(t)]\, X^+(t) = F(t) + X^-(t).$$

Al resolver respecto de $X^+(t)$, llegaremos al problema de contorno de Riemann

$$X^+(t) = \frac{1}{\lambda + A(t)} X^-(t) + \frac{F(t)}{\lambda + A(t)} \quad (|t| = 1). \qquad (1.17)$$

Los análogos discretos de ecuaciones integrales de tipo de convolución con dos núcleos $\lambda x_n + a * x - b * x = f_n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ y de ecuaciones pareadas $\lambda_1 x_n + a * x = f_n$, $n \geqslant 0$, $\lambda_2 x_n + b * x = f_n$, $n < 0$, también se reducen con facilidad a los problemas de contorno de Riemann. Véanse los detalles en [3] de V. S. Rogozhin.

2. DOS PROBLEMAS DE LA TEORIA DE LAS COLAS

Algunos conocimientos de la teoría de las probabilidades

1. Sea ξ una magnitud aleatoria y sea x cierto valor numérico de ξ. La probabilidad P de que ξ adquiera un valor inferior a x se denomina *función de distribución de las probabilidades* de la magnitud aleatoria ξ. Simbólicamente:

$$F(x) = \mathrm{P}\{\xi < x\}, \qquad (2.1)$$

La función $p(x)$, ligada con $F(x)$ por medio de la igualdad $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt$, lleva el nombre de *densidad de distribución de probabilidades* de la magnitud aleatoria ξ. Si $F(x)$ es derivable (lo que se sobreentiende en lo sucesivo), entonces,

$$p(x) = F'(x). \tag{2.2}$$

Por definición, la probabilidad P puede tomar sólo los valores $0 \leqslant P \leqslant 1$. Por consiguiente, la función de distribución $F(x)$ es no negativa, acotada y, de acuerdo con (2.1), no decreciente. La densidad $p(x)$ es no negativa.

2. La densidad de distribución de la suma $\xi_1 + \xi_2$ de dos magnitudes aleatorias independientes es igual (en el caso de distribución continua) a la convolución de las densidades

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p^{(1)}(x-t)\,p^{(2)}(t)\,dt, \tag{2.3}$$

y en el caso de distribución discreta es igual a la convolución discreta

$$p_n = \sum_{k=1}^{\infty} p_{n-k}^{(1)} p_k^{(2)} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{2.4}$$

Si las densidades tienen en ciertos puntos discontinuidades de primera especie, en la fórmula (2.3) aparecen, además del término integral, unos sumandos discretos correspondientes a las discontinuidades de la densidad.

3. En la práctica nos enfrentamos frecuentemente con magnitudes aleatorias capaces de tomar solamente valores no negativos. Entonces, $F(x) = p(x) \equiv 0$, cuando $x < 0$. Por consiguiente, en este caso *la función de distribución y la densidad de distribución son funciones unilaterales derechas y sus transformaciones de Fourier (funciones características) son valores de contorno de las funciones analíticas en el semiplano superior.* El origen de coordenadas en este caso sirve, como regla, de punto de discontinuidad y (a la condición de que no haya otras discontinuidades) la fórmula (2.3) toma la forma

$$p(x) = \int_{0}^{\infty} p^{(1)}(x-t)\,p^{(2)}(t)\,dt + p^{(2)}(0)\,p^{(1)}(x). \tag{2.5}$$

Tiempo medio del comienzo del servicio

Los razonamientos probabilísticos, a base de los cuales se obtiene las ecuaciones a seguir, se exponen detalladamente en la obra [4], § 62. Aquí nos limitemos a un breve esquema.

En los momentos de tiempo t_r $(r = 1, 2, \ldots)$ llegan las exigencias para el servicio. Introduzcamos las siguientes denotaciones: $\nu_r = t_{r+1} - t_r$ es el intervalo de tiempo entre dos exigencias; γ_r es la duración del servicio de r-ésimo cliente; w_r es la duración de esperanza del servicio.

De unos razonamientos sencillos se deduce la correlación

$$w_{r+1} = \begin{cases} w_r + u_r, & w_r + u_r > 0, \\ 0, & w_r + u_r \leqslant 0, \end{cases} \tag{2.6}$$

$$u_r = \gamma_r - \nu_r. \tag{2.7}$$

Sean k_r, φ_r las densidades de distribución de las magnitudes u_r, w_r, respectivamente. Es evidente que, para $x < 0$, $\varphi_r = 0$. Consideramos que cuando $r \to \infty$, k_r, φ_r tienen límites determinados $k(x)$, $\varphi(x)$. Pasando al límite para $r \to \infty$, de las igualdades (2.6) y (2.5) obtenemos la ecuación integral de Wiener—Hopf

$$\varphi(x) - \int_0^\infty k(x-t)\,\varphi(t)\,dt = \varphi(0)\,k(x),\ x > 0, \tag{2.8}$$

la cual sirve para hallar $\varphi(x)$. Resolvámosla siguiendo el método del p. 1 en la pág. 643. Sustituimos $\varphi(x)$ por $\varphi_+(x)$, definimos adicionalmente la ecuación en el semieje negativo introduciendo en el segundo miembro la función unilateral izquierda arbitraria $\varphi_-(x)$ y realizamos en ambos miembros de la igualdad la transformación de Fourier. Obtenemos un problema de contorno de Riemann con relación a $\Phi^{\pm}(z)$:

$$\Phi^+(x)\,[1 - K^+(x)] = \varphi(0)\,K^+(x) + \Phi^-(x) \tag{2.9}$$

en la clase de funciones que desaparecen en el infinito.

Al pasar a la investigación del problema de contorno obtenido advertimos que por ser u_r, de acuerdo con (2.7), una suma algebraica de dos magnitudes aleatorias γ_r, $-\nu_r$, su densidad de distribución $k(x)$, será convolución de sus densidades respectivas $h(x)$, $f(-x)$:

$$k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\,h(t)\,dt.$$

En calidad de $f(x)$ podemos tomar la ley de distribución exponencial que es la más usada: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$; $f(x) = 0$, $x < 0$. Entonces

$$F^+(x) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{ixt}\,dt = \frac{\lambda}{\lambda - ix},$$

$$K^+(x) = F(-x)\,H(x) = \frac{\lambda}{-x + i\lambda}\,H(x)$$

y la condición de contorno adquiere la forma

$$\Phi^+(x)\,[x - \lambda i + \lambda i H^+(x)] = \\ = (x - \lambda i)\,\Phi^-(x) - \varphi(0)\,\lambda i H^+(x)\ \ (-\infty < x < \infty). \tag{2.10}$$

Puesto que el coeficiente y el término independiente de la condición de contorno son analíticamente prolongables en el plano complejo, resolveremos el problema por el procedimiento de prolongación analítica (véase el p. 14.6), sin utilizar las fórmulas generales. Sin indicar el valor exacto de $H^+(z)$, hagamos uso de sus dos propiedades obvias

$$H^+(\lambda i) = \int_0^\infty h(t)\,e^{-\lambda t}\,dt \neq 0, \qquad H^+(0) = \int_0^\infty h(t)\,dt = 1.$$

De aquí se desprende que $[x - \lambda i + \lambda i H^+(x)]_{x=} = 0$ (es fácil mostrar que no hay otros ceros en el eje) y, dado que $[z - \lambda i]_{z=\lambda i} = 0$, entonces el coeficiente del problema de Riemann (2.10) tiene índice unidad y un polo en el contorno de

integración en el origen de coordenadas. Por consiguiente, aquí se trata de un caso excepcional. Según el teorema de Liouville

$$[x-\lambda i+\lambda i H^+(x)]\,\Phi^+(x)+\lambda i\varphi(0)\,H^+(x)=(x-\lambda i)\,\Phi^-(x)=C,$$

$$\Phi^+(z)=\frac{c-\lambda i\varphi(0)\,H^+(z)}{z-\lambda i+\lambda i H^+(z)}\,.$$

Al determinar la constante arbitraria C de la condición de que la solución está acotada en el origen de coordenadas, obtendremos $C = \varphi(0)\,\lambda i$ y

$$\Phi(z)=\frac{\lambda\varphi(0)\,[1-H^+(z)]}{z-\lambda\,[1-H^+(z)]}\,. \qquad (2.11)$$

La constante $\varphi(0)$ puede determinarse de la igualdad $\Phi(0)=\int_0^\infty \varphi(t)\,dt=$ $= 1-\varphi(0)$. La fórmula (2.11) permite calcular el tiempo medio de esperanza buscado, como también otras magnitudes probabilísticas que representan interés (esperanza matemática, varianza, etc.).

Probabilidad de presencia en el sistema de servicio de n exigencias

Supongamos que $P_n(t)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ implican en el momento de tiempo t las probabilidades buscadas. Para hallarlas se compone el siguiente sistema infinito de ecuaciones diferenciales lineales:

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t),$$
$$P_n'(t) = -(\lambda+\mu)\,P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t) \quad (n = 1, 2, \ldots), \qquad (2.12)$$

donde λ, μ son unos coeficientes constantes.

Este sistema surge no sólo al resolverse el problema planteado, sino que sirve de modelo matemático para una clase extensa de problemas conocidos como procesos de reproducción y perecimiento. Su deducción detallada se tiene, por ejemplo, en el libro [5] (cap. 4), como así también en el manual [4] ya citado (§§ 51, 61). Sin detenernos en este problema, pasemos a la resolución del sistema.

Admitamos que en el momento inicial en el sistema se espera el servicio de l exigencias, es decir,

$$P_n(0)=\begin{cases}0, & n\neq l,\\ 1, & n=l;\end{cases}$$

en la resolución del sistema (2.12) las últimas igualdades servirán de condiciones iniciales. Representando los segundos miembros de las ecuaciones en forma de la convulución discreta, escribamos el sistema como sigue

$$P_n'(t)=\sum_{k=0}^{\infty} a_{n-k}P_n(t)+\mu\delta_n P_0(t)\ (n=0, 1, 2, \ldots), \qquad (2.13)$$

donde $a_0 = -(\lambda+\mu)$, $a_1 = \lambda$, $a_{-1} = \mu$, $a_k = 0$, $k \neq 0, \pm 1$, $\delta_n = 1$ para $n = 0$, y $\delta_n = 0$ para $n \neq 0$.

Con el objeto de resolver el sistema hagamos uso de los procedimientos de resolución de las ecuaciones discretas de una convolución (pág. 645). Definimos adicionalmente las igualdades (2.13) para los valores negativos del índice n, añadiendo al segundo miembro una sucesión arbitraria $Q_{\bar{n}}$ $(n = -1, -2, \ldots)$, a continuación multiplicamos todas las ecuaciones por las potencias correspon-

dientes de z y sumamos según todos los $n = 0, \pm 1, \ldots$ (transformación de Laurent) Realizadas unas transformaciones bastante simples, se obtiene la igualdad

$$\frac{\partial P^+(z,t)}{\partial t} - \left[\frac{\mu}{z} - (\lambda+\mu) + \lambda z\right] P^+(z,t) - \mu P_0(t) = Q^-(z,t), \qquad (2.14)$$

donde $P^+(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) z^n$ es una función generadora para la sucesión $P_n(t)$. Por razonamientos probabilísticas $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)$ está acotada, por lo cual $P(z,t)$ es analítica en el círculo unitario. La sucesión arbitraria $Q_n(t)$ se elige de tal manera que $Q^-(z,t) = \sum_{n=-1}^{-\infty} Q_n(t) z^n$ sea analítica fuera del círculo unitario.

La correlación (2.14) representa en la circunferencia unitaria un problema de contorno de tipo del problema de Riemann. Multiplicando (2.14) por z, y aplicando después el teorema de prolongación analítica y el de Liouville, obtendremos

$$z\frac{\partial P^+}{\partial t} - \left[\mu - (\lambda+\mu) z + \lambda z^2\right] P^+ - \mu z P_0 = C.$$

Al sustituir $z = 0$, encontramos que

$$C = -\mu P^+(0, t) = -\mu P_0(t).$$

Para hallar $P^+(z, t)$ nos resta resolver la ecuación diferencial lineal

$$z\frac{\partial P^+(z,t)}{\partial t} - \left[\mu - (\lambda+\mu) z + \lambda z^2\right] P^+(z,t) + \mu(1-z) P_0(t) = 0 \qquad (2.15)$$

para la condición inicial $P^+(z, 0) = z^l$. Las probabilidades buscadas $P_n(t)$ se encuentran como coeficientes de la serie de Taylor según las fórmulas $P_n(t) = \frac{1}{n!}\frac{\partial n}{\partial z^n} P(z,t)|_{z=0}$. La resolución real de la ecuación (2.15) no constituye el objeto de nuestra consideración.

Observaciones finales

Los problemas examinados para los cuales son características la presencia de un canal de servicio l iguales a las posibilidades de los clientes, pertenecen al número de los más simples. La clase más compleja de problemas, pese a que tiene un canal de servicio, pero se da preferencia a ciertas formas de exigencias («prioridad»), conduce al problema de contorno de Riemann para funciones también de una sola variable, pero dependientes de una serie de parámetros. El servicio de varios canales, siendo presentes diferentes exigencias, lleva a los problemas de contorno para funciones de varias variables.

LITERATURA

1. Черский Ю. И., О некоторых особых интегральных уравнениях, Уч. Зап. Казанск. ун-та 113, № 10 (1953), 43—55 (Cherski Yu. I., Acerca de algunas ecuaciones integrales singulares).

2. Гахов Ф. Д. и Черский Ю. Ю., Особые интегральные уравнения типа свертки, Изв. АН СССР, сер. матем. 20, 1956, pág. 33—52 (Gájov F. D. y Cherski Yu. I., Ecuaciones integrales singulares de tipo de convolución).

3. Рогожин В. С., Один класс бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, Докл. АН СССР 114, № 3 (1957), págs. 486—489 (Rogozhin V. S., Acerca de una clase de sistemas infinitos de ecuaciones algebraicas lineales).

4. Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, «Наука», 1969 (Gnedenko B. V., Curso de la teoría de probabilidades).

5. Saaty T. L., Elements of queneing theory with applications, McGraw-Hill Book Company, Inc. New York Toronto London, 1961.

6. Боровков А. А., Теория вероятностей, «Наука», 1976 (Borovkov A. A., Teoría de probabilidades).

BIBLIOGRAFIA [1]

A. MANUALES, MONOGRAFIAS Y OBRAS DE CARACTER INFORMATIVO

1. Векуа И. Н., Новые методы решения эллиптических уравнений, Гостехиздат, 1948 (Vekua I. N., Nuevos métodos para resolver las ecuaciones elípticas).
2. Векуа И. Н., Обобщенные аналитические функции, Физматгиз, 1959 (Vekua I. N., Funciones analíticas generalizadas).
3. Векуа Н. П., Системы сингулярных интегральных уравнений, «Наука», 1970 (Vekua N. P., Sistemas de ecuaciones integrales singulares).
4. Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, М., Физматгиз, 1964 (Vladímirov V. S., Métodos de la teoría de funciones de muchas variables complejas).
5. Гахов Ф. Д., Линейные краевые задачи теории функций комплексной переменной, Изв. Казанск. физ.-матем. об-ва X, сер. 3, 1938, 39—79 (Gájov F. D., Problemas de contorno lineales de la teoría de funciones de la variable compleja).
6. Гахов Ф. Д., Краевые задачи аналитических функций и сингулярные интегральные уравнения, Изв Казанск. физ.-матем. об-ва XIV, сер 3, 1949, 75—160 (Gájov F. D., Problemas de contorno de funciones analíticas y ecuaciones integrales singulares).
7. Гахов Ф. Д., Краевая задача Римана для системы n пар функций, УМН VII, вып. 4 (50), 1952, 3—54 (Gájov F. D., Problema de contorno de Riemann para el sistema de n pares de funciones).
8. Годунов С. К., Уравнения математической физики, «Наука», 1971 (Godunov S. K., Ecuaciones de la física matemática).
9. Зверович Э. И., Литвинчук Г. С., Краевые задачи со сдвигом для аналитических функций и сингулярные функциональные уравнения, УМН 23, вып. 3, 1968, 67—121 (Zverovich E. I., Litvinchuk G. S., Problemas de contorno con traslación para las funciones analíticas y ecuaciones funcionales singulares).
10. Hilbert D., Grundzuge der Integralgleichungen, Leipzig — Berlin, 2-te Aufl., 1924, Drittes Abschnitt.
11. Иванов В. В., Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений, «Наукова думка», Киев, 1968 (Ivanov V. V., Teoría de los métodos aproximados y su aplicación a la resolución numérica de ecuaciones integrales singulares).
12. Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., Методы теории функций комплекс-

[1])En el texto las obras del apartado A de la bibliografía se dan entre corchetes, del apartado B con un asterisco y del apartado C con dos asteriscos.

ного переменного, «Наука», 1973 (Lavrentiev M. A. y Shabat B. V., Métodos de la teoría de funciones de la variable compleja).
13. Левин Б. Я., Распределение корней целых функций, Гостехиздат, 1956 (Levin B. Ya., Distribución de las raíces de funciones enteras).
14. Михаїлов Л. Г., Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами, Тр. АН Тадж. ССР, т. I, Душанбе, 1963 (Mijailov L. G., Nueva clase de las ecuaciones integrales singulares y sus aplicaciones a las ecuaciones diferenciales con coeficientes singulares).
15. Михлин С. Г., Сингулярные интегральные уравнения, УМН III, вып. 3 (25), 1948, 29—112 (Mijlin S. G., Ecuaciones integrales singulares).
16. Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, «Наука», 1968 (Musjelishvili N. I., Ecuaciones integrales singulares).
17. Мусхелишвили Н. И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, «Наука», 1966 (Musjelishvili N. I., Algunos problemas fundamentale de la teoría matematica de elasticidad).
18. Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, Гостехиздат, 1950 (Privalov I. I., Propiedades de frontera de las funciones analíticas).
19. Picard E., Leçons sur quelques types simples d'equations aux dérivées partielles, Paris, 1927.
20. Poincaré A., Leçons de Mecanique Celeste, t. III, Ch. X.
21. Riemann B., Gesammelte mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass. Leipzig, Teubner, 1876.
22. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III, ч. II, «Наука», 1969; т. IV, Физматгиз, М., 1958 (Smirnov V. I., Curso de las Matemáticas superiores).
23. Смирнов М. М., Уравнения смешанного типа, «Наука», 1970 (Smirnov M. M., Ecuaciones de tipo mixto).
24. Сохоцкий Ю. В., Об определенных интегралах и функциях, употребляемых при разложении в ряды, С.-Перербург, 1873 (Sojotski Yu. V., Acerca de ciertas integrales y funciones que se emplean durante el desarrollo en series).
25. Springer G., Introduction to Riemann Serfaces. Addison-Wesley Publishing Company. Inc. Reading, Massachusetts, USA, 1957.
26. Tricomi F., Sullc equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordinc di tipo misto. Memorie della R. Accademia Nazionale dei Lincci, serie V, vol. XIV, fasc. VII, 1923.
27. Тумашев Г. Г. и Нужин М. Т., Обратные краевые задачи и их приложения, Изд-во Казанск. ун-та, 1965 (Tumashev G. G. y Nuzhin M. T., Problemas de contorno inversos y sus aplicaciones).
28. Ford P., Funciones automorfas, 1936.
29. Халилов З. И., Линейные уравнения в линейных пространствах, изд. АН Азерб. ССР, Баку, 1949 (Jalilov Z. I., Ecuaciones lineales en los espacios lineales).
30. Хведелидзе Б. В., Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения, Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР XIII, 1956, 3—158 (Jvedelidze B. V., Problemas de frontera discontinuos lineales de la teoría de funciones, ecuaciones integrales singulares y algunos de sus aplicaciones).

B. TRABAJOS ORIGINALES

Абдуллаев Р. Н. 1) Об условии разрешимости однородной задачи Римана на замкнутых римановых поверхностях, ДАН СССР 152, № 6, 1963, 1279—1281 (Abduláiev R. N., Acerca de la condición de la solubilidad del problema homogeneo de Riemann sobre las superficies cerradas de Riemann).
2) К условиям разрешимости однородной задачи Римана на замкнутых

римановых поверхностях, Сообщ. АН Груз. ССР 35, № 3, 1964, 519—522 (Acerca de las condiciones de la solubilidad del problema homogéneo de Riemann sobre las superficies cerradas de Riemann).

3) Однородная задача Римана на замкнутых римановых поверхностях, ДАН СССР 160, № 5, 1965, 983—985 (Problema homogéneo de Riemann sobre las superficies cerradas de Riemann).

Авхадиев Ф. Г., Гайдук В. Н. 1) Применение почти выпуклых функций к обратным краевым задачам, Изв. вузов, Математика, № 6, 1968, 3—10 (Avjadiev F. G., Gaiduk V. N., Aplicación de las funciones casi convexas a los problemas de contorno inversos).

Аксентьев Л. А. 1) Достаточные условия однолистности трех обратных краевых задач, Уч. зап. Казанск. ун-та 117, № 2, 1957, 32—35 (Aksentiev L. A., Condiciones suficientes de univalencia para tres problemas de contorno inversos).

2) Об условиях разрешимости и условиях однолистности, Тр. семинара по обратным краевым задачам, Изд-во Казанск. ун-та, вып. 2, 1964, 12—20 (Acerca de las condiciones de la solubilidad y las condiciones de la univalencia).

3) Построение оператора Шварца методом симметрии, Тр. семинара по обратным краевым задачам, Изд-во Казанск. ун-та, вып. 2, 1964, 3—11 (Construcción del operador de Schwarz mediante el método de la simetría).

4) Построение оператора Шварца методом симметрии, Тр. семинара по краевым задачам, Изд-во Казанск. ун-та, вып. 3, 1966, 11—22 (Construcción del operador de Schwarz mediante el método de la simetría).

5) Построение оператора Шварца методом симметрии, Тр. семинара по краевым задачам, Изд-во Казанск. ун-та, вып. 4, 1967, 3—10 (Construcción del operador de Schwarz mediante el método de la simetría).

Аксентьев Л. А., Авхадиев Ф. Г. 1) Об одном классе однолистных функций, Изв. вузов, Математика, № 10, 1970, 12—20 (Axentiev L. A., Avjadiev F. G., Acerca de una clase de las funciones univalentes).

Алексеев А. Д. 1) Об особом интегральном уравнении на контуре из класса R ДАН СССР 136, № 3, 1961, 525—528 (Alexéiev A. D., Acerca de la ecuación integral singular sobre el contorno de la clase R).

2) Особое интегральное уравнение на контуре из класса R, Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР 27, 1960, 275—291 (Ecuación integral singular sobre el contorno de la clase R).

Андрианов С. Н. 1) О существовании и числе решений обратной краевой задачи теории аналитических функций, Уч. зап. Казанск. ун-та 113, № 10, 1953, 21—30 (Andrianov S. N., Acerca de la existencia y el número de las soluciones del problema de contorno inverso de la teoría de funciones analíticas).

Антоневич А. Б. 1) Об индексе псевдодифференциального оператора с конечной группой сдвигов, ДАН СССР 190, № 4, 1970, 751—752 (Antonevich A. B., Acerca del índice del operador seudodiferencial con el grupo finito de traslaciones).

2) Эллиптические псевдодифференциальные операторы с конечной группой сдвигов, Изв. АН СССР, сер. матем. 37, № 3, 1973, 663—675 (Operadores seudodiferenciales elípticos con el grupo finito de traslaciones).

Аржанов Г. В. 1) О нелинейной краевой задаче типа задачи Римана, ДАН СССР 132, № 6, 1960, 1227—1230 (Arzhanov G. V., Acerca del problema de contorno no lineal de tipo del problema de Riemann).

2) О неленейной краевой задаче типа задачи Римана, Спб. мат. ж. 2, № 4, 1961, 481—504 (Acerca del problema—de contorno no lineal de tipo del problema de Riemann).

Арутюнян Н. Х. 1) Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала, Изв. АН Арм. ССР XII, № 2, 1959, 77—105 (Arutiunian N. J., Problema de contacto plano de la teoría de plasticidad con endurecimiento gradual del material).

Арутюнян Н. Х., Манукян М. М. 1) Контактная задача теории ползучести с учетом сил трения, ПММ 27, в. 5, 1963, 813—820 (Arutiunian N. J., Manukian M. M., Problema de contacto de la teoría de escurrimiento con consideración de las fuerzas de rozamiento).

Аткинсон Ф. В. 1) Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах, Матем. сб. 28 (70), № 1, 1951, 3—14 (Atkinson F. V., So ubilidad normal de las ecuaciones lineales en los espacios normalizados).

Ахиезер Н. И. 1) О некоторых формулах обращения сингулярных интегралов, Изв. АН СССР, сер. матем. 9, 1945, 275—290 (Ajiezer N. I., Acerca de algunas fórmulas de inversión de las integrales singulares).

Ахиезер Н. И., Щербина В. А. 1) об обращении некоторых сингулярных интегралов, Уч. зап. Харьковск. ун-та XXV, сер. 4, 1957, 191—198 (Ajiezer N. I., Scherbina V. A., Acerca de la inversión de algunas integrales singulares).

Бабкин Б. Н. 1) Об одном условии существования решения интегрального уравнения первого рода, Уч. зап. Пермск. ун-та 131, 1966, 126—129 (Babkin B. N., Acerca de una condición de la existencia de la resolución de la ecuación integral de primer género).

Бархин Г. С., Усманов З. Д. 1) Задача Гильберта для кусочнорегулярной обобщенной аналитической функции, Сб. «Исслед. по краевым задачам теории функций и диф. уравнений», Душанбе, 1964, 113—132 (Barjin G. S., Usmanov Z. D., Problema de Hilbert para la función analítica generalizada regular a trozos).

Батырев А. В. 1) Приближенное решение задачи Римана — Привалова, УМН 11, вып. 5, 1956, 71—76 (Batirev A. V., Resolución aproximada del problema de Riemann — Privalov).

Башкарёв П. Г., Нечаев А. П. 1) К теории краевых зачач со сдвигами, Докл. АН УССР А, № 2, 1973, 99—102 (Bashkarev P. G., Nechaev A. P., Acerca de la teoría de problemas con traslaciones de contorno).

Беркович Ф. Д. 1) Интегральные уравнения типа свертки с бесконечным числом решений, Сб. «Матем. анализ и его приложения» изд-во Ростовск. ун-та, 1969, 27—33 (Berkovich F. D., Ecuaciones integrales de tipo de convolución con número infinito de soluciones).

2) О приложении краевых задач с бесконечным индексом к исследованию интегральных уравнений, Материалы Всес. конфер. по краевым задачам, Изд-во Казанск. ун-та 1970, 49—54 (Acerca de la aplicación de problemas de contorno con índice infinito a la investigación de ecuaciones integrales).

Беркович Ф. Д., Говоров Н. В. 1) О краевой зачаче Карлемана с бесконечным индексом, Сиб. матем. ж. 12, № 5, 1971, 1001—1014 (Berkovich F. D., Góvorov N. V., Acerca del problema de Carleman con índice infinito).

Беркович Ф. Д., Конышкова Е. М. 1) Об одном случае краевой задачи Римана с бесконечным индексом, Сообщ. Рост. научн. матем. об-ва, Ростов-на-Дону, 1968, 158—164 (Berkovich F. D., Konishkova E. M., Acerca de un caso del problema de Riemann con índice infinito).

Бицадзе А. В. 1) К проблеме уравнений смешанного типа, Тр. матем. ин-та АН СССР 61, 1953, 1—60 (Bitsadze A. V., Acerca del problema de ecuaciones de tipo mixto).

Бородин М. А. 1) Краевые задачи для голоморфных функций в пространстве одного и нескольких комплексных переменных, Кандидатская диссертация, Донецк, 1969 (Borodín M. A., Problemas de contorno para las funciones holomorfas en el espacio de una y varias variables complejas).

Боярский Б. В. 1) Об обобщенной граничной задаче Гильберта, Сообщ. АН Груз. ССР 25, № 4, 1960, 385—390 (Boyarski B. V., Acerca del problema de frontera generalizada de Hilbert).

Василевский Н. Л. 1) Об условиях нётеровости и формула для индекса одного класса интегральных операторов типа потенциала, ДАН СССР

202, № 4, 1972, 747—750 (Vasilevski N. L., Acerca de las condiciones de la propiedad noetheriana y la fórmula para el índice de una clase de los operadores integrales de tipo de potencial).

Векуа И. Н. 1) О сингулярных линейных интегральных уравнениях, ДАН СССР 26, № 8, 1940, 335—338 (Vekua I. N., Acerca de las ecuaciones integrales lineales singulares).

2) Интегральные уравнения с особым ядром типа Коши, Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР X, 1941, 45—72 (Ecuaciones integrales con el núcleo singular de tipo de Cauchy).

3) К теории сингулярных интегральных уравнений, Сообщ. АН Груз. ССР III, № 9, 1942, 869—876 (Acerca de las ecuaciones integrales singulares).

4) Об одной линейной граничной задаче Римана, Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР XI, 1942, 109—139 (Acerca de un problema de frontera lineal de Riemann).

5) О некоторых свойствах решений систем уравнений эллиптического типа, ДАН СССР 98, № 2, 1954, 181—184 (Acerca de algunas propiedades de soluciones de sistemas de ecuaciones de tipo elíptico).

Векуа Н. П. 1) Об одной обобщенной граничной задаче Карлемана для нескольких неизвестных функций, Изв. АН СССР, сер. матем. 20, № 3, 1956, 377—384 (Vekua N. P., Acerca de un problema de frontera generalizado de Carleman para varias funciones incógnitas).

Владимиров В. С. 1) Задача линейного сопряжения для голоморфных функций, Изв. АН СССР, сер. матем. 29, № 4, 1965, 807—834 (Vladimirov V. S., Problemas de conjugación lineal para las funciones holomorfas).

2) Теорема об «острие клина» Боголюбова, ее развитие и применение, Сб. «Проблемы теоретической физики», посв. Боголюбову в связи с его шестидесятилетием, «Наука», 1969, 61—67 (Teorema referente a la «punta de la cuna» de Bogloiubov, su desarrollo y aplicación).

Гагуа М. Б. 1) О некотором применении кратных интегралов типа Коши, Сб. «Исследования по совр. пробл. теории функц. компл. переменного», Физматгиз, 1960, 345—352 (Gagua M. B., Acerca de una aplicación de las integrales múltiples de tipo de Cauchy).

Гайдук В. Н. 1) Об однолистности решений обратных краевых задач, Тр. семин. по краев. задачам, Изд-во Казанск. ун-та, вып. 9, 1972, 39—48 (Gaiduk V. N., Acerca de la univalencia de las soluciones de problemas de contorno inversos).

Ганин М. П. 1) Краевые задачи теории полигармонических функций, Уч. зап. Казанск. ун-та 111, № 10, 1951, 9—13 (Ganin M. P., Problemas de contorno de las funciones poliarmónicas).

2) Краевые задачи для полианалитических функций, ДАН СССР 80, № 3, 1951, 313—316 (Problemas de contorno para las funciones poliarmónicas).

3) Эквивалентно-регуляризующий оператор для системы сингулярных интегральных уравнений, ДАН СССР 79, № 3 1951, 385—387 (Operador regularizador equivalente para el sistema de las ecuaciones integrales singulares).

4) Об одной общей краевой задаче для аналитических функций, ДАН СССР 79, № 6, 1951, 921—924 (Acerca de un problema de contorno general para funciones analíticas).

5) Об одной общей краевой задаче для аналитических функций, Диссертация, Казань, 1952 (Acerca de un problema de contorno general para las funciones analíticas).

Гахов Ф. Д. 1) О краевой задаче Римана, Матем. сб. 2 (44), № 4, 1937, 673—683 (Gájov F. D., Acerca del problema de contorno Riemann).

2) Краевые задачи теории аналитических функций и сингулярные интегральные уравнения, Докторская диссертация, Тбилиси, 1941 (Problemas de contorno de la teoría de funciones analíticas y las ecuaciones integrales singulares).

3) Об обратных краевых задачах, ДАН СССР 86 № 4, 1952, 649—652 (Acerca de los problemas de contorno inversos).

4) Об обратных краевых задачах, Уч. зап. Казанск. ун-та 133, № 10, 9—20 (Acerca de los problemas de contorno inversos).

5) Об обратной краевой задаче для многосвязной области, Уч. зап. Ростовск. пед. ин-та 3, 1955, 19—27 (Acerca del problema de contorno inverso para el dominio múltiplemente conexo).

6) О новых типах интегральных уравнений, разрешимых в замкнутой форме, Сб. «Проблемы механ. сплошн. среды», изд-во АН СССР, 1961, 102—114 (Acerca de nuevos tipos de las ecuaciones integrales resolubles en forma cerrada).

7) О нелинейной краевой задаче, обобщающей краевую задачу Римана, ДАН СССР 181, № 2, 1968, 271—274 (Acerca del problema de contorno no lineal que generaliza el problema de contorno de Riemann).

8) О нелинейной краевой задаче типа задачи Римана в многосвязной области, Rev. roum. math. pures et appl. XIII, N 9, 1968, 1319—1326 (Acerca del problema de contorno no lineal de tipo del problema de Riemann en el dominio múltiplemente conexo).

9) Вырожденные случаи особых интегральных уравнений с ядром Коши, Дифференц. ур-ния 2, № 4, 1966, 533—543 (Casos degenerados de las ecuaciones integrales singulares con núcleo de Cauchy).

10) О нелинейной краевой задаче с допустимыми нулями на контуре, ДАН СССР 210, № 6 1973, 21—24 (Acerca del problema de contorno no lineal con ceros admisibles en el contorno).

Гахов Ф. Д., Зверович Э. И., Самко С. Г. 1) Приращение аргумента, логарифмический вычет и обобщенный принцип аргумента, ДАН СССР 215, № 3, 1974, 432—435 (Gájov F. D., Zverovich E. I., Samko S. G., Incremento de argumento, residuo logarítmico y principio generalizado del argumento).

Гахов Ф. Д., Какичев В. А., 1) Случаи вырождения двумерных сингулярных —интегральных уравнений с ядрами Коши и постоянным коэффициентами, Сб. «Функцион. анализ и теория функций», вып. 4, изд-во Казанск. ун-та, 1967, 91—96 (Gájov F. D., Kakichev V. A., Casos de la degeneración de las ecuaciones integrales singulares bidimensionales con núcleos de Cauchy y coeficientes constantes).

Гахов Ф. Д., Крикунов Ю. М. 1) Топологические методы комплексного переменного и их приложения к обратным краевым задачам, Изв. АН СССР, сер. матем. 20, 1956, 206—240 (Gájov F. D., Krikunov Yu. M., Métodos topológicos de la variable compleja y sus aplicaciones a los problemas de contorno inversos).

Гахов Ф. Д., Мельник И. М. 1) Особые точки контура в обратной краевой задаче теории аналитических функций, Укр. матем. ж. 11, № 1, 1959, 25—37 (Gájov F. D., Melnik I. M., Puntos singulares del contorno en el problema de contorno inverso de la teoría de funciones analíticas).

Гахов Ф. Д., Хасабов Э. Г. 1) О краевой задаче Гильберта для многосвязной области, Изв. вузов, Математика, т. 2, № 1, 1958, 12—21 (Gájov F. D., Jasabov E. G., Acerca del problema de contorno de Hilbert para el dominio múltiplemente conexo).

Гахов Ф. Д., Чибрикова Л. И. 1) О некоторых типах сингулярных интегральных уравнений, разрешаемых в замкнутой форме, Матем. сб. 35, № 3, 1954, 395—436 (Gájov F. D., Chibrikova L. I., Acerca de algunos tipos de las ecuaciones integrales singulares resolubles en forma cerrada).

2) О краевой задаче Римана для случая пересекающихся контуров, Уч. зап. Казанск. ун-та 113, № 10, 1953, 107—110 (Acerca del problema de contorno de Riemann para el caso de los contornos que se intersecan).

Говоров Н. В. 1) О краевой задаче Римана с бесконечным индексом,

ДАН СССР 154, № 6, 1964, 1247—1249 (Govorov N. V., Acerca del problema de contorno de Riemann con índice infinito).

2) Об ограниченных решениях краевой задачи Римана с бесконечным индексом степенного порядка, ДАН СССР 182, № 4, 1968, 750—753 (Acerca de las soluciones acotadas del problema de contorno de Riemann con índice infinito de orden potencial).

3) Об ограниченных решениях однородной краевой задачи Римана с бесконечным индексом степенного порядка, Сб. «Теория функц., функц. анализ и их приложения», Изд-во Харьк. ун-та, вып. 11, 1970, 3—34 (Acerca de las soluciones acotadas del problema de contorno homogeneo de Riemann con índice infinito de orden potencial).

4) Об условиях неразрешимости однородной краевой задачи Римана с отрицательным индексом ее коэффициента, Уч. зап. Каб.-Балк. ун-та 19, 1963, 137—141 (Acerca de las condiciones de insolubilidad del problema de contorno homogeneo de Riemann con índice negativo de su coeficiente).

5) Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом, ДАН СССР 159, 1965, 961—964 (Problema de contorno no homogeneo de Riemann con índice infinito).

6) Краевая задача Римана с бесконечным индексом, Докторская диссертация, Харьков, 1968 (Problema de contorno de Riemann con índice infinito).

Гохберг И. Ц. 1) Задача факторизации в нормированных кольцах, функции от изометрических и симметрических операторов и сингулярные интегральные уравнения, УМН XIX, вып. 1, 1964, 71—124 (Gojberg I. Ts., Problema de factorización en los anillos normalizados, las funciones de los operadores isométricos y simétricos y las ecuaciones integralres singulares).

Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я. 1) О спектре сингулярных интегральных операторов в пространстве L_p, Studia Mathematica 31, 1968, 347—362 (Gojberg I. Ts., Krupnik N. Ya., Acerca del espectro de los operadores integrales singulares en el espacio L_p).

2) Сингулярные интегральные операторы с кусочно-непрерывными коэффициентами и их символы, Изв. АН СССР, сер. матем. 35, № 4, 1971, 940—964 (Operadores integrales singulares con los coeficientes continuos a trozos y sus símbolos).

3) О сложных линейных сингулярных интегральных операторах, Матем. исследования 4, вып. 4, Кишинев, 1969, 20—32 (Acerca de los operadores integrales singulares lineales compuestos).

Данилюк И. И. 1) О задаче Гильберта с измеримыми коэффициентами, Сиб. матем. ж. 1, № 2, 1960, 171—197 (Acerca del problema de Hilbert con los coeficientes medibles).

2) К теории одномерных сингулярных уравнений, Сб. «Проблем. механ. сплошн. среды», Изд-во АН СССР, 1961, 135—144 (Acerca de la teoría de las ecuaciones singulares unidimensionales).

Джваршейшвили А. Г. 1) О кратных интегралах типа Коши, Rev. Roum. math. pures et appl. 9, N 5, 1964, 409—424 (Dzhvarsheishvili A. G., Acerca de las integrales múltiples de tipo de Cauchy).

2) Об особом интеграле, Тр. Тбил. ун-та 84, 1962, 161—184 (Acerca de la integral singular).

3) Об интегралах типа Коши — Стилтьеса, Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР 34, 1968, 22—50 (Acerca de las integrales de tipo de Cauchy — Stieltjes).

Зверович Э. И. 1) Краевые задачи со сдвигом на абстрактных римановых поверхностях, ДАН СССР 157, № 1, 1964, 26—29 (Zverovich E. I., Problemas de contorno con traslación sobre las superficies de Riemann abstractas).

2) Краевая задача типа задачи Карлемана для многосвязной области,

Матем. сб. 64 (106), № 4, 1964, 618—627 (Problema de contorno de tipo del problema de Carleman para el dominio múltiplemente conexo).

3) Краевые задачи со сдвигом на абстрактных римановых поверхностях, Сиб. матем. ж. VII, № 4, 1966, 804—819 (Problemas de contorno con traslación sobre las superficies de Riemann abstractas).

4) Построение в явном виде аналога ядра Коши на римановых поверхностях некоторых алгебраических функций, Матем. заметки 8, № 6, 1970 693—701 (Construcción del análogo de núcleo de Cauchy en forma explícita sobre las superficies de Riemann de algunas funciones algebraicas).

5) Теория двухэлементных краевых задач на римановых поверхностях и ее приложения, Докторская диссерт., Одесса, 1971 (Teoría de los problemas de contorno con dos elementos sobre las superficies de Riemann y sus aplicaciones).

6) Метод локально-конформного склеивания, ДАН СССР 205, № 4, 1972, 767—770 (Método de pegamiento conforme local).

Зверович Э. И., Литвинчук Г. С. 1) Односторонние краевые задачи теории аналитических функций, Изв. АН СССР, сер. матем. 28, № 5, 1964, 1003—1036 (Zverovich E. I., Litvinchuk G. S., Problemas de contorno unilaterales de la teoría de las funciones analíticas).

Зверович Э. И., Чернецкий В. А. 1) Краевая задача Карлемана на римановой поверхности с краем, Укр. матем. ж. 22, № 5, 1970, 591—599 (Zverovich E. I., Chernetski V. A., Problema de contorno de Carleman sobre la superficie de Riemann con margen).

Зерагия П. К. 1) Об интегрировании полигармонических уравнений, Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР VIII, 1940, 135—163 (Zeraguia P. K., Acerca de integración de las ecuaciones poliarmónicas).

Иванов В. В. 1) Приближенное решение особых интегральных уравнений, ДАН СССР 110, № 1, 1956, 15—18 (Ivanov V. V., Resolución aproximada de ecuaciones integrales singulares).

2) О применении метода моментов и смешанного метода к приближенному решению сингулярных интегральных уравнений, ДАН СССР 114, № 5, 1957, 945—948 (Acerca de la aplicación del método de momentos y del método mixto a la resolución aproximada de ecuaciones integrales singulares).

3) Некоторые свойства особых интегралов типа Коши и их приложения, ДАН СССР 121, № 5, 1958, 793—794 (Algunas propiedades de las integrales singulares de tipo de Cauchy y sus aplicaciones).

Исаханов Р. С. 1) Об одном классе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений, ДАН СССР 132, № 2, 1960, 264—267 (Isajanov R. S., Acerca de una clase de las ecuaciones integrales diferenciales singulares).

2) О некоторых граничных задачах линейного сопряжения, Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР 28, 1962, 73—84 (Acerca de algunos problemas de frontera de conjugación lineal).

Какичев В. А. 1) Граничные свойства интеграла типа Коши многих переменных, Уч. зап. Шахт. пед. ин-та 2, вып. 6, 1959, 25—90 (Kakichev V. A., Propiedades de frontera de la integral de tipo de Cauchy de muchas variables).

2) Преобразование Коши обобщенных функций, ДАН СССР 134, № 6, 1960, 1287—1290 (Transformación de Cauchy de funciones generalizadas).

3) Краевые задачи линейного сопряжения для функций, голоморфных в бицилиндрических областях, Сб. «Теория функций, функц. анализ и их приложения», вып. 5, Харьков, 1967, 37—58 (Problemas de contorno de conjugación lineal para las funciones holomorfas en los dominios bicilíndricos).

4) Методы решения краевых задач линейного сопряжения для функций, голоморфных в бицилиндрических областях, Сб. «Теория функций, функц. анализ и их приложения», вып. 14, Харьков, 1971, 3—15 (Métodos para re-

solver los problemas de contorno de conjugación lineal para las funciones holomorfas en los dominios bicilíndricos).

5) Мультипликативные краевые задачи для функций, голоморфных в бицилиндрических областях, Сб. «Теория функций, функц. анализ и их приложения», вып. 12, Харьков, 1970, 12—20 (Problemas de contorno multiplicativos para las funciones holomorfas en los dominios bicilíndricos).

6) О регуляризации сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши для бицилиндрических областей, Изв. вузов, Математика 7, (62), 1967, 54—64 (Acerca de la regularización de las ecuaciones integrales singulares con núcleos de Cauchy para los dominios bicilíndricos).

7) Вырожденные двумерные сингулярные интегральные уравнения с ядрами Коши для бицилиндрических областей I и II, Сб. «Теория функций, функцион. анализ и их приложения», вып. 7, Харьков, 1968, 13—19 и вып. 8, 1969, 25—28 (Ecuaciones integrales singulares bidimensionales degeneradas con núcleos de Cauchy para los dominios bicilíndricos).

8) Интеграл Шварца и формулы Гильберта для аналитических функций многих комплексных переменных, Изв. вузов, Математика 2, 1959, 80—93 (Integral de Schwarz y fórmulas de Hilbert para las funciones analíticas de muchas variables complejas).

9) Задача Гильберта для функций, голоморфных в бикруге, и некоторые ее приложения, Сб. «Теория функций, функцион. анализ и их приложения», вып. 18, Харьков, 1973, 3—18 (Problema de Hilbert para las funciones holomorfas en el bicírculo y algunas aplicaciones de él).

Карапетянц Н. К., Самко С. Г. 1) Об одном новом подходе к исследованию сингулярных интегральных уравнений со сдвигом, ДАН СССР 202, № 2, 1972, 273—276 (Karapetiants N. K., Samko S. G., Acerca de nuevo modo de investigar las ecuaciones integrales singulares con traslación).

2) Сингулярный интегральный оператор со сдвигом на разомкнутом контуре, ДАН СССР 204, № 3, 536—539 (Operador integral singular con traslación sobre el contorno abierto).

3) Сингулярные интегральные уравнения со сдвигом Карлемана в случае разрывных коэффициентов и исследование нетеровости одного класса линейных операторов с инволюцией, ДАН СССР 211, № 2, 1973, 281—284 (Ecuaciones integrales singulares con traslación de Carleman en el caso de coeficientes discontinuos e investigación de la propiedad noetheriana de una clase de operadores lineales con involución).

Карцивадзе И. Н., Хведелидзе Б. В. 1) Об одной формуле обращения, Сообщ. АН Груз. ССР X, № 10, 1949, 587—591 (Kartsivadze I. N., Jvedelidze B. V., Acerca de una fórmula de inversión).

2) Об интеграле типа Коши, Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР XX, 1954, 211—244 (Acerca de la integral de tipo de Cauchy, en georgiano con resumen detallado en ruso).

Квеселава Д. А. 1) Решение одной граничной задачи теории функций, ДАН СССР 53, № 8, 1946, 683—686 (Kveselava D. A., Resolución de un problema de frontera de la teoría de funciones).

2) Некоторые граничные задачи теории функций, Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР XVI, 1948, 39—80 (Acerca de algunos problemas de frontera de la teoría de funciones).

3) Граничная задача Гильберта и сингулярные интегральные уравнения в случае пересекающихся контуров, Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР XVII, 1949, 1—27 (Problema de frontera de Hilbert y ecuaciones integrales singulares en el caso de los contornos que se intersecan).

4) Задача Римана—Гильберта для многосвязной области, Сообщ. АН Груз. ССР VI, № 8, 1945, 581—590 (Problema de Riemann — Hilbert para el dominio múltiplemente conexo, en georgiano).

5) Сингулярные интегральные уравнения с разрывными коэффициентами, Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР XIII, 1944, 1—27 (Ecuaciones

integrales singulares con coeficientes discontinuos, en georgiano con resumen detallado en ruso).

Келдыш М. В. 1) Конформные отображения многосвязных областей на канонические области, УМН VI, 1939, 90—119 (Keldish M. V., Aplicaciones conformes de los dominios múltiplemente conexos sobre los dominios canónicos).

Келдыш М. В., Седов Л. И. 1) Эффективное решение некоторых краевых задач для гармонических функций, ДАН СССР 16, № 1, 1937, 7—10 (Keldish M. V., Sedov L. I., Resolución efectiva de algunos problemas de contorno para las funciones armónicas).

Комяк И. И. 1) Нелинейная краевая задача типа задачи Римана с положительными показателями, Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, № 6, 1970, 83—87 (Komiak I. I., Problema de contorno no lineal de tipo del problema de Riemann con índices positivos).

Конышкова Е. М. 1) О решении характеристического сингулярного интегрального уравнения с бесконечным индексом, Сообщ. АН Груз. ССР 65, № 3, 1972, 535—538 (Konishkova E. M., Acerca de la resolución de la ecuación integral singular característica con índice infinito).

Кордзадзе Р. А. 1) Об индексе сингулярных интегро-функциональных операторов, ДАН СССР 185, № 4, 1969, 753—756 (Kordzadze R. A., Acerca del índice de los operadores integrales funcionales).

Кравченко В. Г. 1) К теории Нетера функциональных уравнений с некарлемановскими сдвигом, ДАН СССР 201, № 6, 1971, 1275—1278 (Kravchenko V. G., Acerca de la teoría de Noether de ecuaciones funcionales con traslación no carlemaniana).

2) К теории Нетера интегро-функциональных уравнений со сдвигом, Укр. матем. ж. 24, № 6, 1972, 752—762 (Acerca de la teoría de Noether de ecuaciones integrales funcionales con traslación).

Красновидова И. С., Рогожин В. С. 1) Достаточные условия однолистности решения обратной краевой задачи, УМН VIII, вып. 1 (53), 1953, 151—153 (Krasnovidova I. S., Rogoshin V. S., Condiciones suficientes de univalencia para resolver el problema de contorno inverso).

Крейн М. Г. 1) Об одном методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода, ДАН СССР 100, № 3, 1955, 413—416 (Krein M. G., Acerca de un método para resolver ecuaciones integrales lineales de género primero y segundo).

Крикунов Ю. М. 1) О решении обобщенной краевой задачи Римана и линейного сингулярного интегро-дифференциального уравнения, Уч. зап. Казанск. ун-та 112, № 10, 1952, 191—199 (Krikunov Yu. M., Acerca de la resolución del problema de contorno generalizado de Riemann y de la ecuación diferencial integral singular lineal).

2) О решении обобщенной задачи Римана, ДАН СССР 85, № 2, 1952, 269—272 (Acerca de la resolución del problema generalizado de Riemann).

3) Обобщенная краевая задача Римана и линейное сингулярное интегро-функциональное уравнение, Уч. зап. Казанск. ун-та 116, № 4, 1956, 3—29 (Problema de contorno generalizado de Riemann y ecuación funcional integral singular lineal).

4) Дифференцирование особых интегралов с ядром Коши и одно граничное свойство голоморфных функций, Сб. «Краевые задачи теории функц. компл. перем.», изд-во Казанск. ун-та, 1962, 17—24 (Diferenciación de las integrales singulares con núcleo de Cauchy y una propiedad de frontera de las funciones holomorfas).

Кудряшов С. Н. 1) К теории однолистности решения внешней обратной краевой задачи, Тр. семин. по краев. задачам, изд-во Казанск. ун-та, вып. 7, 1970, 193—197 (Kudriashov S. N., Acerca de la teoría de univalencia de la resolución del problema de contorno inverso exterior).

Купрадзе В. Д. 1) Теория интегральных уравнений с интегралом в

смысле главного значения по Коши, Сообщ. АН Груз. ССР II, № 7, 1941, 587—596 (Kupradze V. D., Teoría de ecuaciones integrales con la integral en el sentido del valor principal según Cauchy).

2) О проблеме эквивалентности в теории особых интегральных уравнений, Сообщ. АН Груз. ССР II, № 9, 1941, 793—798 (Acerca del problema de la equivalencia en el teoría de las ecuaciones integrales singulares).

3) К теории интегральных уравнений с интегралом в смысле главного значения по Коши, Изв. АН СССР, сер. матем. 5, № 3, 1941, 255—262 (Acerca de la teoría de las ecuaciones integrales con la integral en el sentido del valor principal según Cauchy).

Литвинчук Г. С. 1) Теория Нетера системы сингулярных интегральных уравнений со сдвигом Карлемана и комплексно сопряженными неизвестными, Изв. АН СССР, сер. матем. 31, № 3, 1967, 563—586; 32, № 6, 1968, 1414—1417 (Litvinchuk G. S., Teoría de Noether referente al sistema de las ecuaciones integrales singulares con traslación de Carleman y las variables incógnitas conjugadas complejas).

2) Об устойчивости одной краевой задачи теории аналитических функций, ДАН СССР 174, № 6, 1967, 1268—1270 (Acerca la e№tabilidad de u problema de contorno de la teoría de las funciones analíticas).

3) Об одной задаче, обобщающей краевую задачу Карлемана, ДАН СССР 139, № 2, 1961, 290—293 (Acerca de un problema que generaliza el problema de contorno de Carleman).

4) Об одном типе особых функциональных уравнений и краевых задач со сдвигом для аналитических функций, Изв. АН СССР, сер. матем. 25, № 6, 1961, 871—886 (Acerca de un tipo de ecuaciones funcionales singulares y de problemas de contorno con traslación para las funciones analíticas).

5) К теории краевых задач со сдвигом Карлемана, ДАН СССР, сер. А, № 11, 1967, 1019—1022 (Acerca de la teoría de los problemas de contorno con traslación de Carleman).

6) Об индексе и нормальной разрешимости одного класса функциональных уравнений, ДАН СССР 149, № 5, 1963, 1029—1032 (Acerca del índice y solubilidad normal de una clase de las ecuaciones funcionales).

Литвинчук Г. С., Нечаев А. П. 1) К теории обобщенной краевой задачи Карлемана, ДАН СССР 189, 1 №, 1969, 38—41 (Litvinchuk G. S., Nechaiev A. P., Acerca de la teoría del problema de contorno generalizado de Carleman).

2) Обобщенная краевая задача Карлемана. Матем. сб. 82, № 1, 1970, 30—54 (Problema de contorno generalizado de Carleman).

Литвинчук Г. С., Хасабов Э. Г. 1) О краевой задаче Гильберта со сдвигом, ДАН СССР 142, № 2, 1962, 274—277 (Litvinchuk G. S., Jasabov E. G., Acerca del problema de contorno de Hilbert con traslación).

2) Об индексе обобщенной краевой задачи Гильберта, УМН 20, вып. 6, 1965, 124—130 (Acerca del índice del problema de contorno generalizado de Hilbert).

3) Об одном типе сингулярных интегральных уравнений, Сиб. матем. ж. 5, № 3, 1964, 608—625 (Acerca de un tipo de las ecuaciones integrales singulares).

4) Один класс сингулярных интегральных уравнений и обобщенная краевая задача типа задачи Карлемана, Сиб. матем. ж. 5, № 4, 1964, 858—880 (Una clase de las ecuaciones integrales singulares y el problema de contorno generalizado de tipo del problema de Carleman).

Луканкин Г. Л. 1) О некоторых краевых задачах для функций двух комплексных переменных, Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, вып. 269, 1969, 23—48 (Lukankin G. L., Acerca de unos problemas de contorno para las funciones de dos variables complejas).

Магнарадзе Л. Г. 1) Об одном обобщении теоремы Племели — Привалова, Сообщ. АН Груз. ССР VIII, № 8, 1947, 509—516 (Magnaradze

L. G., Acerca de una generalización del teorema de Plemelj — Privalov).

2) Теория одного класса линейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений, Сообщ. АН Груз. ССР 4, № 2, 1943, 103—110 (Teoría de una clase de las ecuaciones diferenciales integrales singulares lineales).

Малышев В. А. 1) Уравнения Винера — Хопфа в четверть-плоскости, дискретные группы и автоморфные функции, Матем. сб. 84 (126), № 4, 1971, 499—525 (Malishev V. A., Ecuaciones de Wiener — Hopf en el cuadrante del plano, grupos discretos y funciones automorfas).

2) Случайные блуждания, уравнения Винера — Хопфа в четверть-плоскости, автоморфизмы Галуа, изд-во МГУ, 1970 (Desplazamientos casuales, ecuaciones de Wiener — Hopf en el cuadrante del plano, automorfismos de Galois).

Манджавидзе Г. Ф., Хведелидзе Б. В. 1) О задаче Римана—Привалова с непрерывными коэффициентами, ДАН СССР 123, № 5, 1958, 791—794 (Mandzhavidze G. F., Jevedelidze B. V., Acerca del problema de Riemann — Privalov con coeficientes continuos).

Манджавидзе Г. Ф. 1) Об одном классе сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами, Сообщ. АН Груз. ССР 11, № 5, 1950, 269—274 (Mandzhavidze G. F., Acerca de una clase de ecuaciones integrales singulares con coeficientes discontinuos).

Маркушевич А. И. 1) Об одной граничной задаче теории аналитических функций, Уч. зап. МГУ, т. I, вып. 100, 1946, 20—30 (Markushevich A. I., Acerca de un problema de frontera de la teoría de las funciones analíticas).

Мельник И. М. 1) Предельные значения аналитической функции, представленной криволинейными интегралом, Сообщ. АН Груз. ССР XVII, № 8, 1956, 681—688 (Melnik I. M., Valores límites de la función analítica representada por la integral curvilínea).

2) Исключительный случай краевой задачи Римана, Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР 24, 1957, 149—162 (Caso excepcional del problema de contorno de Riemann).

3) Поведение интеграла типа Коши вблизи точек разрыва плотности и особый случай краевой задачи Римана, Уч. Зап. Ростовск. ун-та 43, вып. 6, 1959, 57—71 (Comportamiento de la integral de tipo de Cauchy cerca de los puntos de discontinuidad de la densidad y el caso singular del problema de contorno de Riemann).

Михайлов Л. Г. 1) Предельные значения аналитической функции, представленной криволинейным интегралом, Уч. зап. Тадж. ун-та I, 1952, 32—55 (Mijailov L. G., Valores límites de la función analítica representada por la integral curvilínea).

2) Краевая задача типа задачи Римана для систем дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа, Уч. зап. Тадж. ун-та X, 1957, 32—79 (Problema de contorno de tipo del problema de Riemann para los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden de tipo elíptico).

Михлин С. Г. 1) Проблема эквивалентности в теории сингулярных интегральных уравнений, Матем. сб. 3 (45), 1938, 121—141 (Mijlin S. G., Problema de equivalencia en la teoría de las ecuaciones integrales singulares).

2) Об одном классе сингулярных интегральных уравнений, ДАН СССР 24, № 4, 1939, 315—317 (Acerca de una clase de las ecuaciones integrales singulares).

Моткин А. С. 1) Сингулярные интегральные уравнения по бесконечному контуру, Изв. АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 4, 1967, 36—46 (Motkin A. S., Ecuaciones integrales singulares a lo largo del contorno infinito).

2) О числе решений сингулярного интегрального уравнения на бесконечном контуре, Изв. АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 4, 1969, 72—77 (Acerca del número de soluciones de la ecuación integral singular en el contorno infinito).

Мусхелишвили Н. И. 1) Приложение интеграла типа Коши к одному классу сингулярных интегральных уравнений, Тр. Тбил. Матем. ин-та АН Груз. ССР X, 1941, 1—43 (Musjelishvili N. I., Aplicación de la integral de tipo de Cauchy a una clase de las ecuaciones integrales singulares).

Мусхелишвили Н. И., Квеселава Д. А. 1) Сингулярные интегральные уравнения с ядрами Коши на разомкнутых контурах, Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР XI, 1942, 141—172 (Musjelishvili N. I., Kveselava D. A., Ecuaciones integrales singulares con núcleos de Cauchy en los contornos abiertos).

Наталевич В. К. 1) Нелинейные сингулярные интегральные уравнения и нелинейные краевые задачи теории аналитических функций, Уч. зап. Казанск. ун-та 112, № 10, 1952, 155—190 (Natalevich V. K., Ecuaciones integrales singulares no lineales y problemas de contorno no lineales de la teoría de las funciones analíticas).

Нужин М. Т. 1) О некоторых обратных краевых задачах и их применении к определению формы сечений скручиваемых стержней, Уч. зап. Казанск. ун-та 109, № 1, 1949, 97—120 (Nuzhin M. T., Acerca de algunos problemas de contorno inversos y sus aplicaciones a la determinación de la forma de secciones de vástagos en torsión).

2) Об обратных краевых задачах для многосвязных областей, Изв. вузов, Математика 5, 1964, 69—77 (Acerca de los problemas de contorno inversos para los dominios múltiplemente conexos).

Пааташвили В. А. 1) Об одной разрывной задаче линейного сопряжения с суммируемым коэффициентом, Сообщ. АН Груз. ССР 34, № 3, 1964, 519—524 (Paatashvili V. A., Acerca de un problema discontinuo de conjugación lineal con coeficiente sumable).

2) О линейной задаче сопряжения в случае счетного множества замкнутых контуров, Сооб. АН Груз. ССР 37, № 1, 1965, 31—36 (Acerca del problema lineal de conjugación en el caso del conjunto de contornos cerrados).

3) О линейной задаче сопряжения в случае счетного множества замкнутых контуров, Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР 34, 1968, 103—122 (Acerca del problema lineal de conjugación en el caso del conjunto de contornos cerrados).

Парадоксова И. А. 1) Об одном интегральном уравнении с автоморфным ядром, ДАН СССР 125, № 3, 1959, 496—499 (Paradoxova I. A., Acerca de una ecuación integral con núcleo automorfo).

2) Об одном сингулярном интегральном уравнении, связанном с циклической группой дробно-линейных преобразований, Изв. вузов, Математика 5, 1960, 136—143 (Acerca de una ecuación integral singular ligado con el grupo cíclico de transformaciones lineales fraccionales).

3) О числе решений одного полного сингулярного интегрального уравнения, Уч. зап. Ростовск. пед. ин-та, вып. 5, 1960, 51—58 (Acerca del número de soluciones de la ecuación integral singular completa).

Пилиди В. С. 1) О многомерных бисингулярных операторах, ДАН СССР 201, № 4, 1971, 787—789 (Pilidi V. S., Acerca de los operadores bisingulares multidimensionales).

2) Локальный метод в теории операторных уравнений типа бисингулярных интегральных уравнений, Сб. «Матем. анализ и его приложз, т. III, изд-во Ростовск. ун-та, 1971, 81—105 (Método local en la teoría de las ecuaciones operacionales de tipo de ecuaciones integrales bisingulares).

Показеев В. И. 1) Краевая задача Карлемана для фундаментального многоугольника, Сб. «Краевые задачи теории функц. компл. перем.», изд-во Казанск. ун-та, 1964, 40—57 (Pokazeiev V. I., Problema de contorno de Carleman para el polígono fundamental).

2) Об одном представлении обобщенных аналитических автоморфных функций, ДАН СССР, 155, № 3, 1964, 528—531 (Acerca de una representación de las funciones automorfas analíticas generalizadas).

3) Задача Римана—Карлемана для одного класса обобщенных аналитических функций, Изв. АН Казах. ССР, сер. физ.-мат. наук 1, 1965, 72—81 (Problema de Riemann — Carleman para una clase de las funciones analíticas generalizadas).

Попов Г. Я. 1) Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактным задачам, ПММ 27, вып. 5, 1963, 821—832 (Popov G. Va., Algunas propiedades de polinomios clásicos y su aplicación a los problemas de contacto).

Привалов И. И. 1) Об одной граничной задаче, Матем. сб. 41, № 4, 1934, 519—526 (Privalov I. I., Acerca de un problema de contorno).

Рабинович В. С. 1) Многомерные уравнения Винера — Хопфа для конусов, Сб. «Теория функций, функц. анализ и их приложения», вып. 5, Харьков, 1967, 59—67 (Rabinovich V. S., Ecuaciones multidimensionales de Wiener — Hopf para los conos).

Рогожин В. С. 1) Некоторые краевые задачи для полигармонического уравнения, Уч. зап. Казанск. ун-та 110, № 3, 1950, 71—94 (Rogozhin V. S., Algunos problemas de contorno para la ecuación poliarmónica).

2) Нахождение формы тела по заданному импульсивному давлению при ударе, ПММ 23, вып. 3, 1959, 589—591 (Determinación de la forma del cuerpo a base de la presión de impulso dada durante el choque).

3) Новое интегральное представление кусочно-аналитической функции и его приложение, ДАН СССР 135, № 4, 1960, 791—973(Nueva representación integral de la función analítica a trozos y su aplicación).

4) О числе решений внешней обратной краевой задачи, Уч. зап. Ростовск. ун-та 46, вып. 7, 1959, 155—158 (Acerca del número de soluciones del problema de contorno inverso exterior).

5) Достаточные условия однолистности решения обратных краевых задач, ПММ 22, вып. 6, 1958, 804—807 (Condiciones suficientes de univalencia de soluciones de los problemas de contorno inversos).

6) Краевые задачи Римана и Гильберта в классе обобщенных функций, Сиб. матем. ж. 2, № 5, 1961, 734—745 (Problemas de contorno de Riemann y Hilbert en la clase de las funciones generalizadas).

7) Краевая задача Римана в классе обобщенных функций, Изв. АН СССР, сер. матем. 28, № 6, 1964, 1325—1344 (Problema de contorno de Riemann en la clase de las funciones generalizadas).

8) Общая схема решения краевых задач в пространстве обобщенных функций, ДАН СССР 164, № 2, 1965, 277—280 (Esquema general de resolucion de los problemas de contorno en el espacio de las funciones generalizadas).

Рогожина И. С. 1) Об одной краевой задаче со смещением для кусочно аналитических функций, Изв. вузов, Математика, № 2 (45), 1965, 139—151 (Rogozhina I. S., Acerca de un problema de contorno con desplazamiento para las funciones analíticas).

Родин Ю. Л. 1) Об условиях разрешимости краевых задач Римана и Гильберта на римановых поверхностях, ДАН СССР 129, № 6, 1959, 1234—1237 (Rodin Yu. L., Acerca de las condiciones de solubilidad de los problemas de contorno de Riemann y Hilbert sobre las superficies de Riemann).

2) О задаче Римана на замкнутых римановых поверхностях, ДАН СССР 132, № 5, 1960, 1038—1040 (Acerca del problema de Riemann sobre las superficies de Riemann cerradas).

3) Интегралы типа Коши и краевые задачи для обобщенных аналитических функций на замкнутых римановых поверхностях, ДАН СССР 142, № 4, 1962, 798—801 (Integrales de tipo de Cauchy y problemas de contorno para las funciones analíticas generalizadas sobre las superficies de Riemann cerradas).

4) Алгебраическая теория обобщенных аналитических функций на замкнутых римановых поверхностях, ДАН СССР 142, № 5, 1962, 1030—1033

(Teoría algebraica de las funciones analíticas generalizadas sobre las superficies de Riemann cerradas).

Рысюк Н. А. 1) Нелинейная краевая задача типа задачи Римана с действительными показателями в классе автоморфных функций, Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, № 4, 1973, 51—56 (Risiuk N. A., Problema de contorno no lineal de tipo del problema de Riemann con exponente real en la clase de las funciones automorfas).

Сабитов И. Х. 1) Об одной граничной задаче линейного сопряжения, Матем. сб. 64 (106), № 2, 1964, 262—274 (Sabitov I. J., Acerca de un problema de frontera de conjugación lineal).

2) Об общей краевой задаче линейного сопряжения на окружности, Сиб. матем. ж. 5, № 1, 1964, 124—129 (Acerca del problema de contorno general de conjugación lineal sobre la circunferencia).

Сакалюк К. Д. 1) Обобщенное уравнение Абеля, ДАН СССР 131, № 4, 1960, 748—751 (Sakaliuk K. D., Ecuación generalizada de Abel).

2) Обобщение интегрального уравнения Абеля, Уч. зап. Кишиневск. ун-та 50, 1962, 95—102 (Ecuación integral generalizada de Abel).

3) Некоторые особые интегральные уравнения с полярными, степенными и логарифмическими ядрами, Уч. зап. Кишиневск. ун-та 50, 1962, 103—109 (Algunas ecuaciones integrales singulares con núcleos polares, potenciales y logarítmicos).

4) Обобщенное интегральное уравнение Абеля с внутренними коэффициентами, Уч. зап. Кишиневск. ун-та 82, 1965, 60—68 (Ecuaciones integrales generalizadas de Abel con coeficientes interiores).

5) Интегральные уравнения с логарифмическими и полярно-логарифмическими ядрами, Уч. зап. Кишиневск. ун-та 70, 1969, 17—23 (Ecuaciones integrales con núcleos logarítmicos polares).

6) Интегральные уравнения со степенными, логарифмическими и полярными ядрами, разрешимые в замкнутой форме, Кандидатская диссертация, Кишинев, 1963 Ecuaciones integrales con núcleos potenciales, logarítmicos y polares, resolubles en forma cerrada).

Самко С. Г. 1) О разрешимости в замкнутой форме сингулярных интегральных уравнений, ДАН СССР 189, № 3, 1969, 483—485 (Samko S. G., Acerca de solubilidad en forma cerrada de las ecuaciones integrales singulares).

2) Общее сингулярное уравнение в исключительном случае, Дифференц. ур-ния I, № 8, 1965, 1108—1116 (Ecuación singular general en el caso excepcional).

3) Обобщенное уравнение Абеля и уравнение с ядром Коши, ДАН СССР 176, № 5, 1019—1022 (Ecuación generalizada de Abel y ecuación con núcleo de Cauchy).

4) О сведении некоторых интегральных уравнений первого рода теории упругости и гидродинамики к уравнениям второго рода, ПММ 31, вып. 2, 1967, 343—345 (Acerca de la reducción de ciertas ecuaciones de primer género de la teoría de elasticidad y hidrodinámica a las ecuaciones de segundo género).

5) К теории обобщенного интегрального уравнения Абеля, Сб. материалов 7-й и 8-й аспирантск. конф. РГУ за 1964—1965 гг., изд-во Ростовск. ун-та, 1968, 56—61 (Acerca de la teoría de la ecuación integral generalizada de Abel).

6) Об обобщенном уравнении Абеля и операторах дробного интегрирования, Дифференц. ур-ния IV, № 2, 1968, 298—314 (Acerca de la ecuación generalizada de Abel y los operadores de la integración fraccional).

7) О теории Нетера для обобщенного интегрального уравнения Абеля, Дифференц. ур-ния IV, № 2, 1968, 315—326 (Acerca de la teoría de Noether para la ecuación integral generalizada de Abel).

8) Общий сингулярный оператор и интегральный оператор с автоморф-

ным ядром, Изв. вузов, Математика, № 1, 1969, 67—77 (Operador singular general y operador integral con núcleo automorfo).

9) Обобщенное уравнение Абеля на прямой, Изв. вузов, Математика, № 8 (99), 1970, 83—93 (Ecuación generalizada de Abel en la recta).

10) Об операторах типа потенциала, ДАН СССР 196, № 2, 1971, 299—301 (Acerca de los operadores de tipo de potencial).

11) Об интегральных уравнениях с ядром типа потенциала, Изв. вузов, Математика, № 4, 1971, 78—86 (Acerca de las ecuaciones integrales con núcleo de tipo de potencial).

12) Об одном классе операторов типа потенциала на прямой, Изв. вузов, Математика, № 5, 1971, 92—100 (Acerca de una clase de operadores de tipo de potencial en la recta).

13) О пространстве $I^{\alpha}(L_p)$ дробных интегралов и операторах типа потенциала, Изв. АН Арм. ССР VIII, 1973, 359—383 (Acerca del espacio $I^{\alpha}(L_p)$ de los integrales fraccionales y los operadores de tipo de potencial).

Сербин А. И. 1) Об одной обобщенной краевой задаче Римана на конечной римановой поверхности, Сб. «Краевые задачи теории функц. компл. перем.», изд-во Казанск. ун-та, 1964, 86—94 (Serbin A. I., Acerca de un problema de contorno generalizado de Riemann sobre la superficie de Riemann finita).

2) Об общей краевой задаче на конечной римановой поверхности, Сб. «Краевые задачи теории функц. компл. перем.», изд-во Казанск. ун-та, 1964, 95—105 (Acerca del problema de contorno general sobre la superficie de Riemann finita).

3) О краевой задаче Римана для обобщенных аналитических функций на замкнутой римановой поверхности, Изв. вузов, Математика, № 4, 1964, 131—143 (Acerca de contorno de Riemann para las funciones analíticas generalizadas sobre la superficie de Riemann cerrada).

Симоненко И. Б. 1) Краевая задача Римана с непрерывным коэффициентом, ДАН СССР 124, № 2, 1959, 278—281 (Simonenko I. B., Problema de contorno de Riemann con coeficiente continuo).

2) Краевая задача Римана с измеримым коэффициентом, ДАН СССР 135, № 3, 1960, 538—541 (Problema de contorno de Riemann con coeficiente medible).

3) Краевая задача Римана для n пар функций с измеримыми коэффициентами и ее применение к исследованию сингулярных интегралов в пространстве L_p с весами, Изв. АН СССР, сер. матем. 28, № 2, 1964, 277—306 (Problema de contorno de Riemann para n pares de funciones con coeficientes medibles y su aplicación a la investigación de las integrales singulares en el espacio L_p con pesos).

4) О многомерных дискретных свертках, Матем. исследования 3, № 1 (7), Кишинев, 1968, 108—122 (Acerca de las convoluciones discretas multidimensionales).

5) К вопросу о разрешимости бисингулярных и полисингулярных уравнений, Функцион. анализ и его приложения 5, вып. 1, 1971, 93—94 (Acerca de la solubilidad de las ecuaciones bisingulares y polisingulares).

6) Новый общий метод исследования линейных операторных интегральных уравнений I и II, Изв. АН СССР, сер. матем. 29, вып. 3, 1965, 567—586, и вып. 4, 1965, 775—782 (Nuevo método general de investigación de las ecuaciones integrales operacionales lineales).

Соболев С. Л. 1) Об одной предельной задаче теории логарифмического потенциала и ее применение к отражению плоских упругих волн, Тр. Сейсм. ин-та, № 11, 1930, 1—18 (Acerca de un problema límite de la teoría del potencial logarítmico y su aplicación a la reflexión de ondas elásticas planas).

Соколов И. А. 1) О краевой задаче типа Римана для бианалитических функций в случае произвольного контура, Изв. АН БССР, сер. физ.-

матем. наук, № 6, 1969, 29—38 (Sokolov I. A., Acerca del problema de contorno de tipo de Riemann para las funciones bianalíticas en el caso del contorno arbitrario).

2) О краевой задаче типа Римана для полианалитических функций на окружности, Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, № 5, 1969, 64—71 (Acerca del problema de contorno de tipo de Riemann para las funciones polianalíticas sobre la circunferencia).

3) О краевой задаче типа задачи Римана со сдвигом для полианалитических функций на окружности, Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, № 1, 1970, 118—121 (Acerca del problema de contorno de tipo del problema de Riemann con traslación para las funciones polianalíticas sobre la circunferencia).

4) Первая краевая задача типа Римана для полианалитических функций в случае произвольного контура, Вестник БГУ, серия I — математика, физика, механика, № 2, 1970, 20—23 (Primer problema de contorno de tipo de Riemann para las funciones polianalíticas en el caso del contorno arbitrario).

Сосунов А. С. 1) Об одном сингулярном интегральном уравнении с двумя ядрами Карлемана, Материалы II-й научн. конфер. молодых ученых Ростовск. обл., Секция естеств. наук, Ростов-на-Дону, 1968, 111—113 (Sosunov A. S., Acerca de una ecuación integral singular con dos núcleos de Carleman).

2) Формула индекса одного класса сингулярных интегральных уравнений с двумя сдвигами Карлемана, Материалы Всесоюзн. конфер. по краев. задачам, Казань, 1970, 249—253 (Fórmula del índice de una clase de las ecuaciones integrales singulares con dos traslaciones de Carleman).

Столярова Э. К. 1) Общая линейная краевая задача для уравнений эллиптического типа, Уч. зап. Казанск. ун-та 111, № 8, 1951, 149—160 (Stoliarova E. K., Problema de contorno lineal general para las ecuaciones de tipo elíptico).

Толочко М. Э. 1) О разрешимости однородной краевой задачи Римана с бесконечным индексом для полуплоскости, Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, № 5, 1972, 34—41 (Tolochko M. E., Acerca de la solubilidad del problema de contorno homogéneo de Riemann con índice infinito para el semiplano).

2) О разрешимости однородной краевой задаче Римана для бесконечно связной области, ДАН БССР 18, № 5, 1974, 398—401 (Acerca de la solubilidad del problema de contorno homogéneo de Riemann para el dominio infinitamente conexo).

Тузик А. И. 1) Об исключительных случаях особых интегральных уравнений с ядром Коши, Вестник БГУ, сер. I, № 2, 1969, 3—7 (Tuzik A. I., Acerca de los casos excepcionales de las ecuaciones singulares con núcleo de Cauchy.

2) К решению особых интегральных уравнений с ядром Коши в исключительном случае, Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, № 2, 1970, 125—127 (Acerca de la resolución de las ecuaciones integrales singulares con núcleo de Cauchy en el caso excepcional).

Усманов Н. К. 1) Граничные задачи дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка эллиптического типа, Тр. Ин-та физ. и матем. Латв. ССР, вып. 1, 1950, 41—100 (Usmanov N. K., Problemas de frontera de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden de tipo elíptico).

2) К граничным задачам функций, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений, Тр. Ин-та физ. и матем. Латв. ССР, вып. 2, 1950, 59—100 (Acerca de los problemas de frontera de las funciones que satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales).

Фрейдкин С. А. 1) Решение одного класса сингулярных интеграль-

ных уравнений, Учен. зап. Кишиневск. ун-та 11, 1954, 13—17 (Freidkin S. A., Solución de una clase de las ecuaciones integrales singulares).

2) Краевая задача Римана и сингулярные интегральные уравнения с кусочно постоянными коэффициентами в случае счетного множества интервалов, Учен. зап. Кишиневск. ун-та 70, 1964, 27—38 (Problema de contorno de Riemann y ecuaciones integrales singulares con coeficientes constantes a trozos en el caso del conjunto numerable de intervalos).

3) Задача линейного сопряжения и сингулярные интегральные уравнения в случае счетного множества интервалов, Учен. зап. Кишиневск. ун-та 82, 1965, 12—39 (Problema de conjugación lineal y ecuaciones integrales singulares en el caso del conjunto numerable de intervalos).

Фролов В. Д. 1) К теории сингулярных интегральных уравнений с измеримыми коэффициентами, ДАН СССР 189, № 6, 1969, 1185—1188 (Frolov V. D., Acerca de la teoría de las ecuaciones integrales singulares con coeficientes medibles).

2) О сингулярных интегральных уравнениях с измеримыми коэффициентами в пространствах L_p с весом, Матем. исследования 5, вып. 1, Кишинев 1970, 141—151 (Acerca de las ecuaciones integrales singulares con coeficientes medibles en los espacios L_p con peso).

3) Сингулярные интегральные уравнения на бесконечной системе дуг, Матем. исследования 6, вып. 1, Кишинев, 1971, 146—157 (Ecuaciones integrales singulares sobre el sistema infinito de arcos).

Хасабов Э. Г. 1) Обобщенная краевая задача Гильберта, Уч. зап. Ростовск. ун-та 46, № 7, 1959, 257—278 (Jasabov E. G., Problema de contorno generalizado de Hilbert).

2) Краевая задача типа задачи Карлемана, Изв. вузов, Математика, № 2, 1963, 124—133 (Problema de contorno de tipo del problema de Carleman).

Хведелидзе Б. В. 1) О краевой задаче Пуанкаре теории логарифмического потенциала для многосвязной области, Сообщ. АН Груз. ССР 2, № 7, 1941, 571—578, № 10, 1941, 865—872 (Jvedelidze B. V., Acerca del problema de Poincaré de la teoría del potencial logarítmico para el dominio múltiplemente conexo).

2) Замечания к моей работе «Линейные граничные задачи», Сообщ. АН Груз. ССР XXI, № 2, 1958, 129—130 (Observaciones referentes a mi trabajo «Problemas de frontera lineales»).

Хускивадзе Г. А. 1) Об A-интегралах типа Коши, Сообщ. АН Груз. ССР 27, № 6, 1961, 633—670 (Juskivadze G. A., Acerca de las A-integrales de tipo de Cauchy).

2) О сопряженных функциях и интегралах типа Коши, Тр. матем. ин-та АН Груз. ССР 31, 1966, 5—54 (Acerca de las funciones conjugadas y las integrales de tipo de Cauchy).

3) Об интегралах типа Коши — Силтьеса, Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР 34, 1968, 160—169 (Acerca de las integrales de tipo de Cauchy — Stieltjes).

Чернецкий В. А. 1) О конформной эквивалентности краевой задачи Карлемана краевой задаче Римана на разомкнутом контуре, ДАН СССР 190 № 1, 1970, 54—56 (Chernetski V. A., Acerca de la equivalencia conforme del problema de contorno de Carleman al problema de contorno de Riemann sobre el contorno abierto).

2) О конформной эквивалентности граничной задачи Векуа граничной задаче Маркушевича на разомкнутом контуре, ДАН УССР А, № 3, 1972, 218—220 (Acerca de la equivalencia conforme del problema de frontera de Vekua al problema de frontera de Markushevich sobre el contorno abierto).

Черский Ю. И. 1) Общее сингулярное уравнение и уравнение типа свертки, Матем сб. 41, № 3, 1957, 277—295 (Cherski Yu. I., Ecuación singular general y ecuación de tipo de convulación).

2) К решению краевой задачи Римана в классе обобщенных функций,

ДАН СССР 125, № 3, 1959, 500—503 (Acerca de la solución del problema de contorno de Riemann en la clase de las funciones generalizadas).

3) О методе неполной факторизации, ДАН СССР 189, № 1, 1969, 53—56 (Acerca del método de factorización incompleta).

4) Метод неполной факторизации, Тр. семин. по краевым задачам, изд-во Казанск. ун-та, вып. 7, 1970, 293—296 (Método de factorización incompleta).

5) Задача сопряжения на двулистной поверхности, Матем. исследования 3, № 3, Кишинев, 1968, 139—149 (Problema de conjugación sobre la superficie bivalente).

Чибрикова Л. И. 1) Особые случаи обобщенной задачи Римана, Уч. зап. Казанск. ун-та 112, № 10, 1952, 129—154 (Chibrikova L. I., Casos singulares del problema generalizado de Riemann).

2) О краевой задаче Римана для автоморфных функций, Уч. зап. Казанск. ун-та 116, № 4, 1956, 59—109 (Acerca del problema de contorno de Riemann para las funciones automorfas).

3) К решению краевой задачи Трикоми для уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+$ $+\operatorname{sing} y\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, Уч. зап. Казанск. ун-та 117, №9, 1957, 48—51. (Acerca de la solución del problema de contorno de Tricomi para la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\operatorname{sing} y\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$).

4) Эффективное решение краевой задачи Гильберта для некоторых многоугольников, ограниченных дугами окружности, Уч. зап. Казанск. ун-та 117, № 2, 1957, 22—26 (Resolución efectiva del problema de contorno de Hilbert para ciertos polígonos limitados por los arcos de la circunferencia).

5) Новый метод решения одной краевой задачи смешанного типа, Уч. зап. Казанск. ун-та 117, № 9, 1957, 44—47 (Nuevo método de resolución de un problema de contorno de tipo mixto).

6) Краевая задача Римана для автоморфных функций в случае групп с двумя инвариантами, Изв. вузов, Математика 6, 1961, 121—131; 3, 1962, 195—196 (Problema de contorno de Riemann para las funciones automorfas en el caso de los grupos con dos invariantes).

7) К решению краевой задачи Гильберта, Тр. семин. по обратным краевым задачам, вып. 2, Казань 1964, 201—212 (Acerca de la resolución del problema de contorno de Hilbert).

8) О граничных задачах для прямоугольника, Сб. «Краевые задачи теории функц. компл. перем», изд-во Казанск. ун-та, 1964, 15—39 (Acerca de sol problemas de frontera para el rectángulo).

9) Граничная задача Римана на римановой поверхности с краем, Сб. «Краевые задачи теории функц. компл. перем», изд-во Казанск. ун-та, 1964, 3—14 (Problema de frontera de Riemann sobre la superficie de Riemann con margen).

10) К решению краевых задач методом симметрии, Тр. семинара по краевым задачам, вып. 3, Казань, 1966, 202—228 (Acerca de la resolución de los problemas de contorno mediante el método de simetría).

11) О методе симметрии в теории упругости, Изв. вузов, № 10 (65), 1967, 102—112 (Acerca del método de simetría en la teoría de elasticidad).

Чибрикова Л. И., Марков Г. В. 1) О некоторых краевых задачах на неориентируемых поверхностях, Тр. семинара по краевым задачам, вып. 3, изд-во Казанск. ун-та, 1966, 225—229 (Chibrikova L. I., Markov G. V., Acerca de algunos problemas de contorno sobre las superficies no orientables).

Чибрикова Л. И., Мкоян П. Х. 1) Задача Римана для счетного множества контуров с двумя предельными точками, Изв. вузов, Матема-

тика, № 3, 1972, 90—102 (Chibrikova L. I., Mkoyan P. J., Problema de Riemann para el conjunto numerable de contornos con dos puntos límites).

Чибрикова Л. И., Рогожин В. С. 1) О сведении некоторых краевых задач к обобщенной задаче Римана, Уч. зап. Казанск. ун-та 112, № 10, 1952, 123—127 (Chibrikova L. I., Rogozhin V. S., Acerca de la reducción de algunos problemas de contorno al problema generalizado de Riemann).

Чибрикова Л. И., Салехов Л. Г. 1) К решению общей задачи линейного сопряжения аналитических функций в случае алгебраических контуров, Тр. семин. по краевым задачам, вып. 5, изд-во Казанск. ун-та, 1968, 224—249 (Chibrikova L. I., Salejov L. G., Acerca de la resolución del problema general de conjugación lineal de las funciones analíticas en el caso de los contornos algebraicos).

2) Применение метода симметрии при решении одной задачи линейного сопряжения, Изв. вузов, № 9, 1968, 94—105 (Aplicación del método de simetría para resolver un problema de conjugación lineal).

Чикин Л. А. 1) Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений, Уч. зап. Казанск. ун-та 113, № 10, 1953, 57—105 (Chikin L. A., Casos singulares del problema de Riemann y de las ecuaciones integrales singulares).

2) Об устойчивости краевой задачи Римана. ДАН СССР, 111, № 1, 1956, 44—46 (Acerca de la estabilidad del problema de contorno de Riemann).

3) Устойчивость краевой задачи Римана, Уч. зап. Ростовск. ун-та 43, вып. 6, 1959, 119—125 (Estabilidad del problema de contorno de Riemann).

4) Два алгоритма для вычисления индекса функции с помощью ЦВМ, Сб. «Вопросы вычисл. матем. и вычисл. техники», изд-во Ростовск. ун-та, 1965, 60—66 (Dos algoritmos para el cálculo del índice de la función con ayuda de las calculadoras digitales).

Чумаков Ф. В. 1) Общая теория интегральных уравнений со степенным ядром, Дифференц. ур-ния 11, № 4, 1966, 544—559 (Chumakov F. V., Teoría general de las ecuaciones integrales con núcleo potencial).

2) Уравнение типа Абеля на сложном контуре, Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, № 1, 1971, 55—61 (Ecuación de tipo de Abel sobre el contorno compuesto).

3) Интегральные уравнения с логарифмическим ядром, Дифференц. ур-ния IV, № 2, 1968, 336—346 (Ecuaciones integrales con núcleo logarítmico).

4) Об одном обобщении уравнения Карлемана, Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, № 4, 1972, 113—116 (Acerca de una generalización de la ecuación de Carleman).

5) Обобщенное уравнение Карлемана с внутренними коэффициентами, Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, № 6, 1972, 104—106 (Ecuación generalizada de Carleman con coeficientes interiores).

6) Решение в замкнутой форме некоторых интегральных уравнений с логарифмическим ядром на сложном контуре, Вестник БГУ, сер. 1, № 2, 1972, 5—9 (Solución en forma cerrada de algunas ecuaciones integrales con núcleo logarítmico sobre el contorno compuesto).

Шерман Д. И. 1) К общей задаче теории потенциала, Изв. АН СССР, сер. матем. 10, 1946, 121—134 (Sherman D. I., Acerca del problema general de la teoría del potencial).

2) О приемах решения некоторых сингулярных интегральных уравнений, ПММ 12, 1948, 423—452 (Acerca de los métodos de resolver algunas ecuaciones integrales singulares).

3) Об одном случае регуляризации сингулярных уравнений, ПММ 15, 1951, 75—82 (Acerca de un caso de la regularización de ecuaciones singulares).

4) О некоторых задачах теории потенциала, ПММ 9, 1945, 479—488 (Acerca de algunos problemas de la teoría del potencial).

5) О связи основной задачи теории упругости с одним особым случаем задачи Пуанкаре, ПММ 17, 1953, 685—692 (Acerca de la relación entre el problema principal de la teoría de elasticidad y un caso singular del problema de Poincaré).

Юров П. Г. 1) Интегралы типа Коши и уравнения в конечных разностях, Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, № 3, 1967, 67—74 (Yurov P. G., Integrales de tipo de Cauchy y ecuaciones en diferencias finitas).

2) О представлении интегралов типа Коши, Матем. заметки 6, № 1, 1969, 55—63 (Acerca de la representación de las integrales de tipo de Cauchy).

3) Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом, Изв. вузов, Математика, № 2, 1966, 158—163 (Problema de contorno homogéneo de Riemann con índice infinito).

4) Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка $\alpha \geqslant 1$, Материалы Всесоюзн. конференции по краевым задачам, Казань, 1970, 279—284 (Problema de contorno no homogéneo de Riemann con índice infinito de orden logarítmico $\alpha \geqslant 1$).

5) Один из случаев краевой задачи Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка, ДАН БССР, 12, 1968, 489—491 (Uno de los casos del problema de contorno de Riemann con índice infinito de orden logarítmico).

C. BIBLIOGRAFIA EN LENGUAS EXTRANJERAS

Berg L. 1) Lösungsverfahren für singuläre Integralgleichungen I, Math. Nachr. 14, H. 4—6, 1955, 193—212.

2) Über die Resolvente einer singulären Integralgleichugen, Math. Nachr. 15, H. 5—6, 1956, 339—352.

Bertrand G. 1) Le probleme—de Dirichlet et le potentiel de simple couche, Bull. sci. math. XLVII, 1923, p. 282—288 et 298—307.

Bittner L. 1) Plemelische Randwertformeln für mehrfache Cauchy-Integral, J. angew. Math. und Mech. 39, N° 9—11, 1959, 347—349.

Carleman T. 1) Sur la resolution de certaines équations intégrales, Akriv mat., astr. och phys. 16, N° 26, 1922, p. 1—19.

2) Abelsche Integralgleichung mit konstanten Grenzen, Mat. Z. 15, 1922, 111—120.

Demtchenko 1) Problem mixtes harmoniques, Paris, G. V., 1933

Gellerstedt S. 1) Quelques problemes mixtes, Arkiv mat., astr. och. phys. 26, N° 3, 1936.

Hardy G. H., Littlewood J. E., 1) Some properties of fractional integrals I, Math. Z. 27, 1928, 565—606.

Harnac A. 1) Beiträge zur Theorie des Cauchy'schen Integrals, Ber. Sächsisch. Ges. Wiss, Math. phys. K. 37, 1885, 379—398.

Haseman C. 1) Anwendung der Theorie der Integralgleichungen auf einige Randwertaufgaben, Göttingen, 1907.

Heins A. E., Mac Camy R. C. 1) A function—theoretic solution of certain integral equation, Quart. J. Math. 9, N° 34, 1958, 132—143.

Hilbert D. 1) Über eine Anwendung der Integralgleichungen, Verhandl. des III Internat. Mathematiker Kongresses, Heidelberg, 1904.

Jacob C. 1) Sur quelques nouvelles extensions du theoréme du cercle, Annali di matematica pura ed appl. 1970, 84, 263—278.

Koppelman W. 1) The Riemann — Hilbert problem for finite Riemann surfaces. Comm. Pure and Appl. Math. 12 : 1, 1959, 13—25.

2) Singular integral equations, boundary value problems and the Riemann—Roch theorem, Journ. Math. and Mech. 10 : 2, 1961, 247—277.

Kraut E. A., Lehman G. W. 1) Diffraction of electromagnetic waves by a right-angle dielectric wedge, Journ. Math. Phys. 10, 1969, 1340—1348.

Leonard A. 1) Two-dimensional Quarter Space problems in one-speed transport theory, Journ. Math. Phys 12, 1971, 754—766.

Lundgren T., Chiang D. 1) Solutions of a class of singular integral equations, Quart. Appl. Math. 24, N° 4, 1967, 303—313.

Noether F. 1) Über eine Klasse singularer Integralgleichungen, Math. Ann. 82, 1921, 42—63.

Peters A. S. 1) Some integral equations related to Abel's equation and the Hilbert transform, Comm. Pure and Appl. Math. XXII, 1969, 539—560.

Plemelj I. 1) Ein Ergänzungssatz... Monatsh. Math. und Phys. XIX, 1908, 205—210.

2) Riemannsche Funktionenscharen, Ibid., 211—245.

Prössdorf S. 1) Zur Theorie singulärer Integralgleichungen nicht normalen Typs, Wiss. Z. Technol. Hochsch. Karl-Marx-Stadt 11, N° 3, 1969, 353—357.

Przeworska-Rolewiez D. 1) Sur les équations involutives et leurs applications, Studia math. 20, N° 2, 1961, 95—117.

2) Equations avec óperations algébraiques, Studia math. 22, N° 3, 1963, 337—367.

Riabouchinsky 1) Sur la determination d'une surface, d'apres les donnees qu'elle ports, C. R. Akad. sci., t. 189, 1929.

Signorini 1) Sopra un problema ol contorno nella teoria delle funzioni di variabilc complessa, Ann. mat. (3), t. 25, 1916.

Susea A. 1) O generalizare a problemei Riemann omogene, St. cercet. mat. 19, N° 1, Bucarest, 1967, 155—161.

Thomas J. 1) Über ein Integralgleichungsystem aus der Theorie des logarithmischen Potentials, Journ. fur d. r. und angew. Math., N° 223, 1969, 1—15.

Trjizinsky W. 1) Singular integral equations, Trans. Amer. Math. Soc. 60, N° 2, 1946.

Volterra V. 1) Sopra alkune condizioni caratteristische per functioni di variabili complessa, Ann. mat. (2), t. 11, 1883.

Wiener N. und Hopf E. 1) Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen, Sitzungsber, Berliner Akad. Wiss., 1931, 696—706.

Williams W. E. 1) A class of integral equations, Proc. Cambr. Phil. Soc. 59, 1963, 589—597.

Wolfersdorf L. v. 1) Abelsche Integralgleichungen und Randwertprobleme für die verallgemeinerte Tricomi-gleichung, Math. Nachr. 27, 1965, 161—178.

2) Über eine Beziehung zweischen Integralen nichtganzer Ordnung. Math. Zeit. 90, N° 1, 1965, 24—28.

3) Zur Lösung der verallgemeinerten Abelschen Integralgleichung mit konstanten koeficienten. Zeit. Angew. Mat. und Mech. 49, N° 12, 1969, 759—761.

4) Zur Theorie der Spielle über dem Einheitsquadrat mit Auzahlungs funktionen von der Form eines Schmetterlings, Wiss. zeit. Univ. Röstock. 19, Math. Naturwiss. Reihe, 6/7, 1970.

INDICE ALFABETICO

Clases de soluciones de la ecuación integral singular 504—505, 521, 527
Clases de soluciones del problema de Riemann 445, 450, 502—503
Composición de los operadores singulares 205
Condición de Hölder 19—22
Convolución de funciones 642
Curvas de la clase de Liapunov 58

Densidad de distribución de probabilidades 646
Densidad de la integral de tipo de Cauchy 16
Dominio fundamental de una función automorfa 559
Dominio policilíndrico 83
Dominio policilíndrico, armazón 83

Ecuación característica en el espacio de Banach 516
— diferencial integral 389, 432
— integral de Abel 596
— — de Fredholm 180—182
— — de núcleos automorfos con grupo finito 590
— — de núcleos automorfos con grupo infinito 608
— — con núcleo logarítmico 608—616
— — con núcleo potencial 595—608
— — con núcleo de Cauchy 250, 258
— — con núcleo de Cauchy, completa 178
— — — — — — — —, conjugada 233
— — — — — — — —, completa, resoluble en la forma cerrada 190
— — — — — — — —, característica 179, 521
— — — — — — — — en el eje real 196—201
— — — — — — — — en el semieje real 509
Ecuación integral singular con núcleo de Cauchy, resolución aproximada 250, 258
— — — — — — — —, transpuesta 279
— — — — — — — —, resolución singular 236, 239
— — — — — — — — y traslación de Carleman 222
— — — — — — — — — — — — — en contorno abierto 500, 517, 530
Ecuación completa para contornos abiertos y coeficientes discontinuos 517
— — — — — — Hilbert 304
— — de tipo de convolución 644
Ecuación de Wiener — Hopf 643
Espectro de la ecuación de Fredholm 182
— — — — singular 187
Extremos de la acotación automática (singulares) 459

Factor de regularización 285
— — real 286
— — para un dominio múltiplemente conexo 401, 405
— — de módulo constante 288

Factorización de las funciones 113
Fórmula de inversión de Poincaré—Bertrand 64, 83
Fórmulas de inversión de Hilbert 60
Fórmulas de Sojotski 37, 38, 44, 48, 80, 85
Fórmula de Schwarz 59
Función analítica a trozos (definición) 474
Función analítica dentro de un ángulo 531
— — — — — —, indicador 532
Función automorfa 558, 561
Funciones automorfas analíticas a trozos 573
Función biarmónica 316
Función canónica del problema de Riemann 111, 123, 146, 465, 466, 475, 562
— — — — — — no homogéneo 139
Función de distribución de las probabilidades 645
Función de Green 276, 397
— — — compleja 276, 397
Función fundamental 447
Función integrable en la potencia 58
Función polianalítica 315
Función poliarmónica 315
Función con torsión bilateral del argumento 533, 541
Función con torsión unilateral del argumento 533
Función de traslación 151

Indice de la función 105
— de la ecuación integral 183, 306
— del operador singular 208, 222
— parcial de una función 109
— del problema de Hilbert 292, 400, 400
— — — — de Riemann 111, 136, 144, 385
— — — — — — para un contorno abierto 458
— — — — — — con coeficientes discontinuos 450
— como invariante homotópico 629
Integral de Fourier 642
— singular 23, 24, 28
— de Schwarz 59
— de tipo de Cauchy (definición) 16
— — — — — (análogo) para funciones automorfas 573
— — — — — en el eje real 45
Integral de tipo de Cauchy en un contorno complejo 78
Integral generalizada de tipo de Cauchy 79
Integral múltiple de tipo de Cauchy 83
Interpolación de funciones enteras 634
Inversión en el contorno abierto 462
Inversión de la integral singular 66

Homotopía del operador 629, 630

Método de la factorización incompleta 511
Módulo de continuidad 20

Norma del operador singular 58
Núcleo de Cauchy 16
— de Hilbert 60
— de Schwartz 59
Operador bisingular 230
— característico 179
— conjugado 234
— con núcleo logarítmico polar 631
— singular 58, 178, 205
— — abstracto 150, 222
— transpuesto 179
— regularizador 208
— de Schwarz para un dominio múltiplemente conexo 396
— — — para un dominio simplemente conexo 275
— de Noether 221
— de tipo normal 183

Orden angular de un dominio 413
Orden de la función analítica 103

Parte regular de la ecuación integral singular 179
Planteamiento del problema de contorno de Hilbert 274
Polinomio de Appel 638
Potencial logarítmico 87
Principio de argumento 103
Principio generalizado de argumento 104
Principio de continuidad 99
Principio de pegamiento lineal conforme 593
Principio de simetría 101, 102

Problema A 280, 402
Problema A_0 280, 402
Problema A_0 generalizado 282
Problema de Dirichlet 275, 391
Problema de Dirichlet para un plano con rendijas 494
Problema de contorno de Carleman 163, 471, 593
Problema de contorno de Carleman con índice infinito 541
Problema de contorno de Hilbert para un bicírculo 304
— — — — — para un dominio exterior 296
— — — — — para un dominio múltiplemente conexo 390—424
— — — — — para un dominio simplemente conexo 291
— — — — — para una función analítica a trozos 481
— — — — — para funciones poli-analíticas 316
— — — — — para un semiplano 294, 486
— — — — — para un semiplano en funciones analíticas 577
— — — — — en la superficie de Riemann 591
— — — — — transpuesto 408
— — — — — con traslación 163, 436
— — — inverso para un dominio múltiplemente conexo 424
— — — — — un dominio simplemente conexo 333, 334, 338, 351
— — — mixto de funciones analíticas 491, 578
Problema de contorno de Riemann, abstracto 150
— — — — — para los contornos abiertos 457, 465
— — — — — para un contorno complejo 473
— — — — — con coeficientes discontinuos 445, 466
— — — — — con coeficiente continuo 148
— — — — — en un conjunto numerable de contornos 543
— — — — — con conjugación 432
— — — — — para dominios bicilíndricos 127
— — — — — para un dominio múltiplemente conexo 143
— — — — — — para un dominio simplemente conexo 110
— — — — — para funciones periódicas 476
— — — — — para funciones poli-analíticas 329
— — — — — para un semiplano 122
— — — — — con una traslación 151
— — — — — con una traslación y conjugación 161, 435
— — — — — de índice infinito 530
— — — — — en la superficie de Riemann 590
— — — — —, casos excepcionales 134, 479
— — — — —, multidimensional 132
— — — — —, planteamiento correcto 141
— — — — —, solución aproximada 150
— — — de tipo del problema de Hilbert 359
— — — de tipo del problema de Riemann 380
— — — de tipo del problema de Riemann para un dominio múltiplemente conexo 428
Problema de Schwarz 275
— — con una singularidad logarítmica en el contorno 342
Puntos de la acotación automática 451, 506

Regularización a la izquierda 210—212, 261
Regularización a la derecha 210, 211
Regularización equivalente del operador 231
— de la ecuación integral singular 205, 253, 524
— mediante la solución de una ecuación característica 241, 262, 517
Representación integral de las funciones analíticas a trozos 362, 368, 378, 380, 387, 428, 561
Resolvente de la ecuación integral 180, 181
— — — — —, singular 236, 237

Superficie de Riemann 587
— — —, duplicado 589
— — — de género h 587
— — — con margen 589

Simetría respecto de una curva algebraica 594
— — — — curva analítica 101
— — — — circunferencia y una recta 101

Teoremas de Noether 216, 529
Teoremas de Fredholm 180—181
Teorema de Riemann—Roch 590
Teorema generalizado de Liouville 103, 104
Transformación de Borel 635
Transformación de Fourier 641
Transformación de Laurent 644

Valor principal de la integral singular 23, 29
Valores límites de la integral de tipo de Cauchy 34, 53, 79
Valores propios y funciones propias 180

A NUESTROS LECTORES:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción. Dirijan sus opiniones a la Editorial «Mir», 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

GAVRILOV G., SAPOZHENKO A.

COLECCION DE PROBLEMAS DE MATEMATICA DISCRETA

Este libro fue escrito con el fin de obtener un manual para las clases de ejercicios prácticos de la asignatura «Matemática discreta». Contiene problemas dedicados al estudio inicial de los conceptos básicos y de las principales definiciones de la matemática discreta. A la par de esto, también se encuentran en él problemas más difíciles, calculados para un lector que tenga suficiente cultura matemática y una preparación especial en este terreno. Contiene ocho capítulos en los que se ilustran los temas siguientes: funciones de Boole; formas de expresión de estas funciones y sus propiedades; clases cerradas y plenitud; lógicas de K valores; grafos y redes; elementos de la teoría de la codificación; autómatas finitos; elementos de la teoría de los algoritmos; elementos de la combinatoria.

Cada párrafo de cada capítulo comienza haciendo una exposición con las principales definiciones y las explicaciones generales del tema tratado. Después se propone una serie de problemas. Al final del libro para muchos de los problemas propuestos se dan los resultados y algunas indicaciones metódicas sobre su resolución.

Esta edición será útil a los estudiantes de universidades y otras instituciones de enseñanza superior en donde se estudia la matemática discreta y la lógica matemática, así mismo a todo el que se interese por estas materias.

KOSTRIKIN A.

INTRODUCCION AL ALGEBRA

Esta obra es un texto de estudio, basado en el curso dictado por el autor, destacado matemático, miembro-correspondiente de la Academia de Ciencias de la URSS en la facultad de mecánica y matemática de la Universidad Estatal de Moscú. En el libro, además de las cuestiones clásicas, de las propiedades generales de los polinomios y de las relaciones binarias, de los grupos de transformación, de las propiedades estructurales de los grupos más simples, etc., se incluyen otras de orden práctico como, por ejemplo, información sobre campos finitos, sobre campos de números algebraicos, cuestiones de divisibilidad de los anillos, elementos de la teoría de imágenes, etc. En un tercer grado de complejidad y especificidad, pueden hallarse en esta obra algunas «exquisiteces» tales como la presentación del teorema de Silov, los grupos lineales invariantes, imágenes de grupos de revolución, y cuestiones sobre álgebra no asociativa, lo que indudablemente hace que también esta obra sea interesante para los especialistas en álgebra. El libro está fundamentalmente dividido en dos partes. Una primera denominada «Fundamentos del álgebra», en donde el autor desarrolla como principales temas matrices, determinantes, estructuras algebraicas, números complejos, polinomios y raíces de polinomios, y una segunda parte, denominada «Grupos, anillos y módulos», donde se desarrollan las teorías correspondientes, además de un grupo de cuestiones teóricas específicas.

SAMARSKI A., ANDREEV V.

METODOS DE DIFERENCIAS PARA ECUACIONES ELIPTICAS

Muchos procesos de naturaleza física distinta se describen por medio de ecuaciones diferenciales elípticas, siendo la ecuación de Poisson la más sencilla de ellas. El presente libro escrito por Alexandr Samarski, laureado con los premios Lenin y de Estado, miembro-correspondiente de la Academia de Ciencias de la URSS y Vladímir Andréev, candidato a doctor en ciencias físico-matemáticas está dedicado a los problemas de formulación y análisis de los métodos de diferencias para la resolución de ecuaciones elípticas. En él se exponen las formas de construcción de los esquemas diferenciales más ampliamente usados en nuestro tiempo, así como los principales métodos de análisis de estos esquemas.

En el libro se desarrollan los siguientes métodos de construcción de esquemas diferenciales: de balance, de variaciones, de aproximación de la función, de identidad integral y de elevación del orden de aproximación del esquema en las soluciones de la ecuación diferencial. El empleo de los métodos indicados se ilustra con diversos ejemplos en ecuaciones sencillas de segundo y cuarto grados. Se ha prestado especial atención a las ecuaciones de segundo grado, y dentro de ellas, a la ecuación de Poisson. Para considerar posteriormente el esquema en coordenadas cartesianas, polares, cilíndricas y esféricas, del esquema de elevado grado de exactitud, del esquema de redes irregulares de aproximación de diferentes condiciones límites, y otros, se formulan y estudian esquemas diferenciales en ecuaciones de segundo grado con coeficientes variables y derivadas mixtas, lo anterior se realiza para un sistema de ecuaciones de la teoría de elasticidad y para las ecuaciones diferenciales de cuarto grado.

En la presente obra ocupan un importante lugar los temas que tratan la aproximación de las condiciones límites y las condiciones de conjunción. Se prestó la debida atención a la investigación de la estabilidad y la convergencia de los esquemas en diferencias. Para esto se emplearon distintos métodos: principio de máximo, método de desigualdades energéticas y método de la función de Greene. A base de los métodos indicados se establecieron las apreciaciones apriorísticas correspondientes de las cuales, luego, se dedujeron los valores de la velocidad de convergencia de los esquemas.

El libro está escrito en forma de texto de estudio, y está dirigido a un amplio círculo de lectores.

F.D.GÁJOV

PROBLEMAS DE CONTORNO

QA374
G33